

Corsi di Metodi Numerici e Calcolo Numerico
(Lauree Triennale e Specialistica in Ingegneria)

PROBLEMI AI LIMITI PER
EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE

Prof. F. Pitolli, A.A 2007-2008

1 Problemi ai limiti

Molti problemi applicativi danno luogo a modelli matematici in cui le grandezze che intervengono dipendono dalla posizione piuttosto che dal tempo. Nel caso di problemi differenziali il modello richiede allora di imporre *condizioni al bordo*, cioè condizioni imposte in più punti, invece che condizioni iniziali.

Esempio

Un problema comune in ingegneria civile riguarda la deflessione di una trave di sezione rettangolare soggetta a un carico uniforme mentre gli estremi della trave sono fissi. Il problema è descritto dall'equazione differenziale non lineare

$$[1 + (w'(x))^2]^{-3/2} \frac{d^2w}{dx^2} = \frac{S}{EI} w(x) + \frac{qx}{2EI} (x - l), \quad 0 < x < l,$$

dove $w(x)$ è la deflessione, x è la distanza dall'estremo sinistro della trave, l , q , E , S e I rappresentano, rispettivamente, la lunghezza della trave, l'intensità del carico, il modulo di elasticità, la tensione agli estremi della trave e il momento principale di inerzia.

All'equazione differenziale sono associate le condizioni al bordo

$$w(0) = w(l) = 0.$$

Se si trascurano i termini del secondo ordine il problema differenziale diventa lineare

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{S}{EI} w(x) + \frac{qx}{2EI} (x - l), \quad 0 < x < l,$$

e si può risolvere esattamente quando la sbarra ha spessore uniforme in quanto il prodotto EI è costante. In molte applicazioni però lo spessore non è uniforme quindi il momento di inerzia I è una funzione di x e per risolvere il problema bisogna ricorrere a metodi numerici.

Considereremo qui metodi numerici per la soluzione di problemi differenziali del secondo ordine del tipo

$$y'' = f(x, y, y'), \quad a < x < b, \quad (1.1)$$

con condizioni al bordo

$$y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta. \quad (1.2)$$

Teorema 1.1. *Assumiamo che $f(x, y, z)$ soddisfi le ipotesi seguenti:*

i) f e le sue derivate parziali $f_y \equiv \frac{\partial f}{\partial y}$ e $f_z \equiv \frac{\partial f}{\partial z}$ sono continue in $D = \{(x, y, z) | a \leq x \leq b, -\infty < y, z < \infty\}$;

ii) $f_y(x, y, z) > 0$ in D ;

iii) esistono due costanti K e L tali che

$$K = \max_{(x,y,z) \in D} f_y(x, y, z), \quad L = \max_{(x,y,z) \in D} |f_z(x, y, z)|.$$

Allora la soluzione del problema differenziale ai limiti (1.1)-(1.2) esiste ed è unica.

Se $f(x, y, y')$ ha la forma

$$f(x, y, y') = p(x) y'(x) + q(x) y(x) - r(x),$$

il problema differenziale (1.1)-(1.2) si riduce al problema lineare

$$\begin{cases} y'' = p(x) y' + q(x) y - r(x), & a < x < b, \\ y(a) = \alpha, & y(b) = \beta. \end{cases} \quad (1.3)$$

Corollario 1.2. *Assumiamo che*

i) $p(x)$, $q(x)$ e $r(x)$ siano continue in $[a, b]$;

ii) $q(x) > 0$ per $x \in [a, b]$.

Allora, la soluzione del problema differenziale ai limiti (1.3) esiste ed è unica.

Nel seguito faremo uso dell'operatore differenziale non lineare

$$\mathcal{L}y := -y'' + f(x, y, y'), \quad (1.4)$$

e dell'operatore differenziale lineare

$$\mathcal{K}y := -y'' + p(x) y' + q(x) y. \quad (1.5)$$

Allora l'equazione differenziale (1.1) può essere scritta come

$$\mathcal{L}y = 0. \quad (1.6)$$

mentre l'equazione differenziale lineare in (1.3) diventa

$$\mathcal{K}y = r(x). \quad (1.7)$$

2 Metodi alle differenze finite

I *metodi alle differenze finite* consistono nell'approssimare ciascuna derivata nelle equazioni differenziali (1.1) o (1.3) con una opportuna formula alle differenze finite.

Prima di tutto introduciamo una *discretizzazione* dell'intervallo $[a, b]$ dividendolo in $N + 1$ sottointervalli uguali, cioè introduciamo i *nodi equispaziati*

$$x_i = a + ih, \quad i = 0, 1, \dots, N + 1, \quad h = \frac{b - a}{N + 1}. \quad (2.1)$$

Nei nodi *interni* x_i , $i = 1, \dots, N$, l'equazione differenziale (1.1) diventa

$$\mathcal{L}y(x_i) = -y''(x_i) + f(x_i, y(x_i), y'(x_i)) = 0; \quad (2.2)$$

nel caso lineare, la (1.3) diventa

$$\mathcal{L}y(x_i) = -y''(x_i) + p(x_i)y'(x_i) + q(x_i)y(x_i) = r(x_i). \quad (2.3)$$

Per risolvere numericamente i problemi differenziali (2.2) e (2.3) è necessario approssimare sia $y'(x_i)$ che $y''(x_i)$. L'approssimazione viene scelta in modo che sia garantito uno specifico ordine nell'errore di troncamento.

Supponendo che $y \in C^3[x_{i-1}, x_{i+1}]$, si può ricorrere allo sviluppo in serie di Taylor di ordine 2 per approssimare $y(x_{i+1})$ e $y(x_{i-1})$:

$$\begin{aligned} y(x_{i+1}) &= y(x_i + h) = y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{1}{2!}h^2y''(x_i) + \frac{1}{3!}h^3y'''(\eta_i^+), \\ &\hspace{15em} \eta_i^+ \in (x_i, x_{i+1}), \\ y(x_{i-1}) &= y(x_i - h) = y(x_i) - hy'(x_i) + \frac{1}{2!}h^2y''(x_i) - \frac{1}{3!}h^3y'''(\eta_i^-), \\ &\hspace{15em} \eta_i^- \in (x_{i-1}, x_i). \end{aligned}$$

Sottraendo la seconda equazione alla prima e usando il teorema della media si ha

$$y'(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1}))}{2h} - \frac{h^2}{6}y^{(3)}(\eta_i), \quad \eta_i \in (x_{i-1}, x_{i+1}). \quad (2.4)$$

Questa è la formula alle *differenze finite centrate* per $y'(x_i)$ e ha *errore di troncamento*

$$\tau(x_i, y(x_i); h; f) = -\frac{h^2}{6}y^{(3)}(\eta_i) = O(h^2). \quad (2.5)$$

Per approssimare $y''(x_i)$ si utilizza lo sviluppo in serie di Taylor di ordine 3, purché $y \in$

$C^4[x_{i-1}, x_{i+1}]$:

$$\begin{aligned}
y(x_{i+1}) = y(x_i + h) &= y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{1}{2!}h^2y''(x_i) + \frac{1}{3!}h^3y'''(x_i) + \\
&+ \frac{1}{4!}h^4y^{(4)}(\xi_i^+), \quad \xi_i^+ \in (x_i, x_{i+1}), \\
y(x_{i-1}) = y(x_i - h) &= y(x_i) - hy'(x_i) + \frac{1}{2!}h^2y''(x_i) - \frac{1}{3!}h^3y'''(x_i) + \\
&+ \frac{1}{4!}h^4y^{(4)}(\xi_i^-), \quad \xi_i^- \in (x_{i-1}, x_i).
\end{aligned}$$

Sommando le due equazioni e usando il teorema della media si ha

$$y''(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1}))}{h^2} - \frac{h^2}{12}y^{(4)}(\xi_i), \quad \xi_i \in (x_{i-1}, x_{i+1}). \quad (2.6)$$

Questa è la formula alle *differenze finite centrate* per $y''(x_i)$ e ha *errore di troncamento*

$$\tau(x_i, y(x_i); h; f) = -\frac{h^2}{12}y^{(4)}(\xi_i) = O(h^2). \quad (2.7)$$

2.1 Metodo alle differenze finite non lineari

Sostituendo le formule alle differenze finite centrate (2.4) e (2.6) nell'equazione (2.2) si ha

$$\begin{aligned}
-\frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1}))}{h^2} + f\left(x_i, y(x_i), \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1}))}{2h} - \right. \\
\left. -\frac{h^2}{6}y^{(3)}(\eta_i)\right) + \frac{h^2}{12}y^{(4)}(\xi_i) = 0.
\end{aligned} \quad (2.8)$$

Il *metodo alle differenze finite non lineare* si ottiene trascurando nella (2.8), che è una relazione esatta, gli errori di troncamento (2.5) e (2.7), dovuti alle formule alle differenze finite, e aggiungendo le condizioni al bordo (1.2). Se con y_i indichiamo l'approssimazione di $y(x_i)$ si ha

$$\begin{cases} y_0 = \alpha, & y_{N+1} = \beta, \\ -\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + f\left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}\right) = 0, & i = 1, 2, \dots, N. \end{cases} \quad (2.9)$$

Confrontando la (2.14) con la (2.8) si ha

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}_h y_e)_i &= -f \left(x_i, y(x_i), \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1}))}{2h} - \frac{h^2}{6} y^{(3)}(\eta_i) \right) - \frac{h^2}{12} y^{(4)}(\xi_i) + \\
&+ f \left(x_i, y(x_i), \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1}))}{2h} \right) = \\
&= f_z(x_i, y(x_i), \zeta_i) \frac{h^2}{6} y'''(\eta_i) - \frac{h^2}{12} y^{(4)}(\xi_i),
\end{aligned} \tag{2.15}$$

dove, nell'ultima uguaglianza, si è utilizzato lo sviluppo in serie di Taylor di

$$f \left(x_i, y(x_i), \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1}))}{2h} - \frac{h^2}{6} y^{(3)}(\eta_i) \right)$$

nella terza variabile con punto iniziale $\frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1}))}{2h}$; ζ_i è un valore incognito compreso tra $y'(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1}))}{2h} - \frac{h^2}{6} y^{(3)}(\eta_i)$ e $\frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1}))}{2h}$.

In ciascun nodo, l'errore di troncamento dello schema numerico è definito come la differenza tra l'operatore differenziale esatto $\mathcal{L}y$ calcolato nel nodo x_i e l'operatore differenziale discreto applicato alla soluzione esatta $(\mathcal{L}_h y_e)_i$:

$$R(x_i, y(x_i); h; f) = (\mathcal{L}y)(x_i) - (\mathcal{L}_h y_e)_i. \tag{2.16}$$

Utilizzando la relazione esatta (2.8), l'operatore differenziale esatto può essere scritto come

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}y)(x_i) &= -y''(x_i) + f(x_i, y(x_i), y'(x_i)) = -\frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1}))}{h^2} + \\
&+ f \left(x_i, y(x_i), \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1}))}{2h} - \frac{h^2}{6} y'''(\eta_i) \right) + \frac{h^2}{12} y^{(4)}(\xi_i),
\end{aligned} \tag{2.17}$$

da cui segue che l'errore di troncamento vale

$$R(x_i, y(x_i); h; f) = -f_z(x_i, y(x_i), \zeta_i) \frac{h^2}{6} y'''(\eta_i) + \frac{h^2}{12} y^{(4)}(\xi_i) = -(\mathcal{L}_h y_e)_i, \tag{2.18}$$

dove η_i e ξ_i sono due punti incogniti nell'intervallo $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ e ζ_i è, di nuovo, un valore incognito compreso tra $y'(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1}))}{2h} - \frac{h^2}{6} y^{(3)}(\eta_i)$ e $\frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1}))}{2h}$.

Poiché $R(x_i, y(x_i); h; f) = O(h^2)$, il metodo è *consistente* e del *secondo ordine*; inoltre è esatto per tutti i polinomi di grado ≤ 2 .

Per quanto riguarda la stabilità, nel caso di operatori discreti non lineari si può dare la seguente definizione.

Definizione 2.1. Uno schema alle differenze finite non lineare è detto stabile se, date due funzioni discrete $v = \{v_i\}_{i=1}^N$ e $u = \{u_i\}_{i=1}^N$, definite sulla discretizzazione (2.1), esiste una costante M tale che

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq i \leq N+1} |v_i - u_i| &\leq M \left\{ \max(|v_0 - u_0|, |v_{N+1} - u_{N+1}|) + \right. \\ &\left. + \max_{1 \leq i \leq N} |(\mathcal{L}_h v)_i - (\mathcal{L}_h u)_i| \right\}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

La stabilità è una proprietà dello schema numerico e rappresenta la capacità dello schema di non amplificare "troppo" le perturbazioni. Infatti, se con $\{y_i\}_{i=1}^N$ indichiamo la soluzione del problema discreto (2.13), e con $\{v_i\}_{i=1}^N$ la soluzione di un problema discreto perturbato $(\mathcal{L}_h v)_i = \epsilon_i$ con condizioni al bordo $v_0 = y(x_0) + \epsilon_0$ e $v_{N+1} = y(x_{N+1}) + \epsilon_{N+1}$, dalla disuguaglianza (2.19) si deduce che

$$\max_{0 \leq i \leq N+1} |y_i - v_i| \leq M \left\{ \max(|\epsilon_0|, |\epsilon_{N+1}|) + \max_{1 \leq i \leq N} |\epsilon_i| \right\}, \quad (2.20)$$

cioè la perturbazione sulla soluzione si mantiene limitata.

Per lo schema alle differenze finite non lineari vale il teorema seguente.

Teorema 2.1. Siano $L = \max_{(x,y,z) \in D} |f_z(x,y,z)|$ e $0 < Q = \min_{(x,y,z) \in D} f_y(x,y,z)$. Se $hL \leq 2$, allora lo schema alle differenze finite non lineari (2.13) è stabile con $M = \max(1, 1/Q)$.

La consistenza e la stabilità implicano la *convergenza* dello schema alle differenze finite.

La stabilità fornisce anche una limitazione dell'errore globale. Infatti utilizzando nella disuguaglianza (2.19) le funzioni discrete $\{y(x_i)\}_{i=1}^N$ e $\{y_i\}_{i=1}^N$ e tenendo conto di (2.13) e (2.18) si ottiene

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq i \leq N+1} |e_i| &= \max_{0 \leq i \leq N+1} |y(x_i) - y_i| \leq \\ &\leq M \max_{1 \leq i \leq N} |(\mathcal{L}_h y_e)_i - (\mathcal{L}_h y_d)_i| = M \max_{1 \leq i \leq N} |R(x_i, y(x_i); h; f)|. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Infine, se valgono le ipotesi del Teorema 1.1 e se $hL \leq 2$, il sistema non lineare (2.10) ha un'unica soluzione.

La soluzione discreta $Y = [y_1, y_2, \dots, y_N]^T$ può essere approssimata con il *metodo di Newton* che consiste nel generare una successione di approssimazioni $\{[y_1^{(k)}, y_2^{(k)}, \dots, y_N^{(k)}]^T\}$, $k = 1, 2, \dots$. Se l'approssimazione iniziale $[y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots, y_N^{(0)}]^T$ è abbastanza vicina alla soluzione e la matrice Jacobiana del sistema è regolare, allora la successione delle approssimazioni converge alla soluzione esatta.

La matrice Jacobiana $J(y_1, \dots, y_n)$ del sistema (2.10) è tridiagonale con elementi

$$[J(y_1, \dots, y_n)]_{ij} = \begin{cases} -1 + \frac{h}{2} f_z \left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} \right), & j = i + 1, i = 1, \dots, N - 1, \\ 2 + h^2 f_y \left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} \right), & j = i, i = 1, \dots, N, \\ -1 - \frac{h}{2} f_z \left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} \right), & j = i - 1, i = 2, \dots, N, \end{cases}$$

dove $y_0 = \alpha$ e $y_{N+1} = \beta$.

L'algoritmo del metodo di Newton è il seguente:

$$\begin{aligned} & Y^{(0)} \quad \text{dato} \\ & \begin{cases} J(y_1^{(k)}, \dots, y_n^{(k)}) V = B^{(k)}, \\ Y^{(k+1)} = Y^{(k)} + V, \end{cases} \quad k = 0, 1, \dots, \end{aligned}$$

dove $Y^{(k)} = [y_1^{(k)}, y_2^{(k)}, \dots, y_N^{(k)}]^T$ e

$$\begin{aligned} B^{(k)} = - \left[\begin{array}{l} 2y_1^{(k)} - y_2^{(k)} - \alpha + h^2 f \left(x_1, y_1^{(k)}, \frac{y_2^{(k)} - \alpha}{2h} \right), \\ -y_1^{(k)} + 2y_2^{(k)} - y_3^{(k)} + h^2 f \left(x_2, y_2^{(k)}, \frac{y_3^{(k)} - y_1^{(k)}}{2h} \right), \dots \\ \dots, -y_{N-2}^{(k)} + 2y_{N-1}^{(k)} - y_N^{(k)} + h^2 f \left(x_{N-1}, y_{N-1}^{(k)}, \frac{y_N^{(k)} - y_{N-2}^{(k)}}{2h} \right), \\ -y_{N-1}^{(k)} + 2y_N^{(k)} - \beta + h^2 f \left(x_N, y_N^{(k)}, \frac{\beta - y_{N-1}^{(k)}}{2h} \right) \end{array} \right]^T. \end{aligned}$$

Quindi ad ogni iterazione bisogna risolvere un sistema lineare tridiagonale, ad esempio con il metodo di Thomas che non ha un costo computazionale elevato.

L'approssimazione iniziale $Y^{(0)}$ può essere ottenuta approssimando i valori $y(x_i)$ con le ascisse della retta che congiunge i punti (a, α) e (b, β) , cioè ponendo

$$y_i^{(0)} = \alpha + i \left(\frac{\beta - \alpha}{b - a} \right) h, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Osserviamo che, anche se l'approssimazione può essere migliorata riducendo il passo h , non conviene sceglierlo troppo piccolo a causa dell'instabilità che si produce nell'approssimare le derivate con le differenze finite.

si applica avendo le tre approssimazioni con passo h , $h/2$ e $h/4$:

$$\text{Prima estrapolazione: } y_i^{E_1} = \frac{4y_i^{(h/2)} - y_i^{(h)}}{3}, \quad i = 1, \dots, N,$$

$$\text{Seconda estrapolazione: } y_i^{E_2} = \frac{4y_i^{(h/4)} - y_i^{(h/2)}}{3}, \quad i = 1, \dots, N,$$

$$\text{Estrapolazione finale: } y_i^{E_3} = \frac{16y_i^{E_2} - y_i^{E_1}}{15}, \quad i = 1, \dots, N.$$

Utilizzando come passo iniziale $h = 0.1$, l'approssimazione $y_i^{E_3}$ ha un errore massimo di $3.68 \cdot 10^{-10}$.

i	x_i	y_i	$y(x_i)$	$ y(x_i) - y_i $
0	1.0	17.000000	17.000000	
1	1.1	15.754503	15.755455	9.520×10^{-4}
2	1.2	14.771740	14.773333	1.594×10^{-3}
3	1.3	13.995677	13.997692	2.015×10^{-3}
4	1.4	13.386297	13.388571	2.275×10^{-3}
5	1.5	12.914252	12.916667	2.414×10^{-3}
6	1.6	12.557538	12.560000	2.462×10^{-3}
7	1.7	12.299326	12.301765	2.438×10^{-3}
8	1.8	12.126529	12.128889	2.360×10^{-3}
9	1.9	12.028814	12.031053	2.239×10^{-3}
10	2.0	11.997915	12.000000	2.085×10^{-3}
11	2.1	12.027142	12.029048	1.905×10^{-3}
12	2.2	12.111020	12.112727	1.707×10^{-3}
13	2.3	12.245025	12.246522	1.497×10^{-3}
14	2.4	12.425388	12.426667	1.278×10^{-3}
15	2.5	12.648944	12.650000	1.056×10^{-3}
16	2.6	12.913013	12.913846	8.335×10^{-3}
17	2.7	13.215312	13.215926	6.142×10^{-4}
18	2.8	13.553885	13.554286	4.006×10^{-4}
19	2.9	13.927046	13.927241	1.953×10^{-4}
20	3.0	14.333333	14.333333	

2.2 Metodo alle differenze finite lineari

Sostituendo le formule alle differenze finite centrate (2.4) e (2.6) nell'equazione lineare (2.3) si ha

$$\begin{aligned} & -\frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1}))}{h^2} + p(x_i) \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1}))}{2h} + q(x_i)y(x_i) + \\ & -\frac{h^2}{12}[2p(x_i)y^{(3)}(\eta_i) - y^{(4)}(\tau_i)] = r(x_i), \end{aligned} \quad (2.22)$$

che da luogo allo *schema alle differenze finite lineare*

$$\begin{cases} y_0 = \alpha, & y_{N+1} = \beta, \\ -\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p(x_i)\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q(x_i)y_i = r(x_i), & i = 1, 2, \dots, N. \end{cases}$$

In modo analogo a quanto fatto nel caso non lineare, definiamo l'*operatore differenziale discreto* (lineare) che agisce sulla funzione discreta $y_d = \{y_i\}_{i=0}^{N+1}$:

$$(\mathcal{K}_h y_d)_i = -\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p(x_i)\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q(x_i)y_i, \quad (2.23)$$

cosicché lo schema numerico diventa

$$\begin{cases} y_0 = \alpha, & y_{N+1} = \beta, \\ (\mathcal{K}_h y_d)_i = r(x_i), & i = 1, 2, \dots, N. \end{cases} \quad (2.24)$$

Se con $(\mathcal{K}_h y_e)_i$ indichiamo l'operatore discreto che agisce sulla soluzione esatta discreta $y_e = \{y(x_i)\}_{i=0}^{N+1}$, cioè

$$\begin{aligned} (\mathcal{K}_h y_e)_i &= -\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p(x_i)\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q(x_i)y_i = \\ &= \frac{h^2}{12}[2p(x_i)y^{(3)}(\eta_i) - y^{(4)}(\xi_i)], \end{aligned} \quad (2.25)$$

allora l'errore di troncamento dello schema numerico è dato da

$$\begin{aligned} R(x_i, y(x_i); h; f) &= (\mathcal{K} y)(x_i) - (\mathcal{K}_h y_e)_i = \\ &= -\frac{h^2}{12}[2p(x_i)y'''(\eta_i) - y^{(4)}(\xi_i)] = r(x_i) - (\mathcal{K}_h y_e)_i. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Poiché $R(x_i, y(x_i); h; f) = O(h^2)$, il metodo alle differenze finite lineare è *consistente* e del *secondo ordine*; inoltre è esatto per tutti i polinomi di grado ≤ 2 .

Definizione 2.2. *Uno schema alle differenze finite lineare è detto stabile se, data una funzione discreta $v = \{v_i\}_{i=0}^{N+1}$, definita sulla discretizzazione (2.1), esiste una costante M tale che*

$$\max_{0 \leq i \leq N+1} |v_i| \leq M \left\{ \max(|v_0|, |v_{N+1}|) + \max_{1 \leq i \leq N} |(\mathcal{K}_h v)_i| \right\}. \quad (2.27)$$

Teorema 2.2. *Siano $L = \max_{a \leq x \leq b} |p(x)|$ e $0 < Q = \min_{a \leq x \leq b} q(x)$. Se $hL \leq 2$, allora lo schema alle differenze finite lineari è stabile con $M = \max(1, 1/Q)$.*

La consistenza e la stabilità implicano la *convergenza* dello schema lineare e inoltre per l'errore globale di troncamento si ha la limitazione

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq i \leq N+1} |e_i| &= \max_{0 \leq i \leq N+1} |y(x_i) - y_i| \leq \\ &\leq M \max_{1 \leq i \leq N} |(\mathcal{K}_h y_e)_i - (\mathcal{K}_h y_d)_i| = M \max_{1 \leq i \leq N} |R(x_i, y(x_i); h; f)|. \end{aligned} \quad (2.28)$$

In questo caso la soluzione approssimata $Y = [y_1, y_2, \dots, y_N]^T$ si ottiene risolvendo il *sistema lineare* tridiagonale di N equazioni in N incognite

$$AY = B,$$

dove

$$A = \begin{bmatrix} 2 + h^2 q(x_1) & -1 + \frac{h}{2} p(x_1) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 - \frac{h}{2} p(x_2) & 2 + h^2 q(x_2) & -1 + \frac{h}{2} p(x_2) & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & -1 - \frac{h}{2} p(x_{N-1}) & 2 + h^2 q(x_{N-1}) & -1 + \frac{h}{2} p(x_{N-1}) \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 - \frac{h}{2} p(x_N) & 2 + h^2 q(x_N) \end{bmatrix}$$

e

$$B = \left[h^2 r(x_1) + \left(1 + \frac{h}{2} p(x_1) \right) \alpha, h^2 r(x_2), \dots, h^2 r(x_{N-1}), h^2 r(x_N) + \left(1 - \frac{h}{2} p(x_N) \right) \beta \right]^T.$$

Se valgono le ipotesi del Teorema 2.2, il sistema tridiagonale ammette un'unica soluzione purché $h K \leq 2$.

Esempio 2.2

Consideriamo il problema ai limiti lineare

$$\begin{cases} y'' = \frac{2}{x} y' - \frac{2}{x^2} y + \frac{\sin(\log x)}{x}, & 1 \leq x \leq 2, \\ y(1) = 1, & y(2) = 2, \end{cases}$$

la cui soluzione esatta è

$$y(x) = \frac{x}{2}(4 - x) - x(1 - x) \left(\cos(\log 2) + \sin(\log 2) \right) - \frac{x^2}{2} \left(\cos(\log x) + \sin(\log x) \right).$$

Applicando il metodo alle differenze finite lineare si ottiene il sistema lineare tridiagonale

$$\begin{bmatrix} 2 - h^2 \frac{2}{x_1^2} & -1 + \frac{h}{2} \frac{2}{x_1} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 - \frac{h}{2} \frac{2}{x_2} & 2 - h^2 \frac{2}{x_2^2} & -1 + \frac{h}{2} \frac{2}{x_2} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & -1 - \frac{h}{2} \frac{2}{x_8} & 2 - h^2 \frac{2}{x_8^2} & -1 + \frac{h}{2} \frac{2}{x_8} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 - \frac{h}{2} \frac{2}{x_9} & 2 - h^2 \frac{2}{x_9^2} \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} h^2 \frac{\sin(\log x_1)}{x_1} + \left(1 + \frac{h}{2} \frac{2}{x_1} \right) \alpha \\ h^2 \frac{\sin(\log x_2)}{x_2} \\ \vdots \\ h^2 \frac{\sin(\log x_8)}{x_8} \\ h^2 \frac{\sin(\log x_9)}{x_9} + \left(1 - \frac{h}{2} \frac{2}{x_9} \right) \beta \end{bmatrix}$$

che può essere risolto con il metodo di Thomas. I risultati ottenuti sono riportati nella tabella di seguito.

Anche in questo caso si può utilizzare l'estrapolazione di Richardson per migliorare l'approssimazione.

i	x_i	y_i	$y(x_i)$	$ y_i - y(x_i) $
0	1.0	1.00000000	1.00000000	
1	1.1	1.08997132	1.09007246	1.01×10^{-4}
2	1.2	1.17916606	1.17935628	1.90×10^{-4}
3	1.3	1.26868985	1.26895130	2.61×10^{-4}
4	1.4	1.35967879	1.35998932	3.10×10^{-4}
5	1.5	1.45328006	1.45361424	3.34×10^{-4}
6	1.6	1.55063840	1.55096828	3.30×10^{-4}
7	1.7	1.65288668	1.65318237	2.96×10^{-4}
8	1.8	1.76113946	1.76136954	2.30×10^{-4}
9	1.9	1.87648855	1.87662038	1.32×10^{-4}
10	2.0	2.00000000	2.00000000	

3 Metodi agli elementi finiti

Abbiamo visto che nei metodi alle differenze finite si approssima la soluzione del problema ai limiti sostituendo l'operatore di differenziazione continuo con un operatore discreto alle differenze finite. I metodi agli elementi finiti seguono un approccio diverso. Per prima cosa il problema differenziale viene riscritto in *forma variazionale* in modo che la soluzione sia quella che minimizza un opportuno operatore integrale (*metodo di Rayleigh-Ritz*) oppure quella che soddisfa un'equazione variazionale (*metodo di Galerkin*). La soluzione viene quindi approssimata con polinomi a tratti, detti appunto *elementi finiti*, si cerca cioè un'approssimazione in uno spazio funzionale di dimensione finita.

Come *problema modello*, considereremo il problema differenziale lineare ai limiti

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy}{dx} \right) + q(x)y = f(x), & 0 < x < 1, \\ y(0) = y(1) = 0, \end{cases} \quad (3.1)$$

che descrive la deflessione $y(x)$ di una sbarra sottile di lunghezza 1 con sezione variabile $q(x)$. La deflessione è dovuta alle forze esterne $p(x)$ e $f(x)$.

Assumeremo che $p \in C^1([0, 1])$ e $q, f \in C([0, 1])$ e che esista una costante δ tale che

$$p(x) \geq \delta > 0 \quad \text{e che} \quad q(x) \geq 0 \quad \text{per} \quad x \in [0, 1].$$

Queste condizioni sono sufficienti a garantire che il problema differenziale ai limiti (3.1) abbia un'unica soluzione $y \in C_0^2([0, 1])$, dove

$$C_0^2([0, 1]) = \{u \in C^2([0, 1]); u(0) = u(1) = 0\}.$$

Come succede in molti problemi ai limiti che descrivono fenomeni fisici, la soluzione dell'equazione della sbarra soddisfa *principi variazionali*, che possono essere la *minimizzazione di un funzionale dell'energia* oppure il *principio dei lavori virtuali*.

Teorema 3.1. Siano $p \in C^1([0, 1])$, q e $f \in C([0, 1])$ ed esista una costante $\delta > 0$ tale che $p(x) \geq \delta$ e, inoltre, $q(x) \geq 0$ per $x \in [0, 1]$. La funzione $y \in C_0^2([0, 1])$ è l'unica soluzione dell'equazione differenziale

$$-\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy}{dx} \right) + q(x)y = f(x), \quad 0 < x < 1, \quad (3.2)$$

con condizioni al bordo

$$y(0) = y(1) = 0, \quad (3.3)$$

se e solo se è l'unica funzione in $C_0^2([0, 1])$ che minimizza l'integrale

$$I[u] = \int_0^1 \left\{ p(x)[u'(x)]^2 + q(x)[u(x)]^2 - 2f(x)u(x) \right\} dx. \quad (3.4)$$

o, equivalentemente, che soddisfa l'equazione variazionale

$$\int_0^1 \left\{ p(x)y'(x)u'(x) + q(x)y(x)u(x) \right\} dx = \int_0^1 f(x)u(x) dx, \quad (3.5)$$

dove $u \in C^1([0, 1])$ con $u(0) = u(1) = 0$.

L'integrale $I[u]$ rappresenta l'energia del sistema, quindi la soluzione y è quella che minimizza l'energia; la forma variazionale (3.5) invece è il principio dei lavori virtuali.

Quando la soluzione y è sufficientemente regolare, allora le tre formulazioni del problema sono equivalenti e si può scegliere quella che si ritiene più conveniente dal punto di vista numerico. Poiché la regolarità della soluzione dipende dal dato f , è sufficiente che f sia continua perché $y \in C^2([0, 1])$.

D'altra parte, la formulazione variazionale, sia in termini di energia che attraverso il principio dei lavori virtuali, ha senso anche quando il dato f è meno regolare (per esempio, costante a tratti oppure concentrato in alcuni punti): in questi casi il problema fisico viene formulato direttamente nella forma variazionale, mentre la forma differenziale perde di significato. Osserviamo che le formulazioni variazionali (3.4) e (3.5) sono definite sotto ipotesi meno restrittive sulla y , infatti è sufficiente che $y \in C_0([0, 1])$ e y' sia continua a tratti perché gli integrali abbiano senso.

La soluzione del problema differenziale (3.1) appartiene allo spazio di dimensione infinita $C_0^2([0, 1])$. Nel *metodo degli elementi finiti* si approssima la soluzione in uno spazio V_N di dimensione finita N . Se le funzioni $\{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N\}$ formano una *base* in V_N , l'approssimazione y_N di V_N può essere scritta nella forma

$$y_N(x) = \gamma_1\psi_1(x) + \gamma_2\psi_2(x) + \dots + \gamma_N\psi_N(x).$$

Le funzioni ψ_j , $j = 1, 2, \dots, N$, sono chiamate *funzioni prova* (*trial functions*), e sono usualmente famiglie di polinomi ortogonali (Chebyshev, Legendre, Lagrange), funzioni splines oppure funzioni trigonometriche. I parametri γ_j , $j = 1, 2, \dots, N$, detti *gradi di libertà*, sono le incognite del problema.

I coefficienti incogniti γ_j , $j = 1, 2, \dots, N$, vengono determinati imponendo che y_N soddisfi il principio del minimo dell'energia (metodo di Rayleigh-Ritz) oppure il principio dei lavori virtuali (metodo di Galerkin).

3.1 Metodo di Rayleigh-Ritz

Nel *metodo di Rayleigh-Ritz* le incognite γ_j , $j = 1, \dots, N$, vengono determinate minimizzando l'integrale (3.4) non su tutte le funzioni $u \in C_0^2([0, 1])$, ma sull'insieme più piccolo di funzioni che appartengono allo spazio V_N . In altre parole, l'approssimazione $y_N(x)$ di y si ottiene trovando i valori di γ_j , $j = 1, \dots, N$, che minimizzano l'integrale $I \left[\sum_{j=1}^N \gamma_j \psi_j \right]$.

Dall'equazione (3.4) si ha

$$\begin{aligned} I[y_N] &= I \left[\sum_{j=1}^N \gamma_j \psi_j \right] = \\ &= \int_0^1 \left\{ p(x) \left[\sum_{j=1}^N \gamma_j \psi_j'(x) \right]^2 + q(x) \left[\sum_{j=1}^N \gamma_j \psi_j(x) \right]^2 - 2f(x) \left[\sum_{j=1}^N \gamma_j \psi_j(x) \right] \right\} dx. \end{aligned}$$

Affinché I , come funzione di $\gamma_1, \dots, \gamma_N$, abbia un minimo deve essere

$$\frac{\partial I}{\partial \gamma_k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N,$$

quindi

$$\frac{\partial I}{\partial \gamma_k} = \int_0^1 \left\{ 2p(x) \sum_{j=1}^N \gamma_j \psi_j'(x) \psi_k'(x) + 2q(x) \sum_{j=1}^N \gamma_j \psi_j(x) \psi_k(x) - 2f(x) \psi_k(x) \right\} dx = 0, \\ k = 1, 2, \dots, N.$$

Le equazioni precedenti formano un sistema lineare di N equazioni nelle N incognite $\Gamma = [\gamma_1, \dots, \gamma_N]^T$. La matrice dei coefficienti A , chiamata *matrice di rigidità* (*stiffness matrix*), è simmetrica e ha elementi

$$a_{jk} = \int_0^1 \left\{ p(x) \psi_j'(x) \psi_k'(x) + q(x) \psi_j(x) \psi_k(x) \right\} dx; \quad (3.6)$$

il termine noto F , chiamato *vettore di carico* (*load vector*), ha elementi

$$f_k = \int_0^1 f(x) \psi_k(x) dx. \quad (3.7)$$

3.2 Elementi finiti lineari

Nel *metodo degli elementi finiti lineari* si sceglie come spazio di funzioni approssimanti V_N lo spazio delle funzioni spline lineari nell'intervallo $[0, 1]$ che assumono valore nullo agli estremi dell'intervallo.

Sia $\Delta : 0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N < x_{N+1} = 1$ una partizione dell'intervallo $[0, 1]$ e sia $h_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, 2, \dots, N+1$, allora V_N è lo spazio dei polinomi lineari a tratti in $[0, 1]$ con derivata discontinua nei nodi x_i , $i = 1, 2, \dots, N$, e che assumono valore 0 in $x_0 = 0$ e $x_{N+1} = 1$.

Le funzioni di base ψ_j , $j = 1, 2, \dots, N$, per lo spazio V_N , sono i polinomi lineari a tratti definiti dalle proprietà di interpolazione

$$\psi_j(x_i) = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j, \\ 0, & \text{se } i \neq j, \end{cases} \quad (3.8)$$

da cui si ottiene

$$\psi_j(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{j-1}}{h_j}, & \text{se } x \in [x_{j-1}, x_j], \\ \frac{x_{j+1} - x}{h_{j+1}}, & \text{se } x \in [x_j, x_{j+1}], \\ 0, & \text{altrove,} \end{cases} \quad j = 1, \dots, N. \quad (3.9)$$

Le derivate delle funzioni ψ_j sono costanti nei sottointervalli (x_j, x_{j+1}) , $j = 0, 1, \dots, N$, e sono date da

$$\psi_j'(x) = \begin{cases} \frac{1}{h_j}, & \text{se } x \in (x_{j-1}, x_j), \\ -\frac{1}{h_{j+1}}, & \text{se } x \in (x_j, x_{j+1}), \\ 0, & \text{altrove.} \end{cases} \quad j = 1, \dots, N. \quad (3.10)$$

L'approssimazione della soluzione $y(x)$ nello spazio a dimensione finita V_N generato dalla base di funzioni ψ_j , $j = 1, 2, \dots, N$, è

$$y_N(x) = \sum_{j=1}^N \gamma_j \psi_j(x), \quad x \in [0, 1]. \quad (3.11)$$

Ovviamente in questo caso y_N è un polinomio lineare a tratti, cioè $y_N(x) \in C_0([0, 1])$ e y_N' è continua a tratti, con $y_N(0) = y_N(1) = 0$; inoltre, $y_N(x_i) = \gamma_i$, $i = 1, 2, \dots, N$.

Utilizzando nelle formule (3.6) e (3.7) le espressioni di ψ_j e ψ_j' date in (3.9) e (3.10) si ha

$$\begin{aligned} a_{kk} &= \int_0^1 \left\{ p(x) [\psi_k'(x)]^2 + q(x) [\psi_k(x)]^2 \right\} dx = \\ &= \left(\frac{1}{h_k} \right)^2 \int_{x_{k-1}}^{x_k} p(x) dx + \left(\frac{1}{h_{k+1}} \right)^2 \int_{x_k}^{x_{k+1}} p(x) dx + \\ &+ \left(\frac{1}{h_k} \right)^2 \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x - x_{k-1})^2 q(x) dx + \left(\frac{1}{h_{k+1}} \right)^2 \int_{x_k}^{x_{k+1}} (x_{k+1} - x)^2 q(x) dx \end{aligned}$$

$k = 1, 2, \dots, N$

$$\begin{aligned}
a_{k,k+1} &= \int_0^1 \left\{ p(x)\psi'_k(x)\psi'_{k+1}(x) + q(x)\psi_k(x)\psi_{k+1}(x) \right\} dx = \\
&= - \left(\frac{1}{h_{k+1}} \right)^2 \int_{x_k}^{x_{k+1}} p(x) dx + \left(\frac{1}{h_{k+1}} \right)^2 \int_{x_k}^{x_{k+1}} (x_{k+1} - x)(x - x_k)q(x) dx \\
& \qquad \qquad \qquad k = 1, 2, \dots, N - 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{k,k-1} &= \int_0^1 \left\{ p(x)\psi'_k(x)\psi'_{k-1}(x) + q(x)\psi_k(x)\psi_{k-1}(x) \right\} dx = \\
&= - \left(\frac{1}{h_k} \right)^2 \int_{x_{k-1}}^{x_k} p(x) dx + \left(\frac{1}{h_k} \right)^2 \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x_k - x)(x - x_{k-1})q(x) dx \\
& \qquad \qquad \qquad k = 2, \dots, N
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_k &= \int_0^1 f(x)\psi_k(x) dx = \\
&= \frac{1}{h_k} \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x - x_{k-1})f(x) dx + \frac{1}{h_{k+1}} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (x_{k+1} - x)f(x) dx \quad k = 1, 2, \dots, N.
\end{aligned}$$

Osserviamo che la matrice A è tridiagonale poiché ciascuna funzione ψ_j , $j = 1, 2, \dots, N$, è diversa da zero solo nell'intervallo (x_{j-1}, x_{j+1}) e quindi si sovrappone solo alle funzioni ψ_{j-1} e ψ_{j+1} .

Ci sono sei tipi di integrali da calcolare. Definendo

$$Q_{1,k} = \frac{1}{(h_{k+1})^2} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (x_{k+1} - x)(x - x_k)q(x) dx, \quad k = 1, 2, \dots, N - 1,$$

$$Q_{2,k} = \frac{1}{(h_k)^2} \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x - x_{k-1})^2 q(x) dx, \quad k = 1, 2, \dots, N,$$

$$Q_{3,k} = \frac{1}{(h_{k+1})^2} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (x_{k+1} - x)^2 q(x) dx, \quad k = 1, 2, \dots, N,$$

$$Q_{4,k} = \frac{1}{(h_k)^2} \int_{x_{k-1}}^{x_k} p(x) dx, \quad k = 1, 2, \dots, N + 1,$$

$$Q_{5,k} = \frac{1}{h_k} \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x - x_{k-1})f(x) dx, \quad k = 1, 2, \dots, N,$$

$$Q_{6,k} = \frac{1}{h_{k+1}} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (x_{k+1} - x)f(x) dx, \quad k = 1, 2, \dots, N,$$

si possono scrivere gli elementi della matrice di rigidità A e del vettore di carico F in modo più compatto:

$$\begin{aligned} a_{k,k} &= Q_{4,k} + Q_{4,k+1} + Q_{2,k} + Q_{3,k}, & k &= 1, 2, \dots, N, \\ a_{k,k+1} &= -Q_{4,k+1} + Q_{1,k}, & k &= 1, 2, \dots, N-1, \\ a_{k,k-1} &= -Q_{4,k} + Q_{1,k-1}, & k &= 2, 3, \dots, N, \\ f_k &= Q_{5,k} + Q_{6,k}, & k &= 1, 2, \dots, N. \end{aligned}$$

Risolvendo il sistema lineare $A\Gamma = F$ si trovano le incognite Γ che permettono di costruire l'approssimazione y_N .

Si può dimostrare che la matrice tridiagonale A è *simmetrica* e *definita positiva* quindi il sistema lineare ammette un'unica soluzione ed è anche ben condizionato. Inoltre, sotto le ipotesi su p , q , e f date nel Teorema 3.1, si ha

$$\max_{x \in [0,1]} |y(x) - y_N(x)| = O(h^2), \quad x \in [0, 1],$$

quindi il metodo è *convergente* e del *secondo ordine*.

La difficoltà di questo metodo sta nel dover valutare i $6n$ integrali $Q_{j,k}$, che possono essere calcolati direttamente solo in casi elementari. In generale bisogna ricorrere a una formula di quadratura oppure si possono approssimare le funzioni p , q e f con un polinomio lineare a tratti e integrare poi tale polinomio.

Per ottenere funzioni approssimanti più regolari si può approssimare la soluzione $y(x)$ con funzioni splines di ordine più elevato; ad esempio, se si usano le splines cubiche l'approssimante y_N è in $C_0^2([0,1])$, però in questo caso le funzioni di base hanno un supporto più ampio e la matrice di rigidità è pentadiagonale. Come conseguenza aumenta il costo computazionale sia della costruzione della matrice di rigidità, che è meno sparsa, sia della soluzione del sistema lineare.

Esempio 3.1

Consideriamo il problema ai limiti

$$\begin{cases} -y'' + \pi^2 y = 2\pi \sin(\pi x), & 0 \leq x \leq 1, \\ y(0) = y(1) = 0. \end{cases}$$

Per approssimare la soluzione introduciamo una partizione di 10 nodi equispaziati con passo $h_k = h = 0.1$, quindi $x_k = 0.1k$, $k = 0, 1, \dots, 10$. In questo caso gli integrali $Q_{j,k}$ possono essere

calcolati esattamente:

$$Q_{1,k} = 100 \int_{0.1k}^{0.1k+0.1} (0.1k + 0.1 - x)(x - 0.1k)\pi^2 dx = \frac{\pi^2}{60},$$

$$Q_{2,k} = 100 \int_{0.1k-0.1}^{0.1k} (x - 0.1k + 0.1)^2 \pi^2 dx = \frac{\pi^2}{30},$$

$$Q_{3,k} = 100 \int_{0.1k}^{0.1k+0.1} (0.1k + 0.1 - x)^2 \pi^2 dx = \frac{\pi^2}{30},$$

$$Q_{4,k} = 100 \int_{0.1k-0.1}^{0.1k} dx = 10,$$

$$\begin{aligned} Q_{5,k} &= 10 \int_{0.1k-0.1}^{0.1k} (x - 0.1k + 0.1) 2\pi^2 \sin(\pi x) dx = \\ &= -2\pi \cos(0.1\pi k) + 20[\sin(0.1\pi k) - \sin(0.1k - 0.1)\pi], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_{6,k} &= 10 \int_{0.1k}^{0.1k+0.1} (0.1k + 0.1 - x) 2\pi^2 \sin(\pi x) dx = \\ &= 2\pi \cos(0.1\pi k) - 20[\sin(0.1k + 0.1)\pi - \sin(0.1\pi k)]. \end{aligned}$$

Gli elementi di A e F sono dati da

$$a_{k,k} = 20 + \frac{\pi^2}{15}, \quad k = 1, 2, \dots, 9,$$

$$a_{k,k+1} = -10 + \frac{\pi^2}{60}, \quad k = 1, 2, \dots, 8,$$

$$a_{k,k-1} = -10 + \frac{\pi^2}{60}, \quad k = 2, 3, \dots, 9,$$

$$f_k = 40 \sin(0.1\pi k)[1 - \cos(0.1\pi)], \quad k = 1, 2, \dots, 9.$$

La soluzione del sistema tridiagonale è

$$\begin{aligned} \gamma_9 &= 0.31029, & \gamma_8 &= 0.59020, & \gamma_7 &= 0.81234, \\ \gamma_6 &= 0.95496, & \gamma_5 &= 1.00411, & \gamma_4 &= 0.95496, \\ \gamma_3 &= 0.81234, & \gamma_2 &= 0.59020, & \gamma_1 &= 0.31029. \end{aligned}$$

L'approssimazione polinomiale a tratti della soluzione è

$$y_9(x) = \sum_{k=1}^9 \gamma_k \psi_k(x),$$

mentre la soluzione esatta è data da $y(x) = \sin(\pi x)$. In tabella sono riportati i valori numerici e l'errore.

i	x_i	$y(x_i)$	$y_9(x_i) = \gamma_i$	$ y(x_i) - y_i $
1	0.1	0.30902	0.31029	0.00127
2	0.2	0.58779	0.59020	0.00241
3	0.3	0.80902	0.81234	0.00332
4	0.4	0.95106	0.95496	0.00390
5	0.5	1.00000	1.00411	0.00411
6	0.6	0.95106	0.95496	0.00390
7	0.7	0.80902	0.81234	0.00332
8	0.8	0.58779	0.59020	0.00241
9	0.9	0.30902	0.31029	0.00127

3.3 Metodo di Galerkin

In questo metodo i coefficienti incogniti γ_j , $j = 1, 2, \dots, N$, vengono determinati imponendo che y_N soddisfi il principio dei lavori virtuali (3.5). Questo vuol dire che y_N deve soddisfare il seguente problema discreto

$$\int_0^1 \{p(x)y'_N(x)u'_N(x) + q(x)y_N(x)u_N(x)\} dx = \int_0^1 f(x)u_N(x) dx \quad (3.12)$$

per ogni $u_N \in V_N$. Sostituendo nella (3.12) l'espressioni di y_N data in (3.11) e ponendo

$$u_N(x) = \sum_{j=1}^N c_j \psi_j(x), \quad x \in [0, 1],$$

si ottiene un sistema lineare che, a causa della simmetria dell'equazione variazionale, coincide con quello che si ottiene con il metodo di Rayleigh-Ritz. Allora la soluzione del sistema è unica e quindi esiste un'unica approssimazione y_N della soluzione del principio dei lavori virtuali.

Per quanto riguarda la convergenza e l'ordine valgono considerazioni analoghe a quelle fatte per il metodo di Rayleigh-Ritz.

4 Metodo di Newton per sistemi non lineari

Consideriamo il sistema non lineare

$$F(X) = 0 \quad (4.13)$$

con $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ e $F(X) = [f_1(X), f_2(X), \dots, f_n(X)]^T$. Una soluzione del sistema (4.13) è un vettore $\bar{X} = [\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n]^T$ tale che

$$F(\bar{X}) = 0.$$

Se le funzioni $f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n)$, ammettono derivate parziali limitate, allora la soluzione \bar{X} può essere approssimata con il metodo di Newton. Partendo da una approssimazione

iniziale $X^{(0)} = [x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}]^T$, si costruisce una successione di approssimazioni $\{X^{(k)} = [x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}]^T\}$, $k = 1, 2, \dots$, con un procedimento iterativo del tipo

$$\begin{cases} X^{(0)} & \text{dato,} \\ X^{(k)} = X^{(k-1)} - J(X^{(k-1)})^{-1}F(X^{(k-1)}), & k \geq 1, \end{cases}$$

dove $J(X)$ è la matrice Jacobiana del sistema (4.13). Se l'approssimazione iniziale è sufficientemente accurata e lo Jacobiano è regolare il metodo è *convergente*, cioè

$$\lim_{k \rightarrow \infty} X^{(k)} = \bar{X} \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \|\bar{X} - X^{(k)}\| = 0,$$

e la convergenza è *quadratica* quindi

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|\bar{X} - X^{(k+1)}\|}{\|\bar{X} - X^{(k)}\|^2} = C,$$

dove C è una costante positiva.

La difficoltà del metodo di Newton consiste nel fatto che ad ogni passo bisogna invertire la matrice Jacobiana che richiede un costo computazionale elevato. Per evitare l'inversione di matrice si procede nel modo seguente. Ad ogni passo si risolve il sistema lineare

$$J(X^{(k-1)})Y = -F(X^{(k-1)})$$

quindi si calcola la nuova approssimazione $X^{(k)} = X^{(k-1)} + Y$. Il procedimento iterativo viene arrestato quando $\|X^{(k)} - X^{(k-1)}\| \leq \epsilon$, dove ϵ è una tolleranza prefissata.

Bibliografia

1. **R.L. Burden, J.D. Faires**, *Numerical Analysis*, Books/Cole Pubbling Company, 1997 (§§ 11.3-11.5).
2. **V. Comincioli**, *Analisi Numerica. Metodi, Modelli e Applicazioni*, McGraw-Hill, 1990 (§§ 9.5.2-9.5.3).
3. **W. Gautschi**, *Numerical Analysis*, Birkhauser, 1997 (§§ 6.1, 6.3, 6.4).
4. **L. Gori**, *Calcolo Numerico*, Ed. Kappa, 1999 (§§ 6.15, 9.13).
5. **L. Gori**, *Soluzione Numerica di Problemi alle Derivate Parziali. Metodi alle Differenze Finite*, Dispense, 2001 (§ 3).
6. **G. Strang, G.J. Fix**, *An Analysis of the Finite Element Method*, Prentice-Hall, 1973.