ANALISI MATEMATICA 2 — ING. AEROSPAZIALE — APPELLO DEL 17.07.2024 ~~B~~

Cognome: VERSIONE **Nome:** PRELIMINARE

Durante i primi 90 minuti è consentita la consultazione di un libro di testo di teoria. È sempre vietata la consultazione di ogni altro materiale (strumenti elettronici, fotocopie, appunti, dispense, libri di esercizi, ecc.). Per ottenere la sufficienza occorre SIA risolvere correttamente almeno 2 esercizi, SIA ottenere almeno 18 punti. È possibile ritirarsi in qualunque momento. Le risposte devono essere motivate. Consultare il docente SOLO in caso di dubbi sul testo.

(1) Sia $A \in \mathbb{R}$ e sia $\mathbf{F}_A(x,y) = \left((1+xy)e^{xy} + (2-A)y^2 \,,\, x^2e^{xy} + 2Axy \right)$.

(a) Determinare A in modo tale che $\mathbf{F}_A$ sia conservativo in $\mathbb{R}^2$.

(b) Calcolare il lavoro di $\mathbf{F}_0$ lungo il segmento da $(0,0)$ a $(1,1)$.

8 punti

Risposta: a) $A = 1$

b) $e + 2/3$

Svolgimento:

a) $U(x,y) = \int (x^2 e^{xy} + 2Axy)\,dy = xe^{xy} + Axy^2 + C(x)$

$\frac{\partial U}{\partial x} = e^{xy} + xye^{xy} + Ay^2 + C'(x) \overset{?}{=} (1+xy)e^{xy} + (2-A)y^2$

$\Longleftrightarrow \begin{matrix} A = 2-A \\ C' = 0 \end{matrix} \Longleftrightarrow \begin{matrix} A = 1 \\ C = c \end{matrix}$

b) $\underline{F}_0(x,y) = \underline{F}_1(x,y) + (y^2, -2xy)$ $\qquad \gamma(t) = (t,t),\ t \in [0,1]$

$\int_\gamma \underline{F}_0 \cdot d\underline{x} = \int_\gamma \underline{F}_1 \cdot d\underline{x} + \int_\gamma (y^2, -2xy) \cdot d\underline{x}$

$= U(1,1) - U(0,0) + \int_0^1 (t^2 - 2t^2)\,dt$

$= e + 1 - 1/3$.

Per (a),
$U(x,y) = xe^{xy} + xy^2$

Scansionato con CamScanner

(2) Sia $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2+y^2 \le 1,\ |y| \le 1-x\}$.

(a) Calcolare $\displaystyle\iint_D \left(x^3 \sin(xy) + x\right)\, dx dy$.

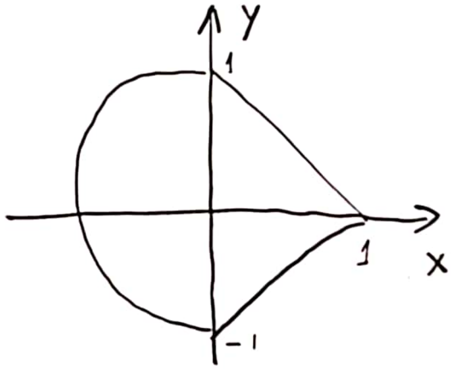
(b) Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ il solido ottenuto ruotando D di un angolo π intorno all'asse x. Calcolare il flusso di $\mathbf{V}(x,y,z) = (xz, 3y, xy)$ uscente da Ω.

8 punti

Risposta: a) $-1/3$

b) 3π

Svolgimento:



a) D simmetrico rispetto a $y=0$

$(x,y) \longmapsto x^3 \sin(xy)$ dispari rispetto a $y=0$

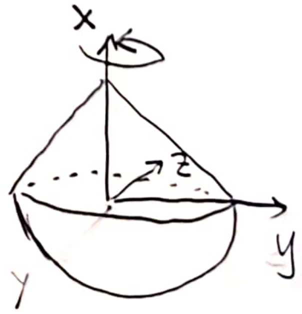
$$\Rightarrow \iint_D \left(x^3\sin(xy)+x\right) dx dy = \iint_D x\, dx dy = 2\int_0^1 \int_{\sqrt{1-y^2}}^{1-y} x\, dx\, dy$$

$$= \int_0^1 \left[(1-y)^2 - (1-y^2)\right] dy = \frac{1}{3} - 1 + \frac{1}{3}$$

b) $$\iint_{\partial\Omega} \underline{V} \cdot \underline{N}^e\, dS = \iiint_\Omega \operatorname{div} V\, d\underline{x} = \iiint_\Omega (z+3)\, d\underline{x}$$

$(x,y,z) \longmapsto z$ dispari rispetto a $z=0$

$$= 3\,|\Omega|_3 = 3\left(\frac{2}{3}\pi + \frac{\pi}{3}\right) = 3\pi$$



Scansionato con CamScanner

(3) Sia $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, determinare l'integrale generale della seguente EDO:

$$y''(x) + 4y(x) = 4x^2 - 2 + \cos(\alpha x).$$

(b) Per $\alpha = 2$, determinare l'unica soluzione tale che $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$.

.... 8 punti

Risposta: a) $y(x) = C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x) + x^2 - 1 + \frac{1}{4-\alpha^2}\cos(\alpha x)$ se $|\alpha| \neq 2$

$y(x) = C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x) + x^2 - 1 + \frac{1}{2\alpha}x\sin(\alpha x)$ se $|\alpha| = 2$

b) $y(x) = \cos(2x) + x^2 - 1 + \frac{1}{4}x\sin(2x)$

Svolgimento:

a) • Omogenea: $y_0(x) = C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x)$

• Soluzione particolare di $y'' + 4y = 4x^2 - 2$;

$y_p(x) = ax^2 + bx + c$

$y_p'' + 4y_p = 2a + 4ax^2 + 4bx + 4c \overset{!}{=} 4x^2 - 2 \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = -1 \end{cases}$

• Soluzione particolare di $y'' + 4y = \cos(\alpha x)$

$y_p(x) = a\cos(\alpha x) + b\sin(\alpha x)$

$y_p'' + 4y_p = a(4-\alpha^2)\cos(\alpha x) + b(4-\alpha^2)\sin(\alpha x) \overset{!}{=} \cos(\alpha x)$

$\iff a = \frac{1}{4-\alpha^2}$, $|\alpha| \neq 2$ e $b = 0$

Se $|\alpha| = 2$, $y_p(x) = ax\cos(\alpha x) + bx\sin(\alpha x)$

$y_p'(x) = a(\cos(\alpha x) - \alpha x\sin(\alpha x)) + b(\sin(\alpha x) + x\alpha\cos(\alpha x))$

$y_p''(x) = a(-2\alpha\sin(\alpha x) - \alpha^2 x\cos(\alpha x)) + b(2\alpha\cos(\alpha x) - \alpha^2 x\sin(\alpha x))$

$y_p'' + 4y_p = -2a\alpha\sin(\alpha x) + 2b\alpha\cos(\alpha x) \overset{!}{=} \cos(\alpha x)$

$\alpha^2 = 4$ $\iff a = 0$, $b = 1/2\alpha$

b) $y(0) = 0 \iff c_1 - 1 = 0$; $y'(0) = c_2 = 0$

Scansionato con CamScanner