ANALISI MATEMATICA 2 — ING. AEROSPAZIALE — APPELLO DEL 14.02.2024

Cognome: VERSIONE Nome: PRELIMINARE

Durante i primi 90 minuti è consentita la consultazione di un libro di testo di teoria. È sempre vietata la consultazione di ogni altro materiale (strumenti elettronici, fotocopie, appunti, dispense, libri di esercizi, ecc.). Per ottenere la sufficienza occorre SIA risolvere correttamente almeno 2 esercizi, SIA ottenere almeno 18 punti. È possibile ritirarsi in qualunque momento. Le risposte devono essere motivate. Consultare il docente SOLO in caso di dubbi sul testo.

(1) Calcolare il lavoro del campo vettoriale

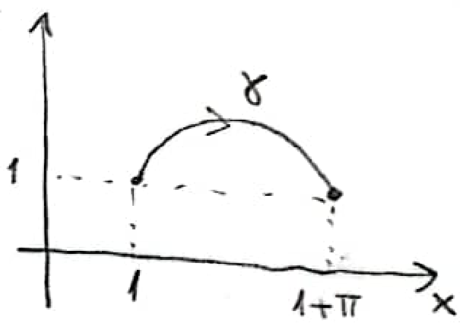
$$\mathbf{F}(x,y) = \left(\frac{x^2+y^2}{x^2 y} + 3y \; , \; -\frac{x^2+y^2}{xy^2} \right)$$

lungo la curva $\gamma(t) = (1+t, 1+\sin t)$, $t \in [0,\pi]$.

8 punti

Risposta: $4\pi + 7 - \frac{1}{1+\pi}$

Svolgimento:



$\underline{F}_0(x,y) = \underline{F}(x,y) - 3y$ è conservativo nel primo quadrante:

$$U(x,y) = \int \frac{x^2+y^2}{x^2 y} dx = \int \left(\frac{1}{y} + \frac{y}{x^2} \right) dx$$

$$= \frac{x}{y} - \frac{y}{x} + C(y)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} - \frac{1}{x} + C'(y) = -\frac{x^2+y^2}{xy^2} + C'(y) \overset{?}{=} -\frac{x^2+y^2}{xy^2}$$

Quindi $U(x,y) = \frac{x}{y} - \frac{y}{x}$ e $\iff C'(y) = 0$ ok

$$\int_\gamma \underline{F} \cdot d\underline{x} = \int_\gamma \underline{F}_0 \cdot d\underline{x} + \int_\gamma 3y\, dx = \underbrace{U(1+\pi,1)}_{1+\pi-\frac{1}{1+\pi}} - \underbrace{U(1,1)}_{0} + \int_\gamma 3y\, dx$$

$$\int_\gamma 3y\, dx = \int_0^\pi 3(1+\sin t)\, dt = 3\pi + 6$$

(2) Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ il solido ottenuto facendo ruotare l'insieme

$$E = \{(x, y, 0) : \ x \geq 0, \ 1 \leq y \leq 2, \ xy \leq 3\}$$

di un angolo 2π intorno all'asse y.

a) Calcolare il volume di Ω.

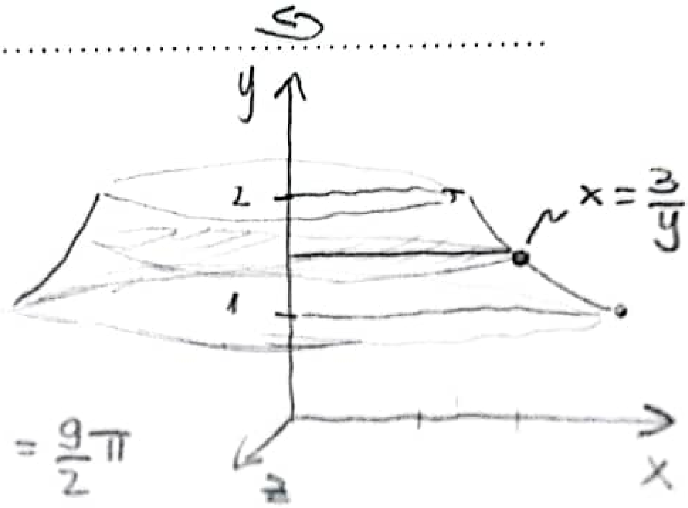
b) Calcolare il flusso di $\mathbf{V}(x, y, z) = (xyz^2, z, x)$ uscente da Ω.

8 punti

Risposta: $|\Omega| = \frac{9}{2}\pi$

$$\iint_{\partial\Omega} \underline{V} \cdot \underline{N} = \frac{3^5}{2^5}\pi$$

Svolgimento:



Per strati:

a) $|\Omega| = \int_1^2 |\Omega_y| \, dy$

$= \int_1^2 \pi \frac{9}{y^2} \, dy = 9\pi\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{9}{2}\pi$

b) $\operatorname{div} \underline{V} = yz^2 + 0 + 0 = yz^2$

$$\iint_{\partial\Omega} \underline{V} \cdot \underline{N} \, dS = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \underline{V} = \int_1^2 y \left(\iint_{\Omega_y} z^2 \, dx\, dz \right) dy$$

$$\iint_{\Omega_y} z^2 \, dx\, dz = \int_0^{2\pi} \int_0^{3/y} \rho^3 \cos^2\varphi \, d\rho \, d\varphi = \pi \frac{\rho^4}{4} = \pi \frac{81}{4y^4}$$

$$\int_1^2 \frac{81\pi}{4y^3} \, dy = -\frac{81\pi}{8y^2}\Big|_1^2 = \frac{81\pi}{8}\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3^5}{2^5}\pi$$

(3) Determinare tutte le soluzione della EDO

$$x^2 y''(x) - \frac{1}{4}\, y(x) = \frac{1}{5} x, \quad x > 0$$

tali che $\frac{\sqrt{x}}{y(x)} \to 0$ per $x \to +\infty$.

8 punti

Risposta: $y(x) = C_1 x^{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} + C_2 x^{\frac{1-\sqrt{2}}{2}} - \frac{4}{5} x$

Svolgimento:

Eulero: $\quad x = e^s,\ s \in \mathbb{R}, \quad v(s) = y(e^s)$

$$v''(s) - v'(s) - \frac{1}{4} v(s) = \frac{1}{5} e^s$$

Omogenea: $\lambda^2 - \lambda - \frac{1}{4} = 0 \qquad \Delta = 1 + 1 = 2$

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{2}}{2}, \quad v_0(s) = c_1 e^{\frac{1+\sqrt{2}}{2}s} + c_2 e^{\frac{1-\sqrt{2}}{2}s}$$

Sol. part. $\quad v_p(s) = A e^s \qquad \cancel{A e^s} - \cancel{A e^s} - \frac{1}{4} A e^s = \frac{1}{5} e^s \qquad A = -\frac{4}{5}$

Int. gen. $\quad v(s) = C_1 e^{\frac{1+\sqrt{2}}{2}s} + C_2 e^{\frac{1-\sqrt{2}}{2}s} - \frac{4}{5} e^s$

$$y(x) = C_1 x^{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} + C_2 x^{\frac{1-\sqrt{2}}{2}} - \frac{4}{5} x$$

$$\sim \begin{cases} C_1 x^{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} & \text{se } C_1 \neq 0 \\ -\frac{4}{5} x & \text{se } C_1 = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \frac{\sqrt{x}}{y(x)} \sim \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{C_1} x^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} & \text{se } C_1 \neq 0 \\ -\frac{5}{4} x^{-1/2} & \text{se } C_1 = 0 \end{array} \right\} \rightarrow 0 \text{ per } x \to +\infty$$