**ANALISI MATEMATICA 2 — ING. AEROSPAZIALE — APPELLO DEL 23.01.2025**

A

Cognome: VERSIONE Nome: PRELIMINARE

Durante i primi 90 minuti è consentita la consultazione di un libro di testo di teoria. È sempre vietata la consultazione di ogni altro materiale (strumenti elettronici, fotocopie, appunti, dispense, libri di esercizi, ecc.). Per ottenere la sufficienza occorre SIA risolvere correttamente almeno 2 esercizi, SIA ottenere almeno 18 punti. È possibile ritirarsi in qualunque momento. Le risposte devono essere motivate. Consultare il docente SOLO in caso di dubbi sul testo.

(1) Risolvere il seguente problema di Cauchy, determinando anche l'intervallo massimale di esistenza della soluzione:

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{2}(1-y^2) \\ y(0) = -3. \end{cases}$$

8 punti

**Risposta:** $y(x) = \dfrac{2+e^x}{e^x-2}$, $x \in (-\infty, \log 2)$

**Svolgimento:** $y(0) \neq \pm 1$. Variabili separabili:

$$\int \frac{2}{1-y^2}\,dy = \int 1\,dx \iff \log\left|\frac{1+y}{1-y}\right| = x + C_1$$

$$\iff \left|\frac{1+y}{1-y}\right| = Ce^x,\ C>0 \implies \frac{1+y}{1-y} = Ce^x,\ C \in \mathbb{R}$$

$y(0) = -3$

$$\iff C = -\frac{1}{2} \iff \frac{2(1+y)}{y-1} = e^x \iff 2+2y = e^x y - e^x$$

$$\iff y(x) = \frac{2+e^x}{e^x-2} \qquad e^x \neq 2 \iff x \neq \log 2$$

**(2)** Sia

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \ x \leq \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{y^2 + z^2}\}.$$

a) Determinare il baricentro di $\Omega$;

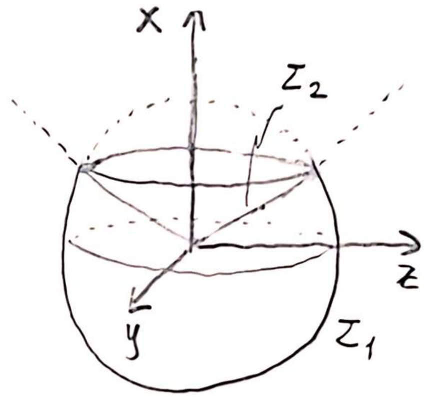
b) determinare l'area di $\partial\Omega$.

8 punti

**Risposta:** Baricentro in $\left(-\frac{3}{16}, 0, 0\right)$

Area di $\partial\Omega = \pi\left(3 + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

**Svolgimento:** Palla privata di un cono




a)

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta\cos\varphi \\ z = \rho\sin\theta\sin\varphi \end{cases} \qquad \begin{array}{l} 0 \leq \rho \leq 1 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ \frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \pi \end{array}$$

$$|\Omega|_3 = \iiint_\Omega 1 = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{\pi/3}^{\pi} \rho^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \, d\rho = \frac{2\pi}{3}\left[-\cos\theta\right]_{\pi/3}^{\pi}$$

$$= \frac{2\pi}{3}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \pi$$

$y_B = z_B = 0$ per simmetria

$$\iiint_\Omega x = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{\pi/3}^{\pi} \rho^3 \sin\theta\cos\theta \, d\theta \, d\varphi \, d\rho = \frac{2\pi}{4}\left[\frac{1}{2}\sin^2\theta\right]_{\pi/3}^{\pi}$$

$$= \frac{2\pi}{4} \cdot \left(-\frac{3}{8}\right) = -\frac{3}{16}\pi$$

b) $|\partial\Omega|_2 = |\Sigma_1|_2 + |\Sigma_2|_2$

$$|\Sigma_1|_2 = \int_0^{2\pi} \int_{\pi/3}^{\pi} \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = 2\pi \cdot \frac{3}{2} = 3\pi$$

(parametrizzando $\Sigma_1$ in coord. sferiche)

$$|\Sigma_2|_2 = \int_0^{1/2} 2\pi\sqrt{3}\, x \, dx = \pi\sqrt{3}\, x^2 \Big|_0^{1/2}$$

$$= \frac{\pi\sqrt{3}}{4}$$

(sup. rotazione o strati o cilindriche)

**(3)** Sia $f(x,y) = x^2y^2 - x^2 + x^4$.

a) Determinare i punti critici di $f$ in $\mathbb{R}^2$;

b) stabilire la natura dei punti critici;

c) determinare gli estremi assoluti di $f$ su $K = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$.

8 punti

**Risposta:** a) $\{(0,y),\ y \in \mathbb{R}\} \cup \{(\pm 1/\sqrt{2}, 0)\}$

b) $\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ punti di minimo locale ; vedi sotto per gli altri

c) $\min_K f = -1/4$ , $\max_K f = 0$.

**Svolgimento:**

a) $$f_x = 2xy^2 - 2x + 4x^3 = 0 \qquad f_y = 2x^2y = 0$$

$$\iff \begin{cases} 0 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} 2x^2 = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

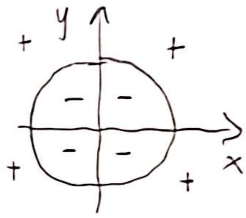
$$\iff (0,y)\ \forall y \in \mathbb{R} \text{ oppure } \left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

b) $$f_{xx} = 2y^2 - 2 + 12x^2 \qquad f_{xy} = 4xy \qquad f_{yy} = 2x^2$$

$$D^2f(0,y) = \begin{pmatrix} 2y^2-2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ?$$

$$D^2f(\pm 1/\sqrt{2}, 0) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ definita positiva}$$

$$f(x,y) - f(0,y) = x^2y^2 - x^2 + x^4 = x^2(x^2 + y^2 - 1)$$




$(0,y)$, $|y| < 1$ punti di massimo locale
$(0,y)$, $|y| > 1$ punti di minimo locale
$(0,\pm 1)$ non di estremo locale

c) Punti critici interni : $\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ , $f\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = -\frac{1}{4}$

$\partial K$ : $f|_{\partial K} \equiv 0$