ANALISI MATEMATICA 2 — ING. AEROSPAZIALE — APPELLO DEL 18.09.2024 ~~B~~

Cognome: VERSIONE **Nome:** PRELIMINARE

Durante i primi 90 minuti è consentita la consultazione di un libro di testo di teoria. È sempre vietata la consultazione di ogni altro materiale (strumenti elettronici, fotocopie, appunti, dispense, libri di esercizi, ecc.). Per ottenere la sufficienza occorre SIA risolvere correttamente almeno 2 esercizi, SIA ottenere almeno 18 punti. È possibile ritirarsi in qualunque momento. Le risposte devono essere motivate. Consultare il docente SOLO in caso di dubbi sul testo.

(1) Sia $f(x,y) = x^2y - xy^2 + 9x$.

a) Determinare i punti stazionari di f in $\mathbb{R}$ e stabilirne la natura.

b) Determinare, se esistono, il massimo assoluto e il minimo assoluto di f su $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ xy = 1, \ x > 0\}$.

8 punti

Risposta: (a) $(0, \pm 3)$ punti di sella

(b) $\nexists \max_{\Gamma} f$, $\nexists \min_{\Gamma} f$

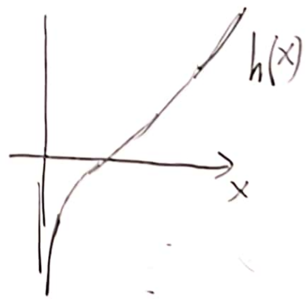
Svolgimento:

(a)
$$\begin{cases} f_x = 2xy - y^2 + 9 \overset{!}{=} 0 \\ f_y = x^2 - 2xy = x(x-2y) \overset{!}{=} 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \pm 3 \\ x = 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} 4y^2 - y^2 + 9 = 0 \quad \text{impossibile} \\ x = 2y \end{cases}$$

$$D^2 f = \begin{pmatrix} 2y & 2x - 2y \\ 2x - 2y & -2x \end{pmatrix} \qquad D^2 f(0, \pm 3) = \begin{pmatrix} \pm 6 & \mp 6 \\ \mp 6 & 0 \end{pmatrix}$$ punti di sella

(b) $f|_{\Gamma} = x - y + 9x = 10x - \frac{1}{x} =: h(x)$



$h'(x) = 10 + \frac{1}{x^2} > 0 \quad \forall x > 0$

h derivabile in $(0, +\infty)$ aperto

$\Rightarrow \nexists \max_{(0,+\infty)} h$, $\min_{(0,+\infty)} h$

(2) Sia $\Sigma^+ = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = 1 - x^2 - y^2, \ z \geq -1\}$, orientata in modo che $\mathbf{N}^+ \cdot \mathbf{e}_3 \geq 0$, e sia $\mathbf{V}(x,y,z) = (y, x, -2z)$.

(a) Calcolare il flusso di $\mathbf{V}$ attraverso Σ^+.

(b) Calcolare la circuitazione di $\mathbf{V}$ lungo $\partial\Sigma^+$.

$\boxed{\text{8 punti}}$

Risposta: (a) 0

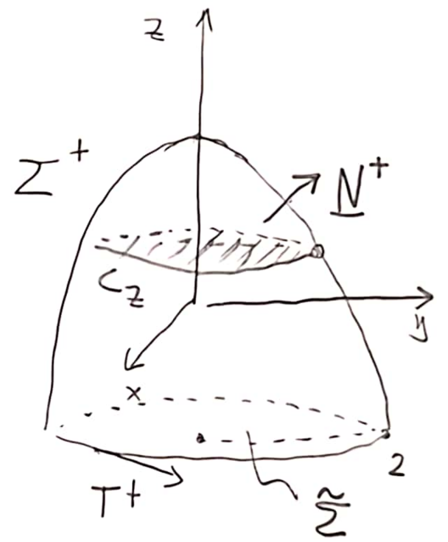
(b) 0

Svolgimento:

(a) Calcolo diretto (controllare!)

oppure:

$$\Omega = \{-1 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2\}$$



$$\iint_{\Sigma} \underline{V} \cdot \underline{N}^+ \, dS = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \underline{V} - \iint_{\tilde{\Sigma}} \underline{V} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} dS$$

$$\operatorname{div} \underline{V} = -2$$

$$\iiint_{\Omega} -2 \underset{\text{per strati}}{=} -2 \int_{-1}^{1} \left(\iint_{C_z} dx\,dy \right) dz = -2 \int_{-1}^{1} |C_z|_2 \, dz = -2 \int_{-1}^{1} \pi(1-z)\,dz$$

$$C_z = \{x^2 + y^2 \leq 1 - z\} \qquad = -\pi(1-z)^2 \Big|_{-1}^{1} = -4\pi$$

$$\iint_{\tilde{\Sigma}} \underline{V} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} dS = \iint_{\tilde{\Sigma}} -2 \, dS = -2 |\tilde{\Sigma}|_2 = -4\pi$$

(b) $$\int_{\partial\Sigma} \underline{V} \cdot \underline{T}^+ \, ds = \int_{\partial\Sigma^+} \underline{V} \cdot d\underline{x} = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \sqrt{2}\sin\varphi \\ \sqrt{2}\cos\varphi \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{2}\sin\varphi \\ \sqrt{2}\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} d\varphi$$

$x = \sqrt{2}\cos\varphi$

$y = \sqrt{2}\sin\varphi$

$z = -1$

$$= 0$$

oppure teorema del rotore (controllare!)

(3) Risolvere il seguente problema di Cauchy, determinando anche l'intervallo massimale di esistenza della soluzione:

$$\begin{cases} y''(x) = -e^{-2y(x)} \\ y(2) = 0, \quad y'(2) = 1 \ . \end{cases}$$

8 punti

Risposta: $y(x) = \log(x-1)$, $I = (1, +\infty)$

Svolgimento:

EDO autonoma (oppure, più semplicemente, si moltiplica per y': controllate)

$v(y) = y'(x(y))$ $\quad v'(y) = y''(x(y)) \cdot x'(y) = \dfrac{y''(x(y))}{v(y)}$

$v'(y) = -\dfrac{e^{-2y}}{v(y)}$ $\quad vv' = -e^{-2y}$

$\boxed{v(0)=1}$

$\int vv'\,dy = -\int e^{-2y}\,dy$

$v^2 = e^{-2y} + C \underset{v(0)=1}{\Longrightarrow} C = 0$

$v = \pm e^{-y}$

$v(0) = 1 \Rightarrow v(y) = +e^{-y}$

$y' = e^{-y}$ $\quad e^{y} y' = 1$ $\quad e^{y(x)} = x + C$

$y(2) = 0 \Rightarrow 1 = 2 + C$

$C = -1$

$y(x) = \log(x-1)$ $\quad x > 1$