ANALISI MATEMATICA 2 — ING. AEROSPAZIALE — APPELLO DEL 19.06.2024

Cognome: VERSIONE **Nome:** PRELIMINARE

Durante i primi 90 minuti è consentita la consultazione di un libro di testo di teoria. È sempre vietata la consultazione di ogni altro materiale (strumenti elettronici, fotocopie, appunti, dispense, libri di esercizi, ecc.). Per ottenere la sufficienza occorre SIA risolvere correttamente almeno 2 esercizi, SIA ottenere almeno 18 punti. È possibile ritirarsi in qualunque momento. Le risposte devono essere motivate. Consultare il docente SOLO in caso di dubbi sul testo.

(1) Siano

$$\Gamma = \left\{(0, \cos z, z) : \ 0 \le z \le \tfrac{\pi}{2}\right\}, \quad \mathbf{V}(x,y,z) = (y^3 + e^z, y\sin z, x+1).$$

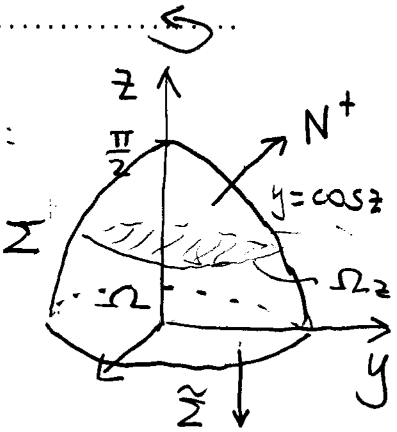
Sia $\Sigma^+ \subset \mathbb{R}^3$ la superficie ottenuta facendo ruotare Γ di un angolo 2π intorno all'asse z, orientata in modo che $\mathbf{N}^+(0, \frac{1}{2}, \frac{\pi}{4})\cdot \mathbf{e}_2 > 0$. Calcolare il flusso di $\mathbf{V}$ attraverso Σ^+.

8 punti

Risposta:

$\frac{4}{3}\pi$

Svolgimento:



Applico il teorema della divergenza in Ω:

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} \underline{V} = \iint_{\partial\Omega} \underline{V}\cdot \underline{N}^e \, dS = \iint_{\Sigma} \underline{V}\cdot \underline{N}^+ dS + \iint_{\tilde{\Sigma}} \underline{V}\cdot \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix} dS$$

$$\operatorname{div} \underline{V} = \sin z$$

$$\iint_{\Sigma} \underline{V}\cdot \underline{N}^+ dS = \iiint_{\Omega} \sin z + \iint_{\tilde{\Sigma}} \underline{V}\cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} dS$$

Per strati:

$$\iiint_{\Omega} \sin z = \int_0^{\pi/2} \left(\iint_{\Omega_z} \sin z \, dx\,dy \right) dz = \int_0^{\pi/2} \sin z \, |\Omega_z| \, dz$$

$$= \int_0^{\pi/2} \pi \sin z \cos^2 z \, dz = \frac{\pi}{3}$$

$$\iint_{\tilde{\Sigma}} \underline{V}\cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} dS = \iint_{\tilde{\Sigma}} x+1 \, dS \underset{\text{simmetria}}{=} \iint_{\tilde{\Sigma}} 1 \, dS = |\tilde{\Sigma}| = \pi$$

(2) Siano

$$f(x,y) = x^2y - 2xy^2 - 2xy + y, \quad K = \{(x,y) : (x-1)^2 \le y \le 1\}.$$

a) Determinare i punti critici di f in $\mathbb{R}^2$;

b) determinare il massimo e il minimo assoluto di f in K;

c) determinare i punti di massimo e di minimo locale di f su ∂K.

8 punti

Risposta: (a) $(1,0)$, $(-1/3, 4/3)$

(b) $\max_K f = f(0,1) = 1$, $\min_K f = f(2,1) = -3$

(c) punti di max: $(0,1)$, $(1,0)$; punti di min: $(2,1)$, $(\frac{2}{3}, 1/9)$

Svolgimento:

(a) $\begin{cases} f_x = 2xy - 2y^2 - 2y = 2y(x-y-1) \overset{!}{=} 0 \\ f_y = x^2 - 4xy - 2x + 1 \overset{!}{=} 0 \end{cases}$

$\Leftarrow 3x^2 - 2x - 1 = 0$

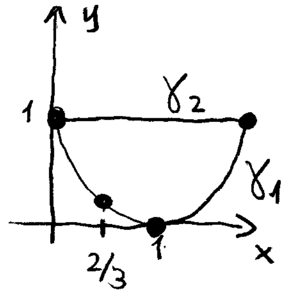
$\Delta = 4 + 12 = 16$

$x = \frac{2 \pm 4}{6} < \begin{matrix} 1 \\ -1/3 \end{matrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x^2 - 2x + 1 = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y = x - 1 \\ x^2 - 4x(x-1) - 2x + 1 = 0 = -3x^2 + 2x + 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow (1,0) \quad \vee \quad (-1/3, -4/3)$

(b) Punti critici interni: $\emptyset$; punti di non diff.: $\emptyset$



Spigoli $(0,1)$, $(2,1)$

Su γ_1: $h_1(x) = f|_{\Gamma_1} = y(x^2 - 2xy - 2x + 1)$

$= y((x-1)^2 - 2xy) = (x-1)^2((x-1)^2 - 2x(x-1)^2)$

$= (x-1)^4(1-2x)$

$h_1'(x) = 4(x-1)^3(1-2x) + (x-1)^4(-2) = 2(x-1)^3(2-4x-2x+2)$

$= 4(x-1)^3(2-3x) = 0 \Leftrightarrow x = 1, \ x = 2/3$

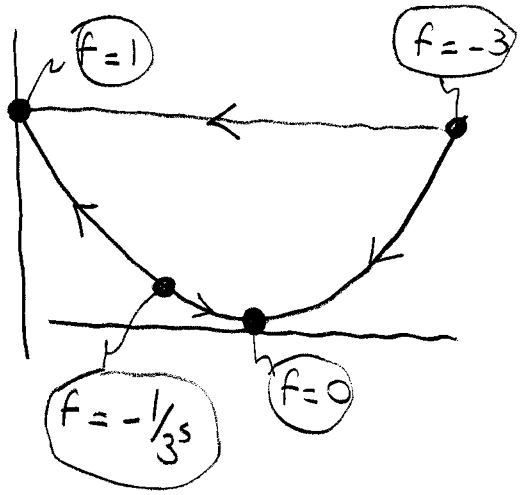
$(1,0) \quad (2/3, 1/9)$

Su γ_2: $h_2(x) = f|_{\Gamma_2} = x^2 - 4x + 1$

$h_2'(x) = 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ NO

$f(1,0) = 0$, $f(0,1) = 1$, $f(2,1) = -3$, $f(\frac{2}{3}, 1/9) = \frac{1}{3^4}(-\frac{1}{3}) \in (-3, 0)$

(c) La risposta segue dalle proprietà di monotonia illustrate in figura



(3) Risolvere i seguenti due problemi di Cauchy, specificando anche gli intervalli massimali di esistenza delle soluzioni:

$$\text{a)} \begin{cases} y' = \dfrac{y^2-2y}{2x(y-1)}, & x>0 \\ y(1) = 2\ ; \end{cases} \qquad \text{b)} \begin{cases} y' = \dfrac{y^2-2y}{2x(y-1)}, & x>0 \\ y(1) = \frac{3}{2}\ . \end{cases}$$

.... 8 punti

Risposta: (b) $y = 1 + \sqrt{1-\frac{3}{4}x}$, $x \in (0, 4/3)$

(a) $y \equiv 2$, $x \in (0, +\infty)$

....

Svolgimento:

a) $y \equiv 2$ è soluzione stazionaria, $I = (0,+\infty)$

b) $$\int \frac{y'(2y-2)}{y^2-2y}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx \iff \log|y^2-2y| = \log x + C$$

$$\iff y^2-2y = Cx$$

$$y(1) = \frac{3}{2} \iff \frac{9}{4} - 3 = C \iff C = -3/4$$

$$y^2 - 2y = -\frac{3}{4}x \iff y^2-2y+1 = 1-\frac{3}{4}x \iff (y-1)^2 = 1-\frac{3}{4}x$$

$$\underset{y(1)=\frac{3}{2}}{\iff} \quad y = 1+\sqrt{1-\frac{3}{4}x} \quad , \quad x \in I = (0, 4/3)$$