Analisi 2

Gennaio 2025

Esercizio 1 **(8 pt.)** Si studi la continuità e la differenziabilità in $(0,0)$ della funzione $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Dire se é applicabile o meno il Teorema del differenziale totale.

Esercizio 2 **(7 pt.)** Determinare i punti critici della funzione

$$f(x,y) = x(4 - x^2 - y^2).$$

e dire se ciascuno di essi è un punto di massimo locale o un punto di minimo locale o un punto di sella.

Esercizio 3 **(8 pt.)** Calcolare

$$\iint_D xy\,dx\,dy, \qquad \text{essendo} \qquad D = \{(x,y) : xy \geq 0,\ \ 1 \leq x+y \leq 2\}.$$

Esercizio 4 **(8 pt.)** Sia dato il campo vettoriale $\vec{F}(x,y,z) = (x+y, z-y, x^3 y)$.

(a) Stabilire se $\vec{F}$ è conservativo (ed eventualmente calcolarne un potenziale).

(b) Data la curva γ definita da

$$\gamma = \partial \mathcal{S} \qquad \text{dove} \qquad \mathcal{S} = \{(x,y,z)\ :\ x^2+y^2 \leq 4\,,\quad z = x^2+y^2\}$$

orientata con la normale che forma un angolo acuto con l'asse z (ovvero tale che $\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_3 > 0$). Calcolare

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{s}.$$

Esercizio 1

- f continua in $(0,0) \iff \lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y) - \underbrace{f(0,0)}_{=0}| = 0 \iff$

$$\iff 0 = \lim_{\rho\to 0} \sup_{\varphi} \frac{\rho^3\cos^2\varphi\sin\varphi}{(\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi)} = \lim_{\rho\to 0}\sup_{\varphi}\left(\rho\cos^2\varphi\sin\varphi\right)$$

$$\leq \lim_{\rho\to 0} \rho \cdot \underbrace{\sup_{\varphi}|\cos^2\varphi\sin\varphi|}_{\leq 1} = 0 \Rightarrow f \text{ continua in } (0,0)$$

- $$f_x(0,0) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} 0 = 0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} 0 = 0$$

$\Rightarrow f$ derivabile in $(0,0)$, $\nabla f(0,0) = (0,0)$.

f differenziabile in $(0,0) \iff$

$$\iff 0 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \nabla f(0,0)\cdot(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

Questo è falso. Infatti, per esempio, $\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} \frac{x^2y}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \lim_{x\to 0}\frac{x^3}{(2x^2)^{3/2}} \nexists$

(oppure si osservi che $\lim_{\rho\to 0}\sup_{\varphi} \frac{\rho^3\cos^2\varphi\sin\varphi}{\rho^3} \nexists$)

- Il teorema del differenziale totale non è applicabile. Altrimenti, infatti, f risulterebbe differenziabile in $(0,0)$.

Esercizio 2

$f(x,y) = 4x - x^3 - xy^2$

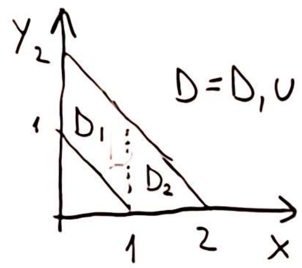
$$\begin{cases} f_x = 4 - 3x^2 - y^2 \overset{!}{=} 0 \\ f_y = -2xy \overset{!}{=} 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 4 - y^2 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 4 - 3x^2 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Quindi i punti critici sono : $(0, \pm 2)$, $(\pm 2/\sqrt{3}, 0)$.

$$D^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} -6x & -2y \\ -2y & -2x \end{pmatrix} \qquad D^2 f(0, \pm 2) = \begin{pmatrix} 0 & \mp 4 \\ \mp 4 & 0 \end{pmatrix} \text{ punti di sella}$$

$$D^2 f(2/\sqrt{3}, 0) = \begin{pmatrix} -12/\sqrt{3} & 0 \\ 0 & -4/\sqrt{3} \end{pmatrix} \text{ punto di max loc} \qquad D^2 f(-2/\sqrt{3}, 0) = \begin{pmatrix} 12/\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 4/\sqrt{3} \end{pmatrix} \text{ punto di min loc}$$

Esercizio 3



$D = D_1 \cup D_2$

⊙ $$\iint_D xy = \int_0^1 \left(\int_{1-x}^{2-x} xy \, dy \right) dx + \int_1^2 \left(\int_0^{2-x} xy \, dy \right) dx$$

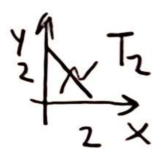
$$= \int_0^1 \frac{x}{2} \left[(2-x)^2 - (1-x)^2 \right] dx + \int_1^2 \frac{x}{2} (2-x)^2 \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 (\underbrace{4x - 4x^2 + \cancel{x^3} - x + 2x^2 - \cancel{x^3}}_{= 3x - 2x^2}) \, dx + \frac{1}{2} \int_1^2 (4x - 4x^2 + x^3) \, dx$$

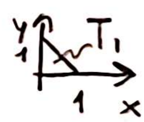
$$= \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} - \frac{2}{3} \right) + \frac{1}{2} \left[2x^2 - \frac{4}{3} x^3 + \frac{x^4}{4} \right]_1^2$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} - \frac{2}{3} + 8 - \frac{32}{3} + 4 - 2 + \frac{4}{3} - \frac{1}{4} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(10 - \frac{5}{4} - \frac{30}{3} \right) = \frac{15}{24} = \frac{5}{8}$$

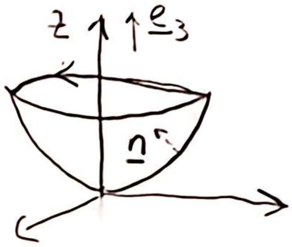


⊙ In alternativa : $D = T_2 - T_1$ (controllate !)



Esercizio 4

- $\vec{F}$ non è conservativo in quanto $\mathrm{dom}\,\vec{F} = \mathbb{R}^3$ e $\vec{F}$ non è irrotazionale: per esempio



$$\frac{\partial \vec{F}_3}{\partial y} = x^3 \neq \frac{\partial \vec{F}_2}{\partial z} = 1$$

- Calcolo diretto (ma si può usare anche il teorema del rotore su S o, più semplicemente, su $S' = \{z = 4,\ x^2+y^2 \leq 4\}$ orientata con $\underline{n}' = (0,0,1)$)

Parametrizzazione orientata di ∂S:

$$\underline{\gamma}(\varphi) = (2\cos\varphi, 2\sin\varphi, 4) \qquad \varphi \in (0, 2\pi)$$
$$\underline{\gamma}'(\varphi) = (-2\sin\varphi, 2\cos\varphi, 0)$$

$$\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 2\cos\varphi + 2\sin\varphi \\ 4 - 2\sin\varphi \\ \cdots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2\sin\varphi \\ 2\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-4\sin\varphi\cos\varphi - 4\sin^2\varphi + 8\cos\varphi - 4\sin\varphi\cos\varphi\right) d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} -4\sin^2\varphi \, d\varphi = -4\pi.$$