ANALISI MATEMATICA 2 — ING. AEROSPAZIALE — APPELLO DEL 17.06.2022 | A

Cognome: Versione Nome: preliminare

È consentita la consultazione di un libro di testo di teoria. È sempre vietata la consultazione di ogni altro materiale (strumenti elettronici, fotocopie, appunti, dispense, libri di esercizi, ecc.). Le risposte devono essere motivate. Consultare il docente SOLO in caso di dubbi sul testo.

(1) Siano

$$f(x,y) = x^3 - x^2y + y^3 - x^2, \qquad \Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in [0,1], \ y^2 \le x^2\}.$$

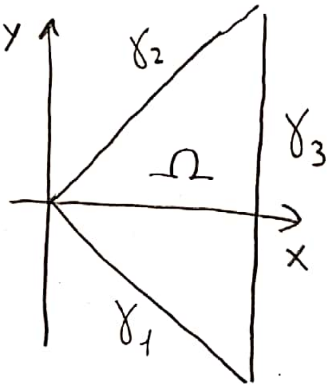
Determinare il massimo assoluto e il minimo assoluto di f vincolato su $\Gamma = \partial\Omega$. $\boxed{\text{8 punti}}$

Risposta:

$$\max_{\Gamma} f = \frac{2}{3\sqrt{3}}, \quad \min_{\Gamma} f = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$$

$$\left(-\frac{2}{3\sqrt{3}} < -\frac{4}{27} \iff \frac{1}{\sqrt{3}} > \frac{2}{9} \right)$$

Svolgimento:



$$y^2 \le x^2 \iff |y| \le |x| \overset{x\ge 0}{=} x$$

$$f(x,y) = x^3 - y(y^2 - x^2) - x^2$$

- $$f|_{\gamma_1 \cup \gamma_2} = x^3 - x^2 = g(x)$$

$$g'(x) = 3x^2 - 2x = 0 \iff x = \frac{2}{3}$$

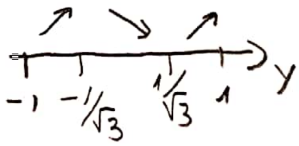
$(0,0)$ candidato punto di massimo $f(0,0) = 0$

$(1,\pm 1)$ " " " massimo $f(1,\pm 1) = 0$

$\left(\frac{2}{3}, \pm\frac{2}{3}\right)$ " " " minimo $f\left(\frac{2}{3}, \pm\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{27} - \frac{4}{9} = -\frac{4}{27}$

- $$f|_{\gamma_3} = 1 - y + y^3 - 1 = y^3 - y = h(y)$$

$$h'(y) = 3y^2 - 1 = 0 \iff y = \pm 1/\sqrt{3}$$



$(1,-1)$ candidato punto di minimo $f(1,-1) = 0$

$(1, -1/\sqrt{3})$ " " massimo $f\left(1, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \mp\frac{2}{3\sqrt{3}}$

$(1, 1/\sqrt{3})$ " " minimo

$(1, 1)$ " " massimo $f(1,1) = 0$

(2) Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy, specificando l'intervallo massimale di esistenza della soluzione:

$$\begin{cases} y''(x) = 8y(1+y^2) \\ y(2) = 0, \ y'(2) = -2. \end{cases}$$

.... 8 punti

Risposta: $y(x) = \operatorname{tg}(4-2x), \quad I = \left(2-\frac{\pi}{4}, 2+\frac{\pi}{4}\right)$

....

Svolgimento:

Si tratta come una EDO autonoma (vedi il box qui sotto) oppure moltiplicando per y':

$$y'y'' = 8y(1+y^2)y'$$

$$\frac{y'^2}{2} = 4y^2 + 2y^4 + C$$

$$\frac{4}{2} = C \Rightarrow C = 2$$

$v(y) = y'(x(y))$

$v' = \frac{y''}{y'} = \frac{8y(1+y^2)}{v}$

$vv' = 8y(1+y^2)$

$\left(\frac{v^2}{2}\right)' = 8y(1+y^2)$

$\vdots$

$$y'^2 = 4(1+2y^2+y^4) = 4(1+y^2)^2$$

$y' = \pm 2(1+y^2)$ scelgo il $-$ perché $y'(0) < 0$

$$\frac{y'}{1+y^2} = -2 \qquad \operatorname{atg} y = -2x + C$$

$$0 = -4 + C \Rightarrow C = 4$$

$$\operatorname{atg} y = 4 - 2x$$

$$y(x) = \operatorname{tg}(4-2x) \qquad |4-2x| < \frac{\pi}{2}$$

$$|2-x| < \frac{\pi}{4}$$

$$I = \left(2-\frac{\pi}{4}, 2+\frac{\pi}{4}\right)$$

(3) Per $a \in \mathbb{R}$, siano

$$\mathbf{F}_a(x,y) = (e^x + y, e^y + ax), \qquad \gamma(t) = (\cos t, 2\sin t),\ t \in \left[-\tfrac{\pi}{2}, \pi\right].$$

a) Determinare, se esistono, i valori di $a \in \mathbb{R}$ per cui $\mathbf{F}$ è conservativo in $\mathbb{R}^2$, e per tali valori determinare una funzione potenziale;

b) Per $a = 2$, calcolare il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo γ.

9 punti

Risposta: a) $a=1$, $U(x,y) = e^x + e^y + xy$

b) $\frac{3}{2}\pi + e^{-1} - e^{-2}$.

Svolgimento:

a) $U(x,y) = \int (e^x + y)\,dx = e^x + xy + C(y)$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = x + C'(y) \overset{\nabla}{\underset{\circ}{=}} e^y + ax \iff \begin{cases} a = 1 \\ C'(y) = e^y \end{cases} \iff C(y) = e^y + c$$

$$U(x,y) = e^x + e^y + xy + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

b) $\underline{F}_2(x,y) = \underline{F}_1(x,y) + (0,x)$

$\gamma(-\frac{\pi}{2}) = (0,-2)$

$\gamma(\pi) = (-1,0)$

$$\int_\gamma \underline{F}_2 \cdot d\underline{x} = \int_\gamma \underline{F}_1 \cdot d\underline{x} + \int_\gamma (0,x)\cdot d\underline{x}$$

$$\int_\gamma \underline{F}_1 \cdot d\underline{x} = U(-1,0) - U(0,-2) = e^{-1} + \cancel{1} - \cancel{1} - e^{-2}$$

$$\int_\gamma (0,x)\cdot d\underline{x} = \int_{-\pi/2}^{\pi} (0, \cos t)\cdot(-\sin t, 2\cos t)\,dt$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi} 2\cos^2 t\,dt = 2 \cdot \frac{3}{4}\pi = \frac{3}{2}\pi.$$