

**Laurea in Ingegneria Aerospaziale – Roma – 2° anno**  
**Insegnamento: Modelli Matematici per la Meccanica, canale LZ – 9 CFU**  
Docenti: A. Barra, E.N.M. Cirillo – Anno Accademico: 2024–2025

**Programma di massima**

- L00** Prerequisiti di algebra lineare (spazi vettoriali), richiami di geometria (spazi puntuali euclidei) e curve [1, Appendici A e B] e [7].
- L02** Sollecitazioni e campo momento [1, Capitoli 1 e 17].
- L03** Trasformazioni di coordinate [1, Capitolo 2].
- L04** Cinematica degli osservatori [1, Capitolo 3] e [5].
- L05** Moti relativi [1, Capitolo 4] e [5].
- L01** Leggi della meccanica [1, Capitolo 1] e [5, 12].
- L08** Sistemi vincolati [1, Capitolo 7].
- L10** Proprietà generali dei sistemi di particelle [1, Capitolo 9] e [5].
- L11** Dinamica dei sistemi olonomi: equazioni di Lagrange [1, Capitolo 10] e [5].
- L12** Statica dei sistemi olonomi: equilibrio e stabilità [1, Capitolo 12] e [5].
- L13** Cinematica del corpo rigido: il moto e l'atto di moto [1, Capitolo 14] e [5].
- L14** Corpo rigido: geometria delle masse [1, Capitolo 15] e [5].
- L15** Dinamica e statica del corpo rigido: formalismo lagrangiano [1, Capitolo 16] e [5].
- L16** Sistemi oscillanti [1, Capitolo 13] e [5].
- L17** Dinamica del corpo rigido e statica: equazioni cardinali [1, Capitolo 17] e [5].
- L19** Corpo rigido con un punto fisso: moti alla Poinsot [1, Capitolo 17] e [5].
- L21** Corpo rigido appoggiato a una superficie liscia [1, Capitolo 17] e [5].
- L22** Sfera appoggiata a una superficie scabra [1, Capitolo 17] e [12].
- S01** Sistemi dinamici uni-dimensionali [2, Capitolo 1]
- S02** Teoria generale del problema di Cauchy [2, Capitolo 2]
- S03** Sistemi di equazioni differenziali lineari [2, Capitolo 3]
- S04** Comportamenti asintotici, equilibrio e ritratti di fase [2, Capitolo 4 e 5]

## Testi consigliati

- [1] Emilio N.M. Cirillo, “Appunti delle Lezioni di Meccanica Razionale per l’Ingegneria.” Edizioni CompoMat, 2018, Configni (Ri).
- [2] Daniele Andreucci, Emilio N.M. Cirillo, “Sistemi di Equazioni Differenziali Ordinarie.” Appunti, 2024.

## Esercitazioni ed esempi di prove d’esame

Sul sito google classroom sono reperibili alcune esercitazioni, suddivise per argomenti. Non è sempre distribuita la soluzione.

Gli studenti sono invitati a svolgere questi esercizi durante o al termine del corso e a discutere con il docente le eventuali difficoltà incontrate.

## Diario delle lezioni

Lezioni 1 – 2 (23 settembre 2024)

**S01** Introduzione al corso. Sistemi unidimensionali: ode in forma normale, problema di Cauchy, soluzione locale di una edo, soluzione massimale, esempi di soluzioni massimali, metodo degli ansatz (Esempi 1.10 e 1.11), ode in forma autonoma e loro traslabilità temporale (Teorema 1.12). Metodo della separazione delle variabili: generalità e calcolo di soluzioni massimali (Esempi 1.13 ed 1.14). Esercizi sulla separazione delle variabili: modello di Malthus per la dinamica delle popolazioni, modello di variazione della pressione atmosferica vs altitudine, caduta libera in mezzo viscoso: velocità limite. Disuguaglianza di Gronwall (Lemma 1.17).

Lezioni 3 – 4 (24 settembre 2024)

**L00** Paragrafi A.3 spazi vettoriali, A.4 spazi vettoriali euclidei, A.5 spazi vettoriali euclidei tridimensionali. B.1 spazi puntuali, B.2 isometrie.

Lezioni 5 – 6 (25 settembre 2024)

**L02** Paragrafi 1.4 proprietà generali delle sollecitazioni e campo momento, 17.2 sollecitazioni equivalenti (esempio del peso).

Lezioni 7 – 8 (26 settembre 2024)

**L03** Paragrafi 2.1 trasformazioni di coordinate cartesiane, 2.2 trasformazioni particolari (traslazione e rotazione), 2.2.2 angoli di Eulero.

Lezioni 9 – 10 (30 settembre 2024)

**S01** Lemma 1.17 (disuguaglianza di Gronwall), Corollario 1.18, Osservazioni 1.20, 1.21 e 1.22. Sistemi dinamici monodimensionali: studio qualitativo delle soluzioni: Definizione 1.23 (punto di equilibrio) e Teorema 1.24 (soluzione costante), curve integrali, linee di fase, ritratto di fase, piano esteso, Lemma 1.25 e Corollario 1.26 (equilibrio asintotico). Esempi di studio qualitativo: modello di Malthus (caso con origine instabile e stabile), caduta di un grave con attrito: velocità limite come attrattore.

Lezioni 11 – 12 (1 ottobre 2024)

**L03** Paragrafo 2.2.1 angoli di Cardano,

**L04** Paragrafi 3.1 moto di trascinamento, 3.2 velocità angolare, teorema di Poisson, proprietà e esempio 3.1.

Lezioni 13 – 14 (2 ottobre 2024)

**S01** Definizione 1.27: Equilibrio stabile/instabile, Esempi 1.28, 1.29 (legge di Newton per la temperatura) e 1.30 (equazione logistica), sia soluzione analitica, sia studio qualitativo per tutti gli esercizi. Teorema 1.31 (inesistenza di soluzioni periodiche non costanti). Esempio 1.34, Teorema 1.35 (esistenza della soluzione), Osservazione 1.37 e Corollario 1.39 (unicità della soluzione).

Lezioni 15 – 16 (3 ottobre 2024)

**L04** Paragrafi 3.2 proprietà e esempi 3.1 e 3.2, 3.3 classificazione dei moti di trascinamento.

Lezioni 17 – 18 (7 ottobre 2024)

**S01** Osservazione 1.27 (Tempi di percorrenza e loro stime). Definizione 1.40 e Lemma 1.41 (Lipschizianità), Teorema 1.43 (unicità), il caso generale  $F(t,x)$ : Definizione 1.44, Teorema 1.45 (Dipendenza Continua), Corollario 1.46, Esempio 1.47. Paragrafo 1.6 (metodo della variazione delle costanti), Esempio 1.55, Esempio 1.57 (Modello logistico con decimazione). Studio qualitativo: Paragrafo 1.7: esercizi per casa.

Lezioni 19 – 20 (8 ottobre 2024)

**S01** Teorema 1.67 (Teorema del Confronto), Esempio 1.68 (resistenza variabile), Teorema 1.72 (Esplosione in tempo finito), Esempio 1.74 (esempio 1.14 mediante confronto). Esercizi per casa (studio qualitativo e edo: esempi 1.58 e 1.61).

**S02** Sistemi di equazioni differenziali: Esempio 2.2 (sistema disaccoppiato), Esempio 2.3 (Precessione di Larmor). Paragrafo 2.1 (abbassamento d'ordine di un'equazione).

Lezioni 21 – 22 (9 ottobre 2024)

**L04** Paragrafi 3.3 classificazione dei moti di trascinamento. 3.4 moto relativo e assoluto di un osservatore (composizione delle velocità angolari).

**L05** Paragrafo 4.1 moto di un punto solidale a un osservatore mobile.

Lezioni 23 – 24 (10 ottobre 2024)

**L05** Paragrafo 4.2 moto assoluto e relativo di un elemento.

**L01** Paragrafi 1.1 cinematica, 1.2 dinamica, 1.3 statica.

Lezioni 25 – 26 (14 ottobre 2024)

**S02** Definizione 2.13 (funzioni Lipschitziane vettoriali), Teorema 2.10 (esistenza), Teorema 2.14 (unicità), Teorema 2.18 (soluzione massimale), Teorema 2.19 e Corollario 2.20 (uscita dai compatti nel limite e fine di una massimale). Teorema 2.24 (limitazione a priori), Definizione 2.27 (dipendenza continua). Applicazioni (Esempi 2.31, 2.32, 2.35).

Lezioni 27 – 28 (15 ottobre 2024)

**L01** Paragrafo sistemi di riferimento non inerziali.

**L10** Paragrafi 9.1 centro di massa, 9.2 riferimento del centro di massa.

Lezioni 29 – 30 (16 ottobre 2024)

**L08** Paragrafi 7.1 cinematica dei vincoli, 7.2 dinamica dei sistemi vincolati, 7.3 statica dei sistemi vincolati,

**L10** Paragrafo 9.3 equazioni globali della dinamica dei sistemi. Teorema del lavoro e dell'energia cinetica.

Lezioni 31 – 32 (17 ottobre 2024)

**L08** Paragrafi 7.4 classificazione dei vincoli, 7.5 modelli di vincolo.

**L09** Paragrafi 8.2 elemento vincolato a una guida rettilinea, 8.3 elemento vincolato a una guida curvilinea, 8.4 elemento vincolato a una superficie, 8.4 elemento vincolato a una superficie (problema del distacco), 8.5 oscillatore lineare.

Lezioni 33 – 34 (21 ottobre 2024)

**S03** Capitolo 3.1: (Equazioni differenziali lineari), Teorema 3.2 (Integrale Generale), Esempio 3.3. (determinazione delle costanti). Paragrafo 3.1.1 (Eq. Lin. a coefficienti costanti): Lemma 3.4 (soluzione particolare in casi di interesse nella Meccanica), Esempio 3.5 (oscillatore armonico con forzante esponenziale), Esempio 3.6 (oscillatore armonico con forzante sinusoidale: caso risonante e caso non risonante): analisi dettagliata.

Lezioni 35 – 36 (22 ottobre 2024)

**L08** Paragrafo 7.5 modelli di vincolo.

**L00** Paragrafo B.3 curve regolari (triedro principale e formule di Frenet).

**L09** Paragrafo 8.2 elemento vincolato a una guida rettilinea,

Lezioni 37 – 38 (23 ottobre 2024)

**L09** Paragrafi 8.3 elemento vincolato a una guida curvilinea, 8.4 elemento vincolato a una superficie, 8.4 elemento vincolato a una superficie (problema del distacco),

**L11** Paragrafi 10.1 e 10.2 osservabili cinematiche e coordinate lagrangiane (teorema sulla matrice di massa senza dimostrazione), 10.3 prima forma delle equazioni di Lagrange.

Lezioni 39 – 40 (24 ottobre 2024)

**L11** Paragrafi 10.3 prima forma delle equazioni di Lagrange. 10.4 seconda forma delle equazioni di Lagrange, 10.5 sollecitazioni a lavoro virtuale nullo.

Lezioni 41 – 42 (28 ottobre 2024)

**S03** Esercizi su ODE (Esempi 3.7, 3.8, 3.9, 3.10). Capitolo 3.2: (Sistemi Lineari Omogenei). Generalità, Teorema 3.17 (combinazione lineare di soluzioni è soluzione), Lemma 3.18 (lineare indipendenza in  $S$  e  $\mathbb{R}^N$ ), Corollario 3.19 (dimensione di  $S \leq N$ ), Teorema 3.21 (basi in  $\mathbb{R}^N$  come soluzioni di  $N$  problemi di Cauchy), Corollario 3.22 (dimensione di  $S$  uguale  $N$ ). Esempio 3.23 (il caso del moto armonico).

Lezioni 43 – 44 (29 ottobre 2024)

**L11** Paragrafi 10.6 sistemi olonomi conservativi, 10.7 integrali primi del moto.

Lezioni 45 – 46 (30 ottobre 2024)

**L11** Paragrafi 10.7 integrali primi del moto, 10.8 leggi di conservazione per sistemi olonomi conservativi, Esempi 10.13 e 10.14.

Lezioni 47 – 48 (31 ottobre 2024)

**L12** Paragrafi 12.1 statica dei sistemi olonomi, 12.2 stabilità dell'equilibrio, teorema di Dirichlet con dimostrazione rimandata e teorema di Liapunov senza dimostrazione. Esempi 12.1, 12.2.

Lezioni 49 – 50 (4 novembre 2024)

**S03** Paragrafo 3.4.2: (Metodi risolutivi di sistemi di ODE: primo modo, mediante diagonalizzazione della matrice del sistema dinamico). Annessa esercitazione (quattro esercizi).

Lezioni 51 – 54 (5 novembre 2024)

**L12** Esempio 12.3.

**L13** Paragrafi 14.1 corpo rigido, 14.2 moti rigidi particolari, 14.3 atto di moto rigido, 14.4 classificazione degli atti di moto rigido, 14.5 moto rigido di contatto.

Lezioni 55 – 56 (6 novembre 2024)

**L13** Paragrafi 14.5 moto rigido di contatto, 14.6 moto rigido piano.

Lezioni 57 – 58 (7 novembre 2024)

**L13** Paragrafi 14.6 moto rigido piano, 14.7 moto rigido sferico: precessione.

**L14** Paragrafo 15.1 centro di massa di un corpo rigido.

Lezioni 59 – 60 (11 novembre 2024)

**S03** Fine dell'esercitazione sulla risoluzione di sistemi di equazioni differenziali mediante diagonalizzazione della matrice dei coefficienti: caso di autovalori coincidenti. Paragrafo 3.3: Matrici risolventi e di transizione. Lemma 3.24, definizione 3.25 (Matrice di transizione), Lemma 3.26, Teorema 3.27, Teorema 3.30 (proprietà algebriche della matrice di transizione), Teorema 3.32 (matrice di transizione come soluzione unica del problema di Cauchy), Esempio 3.27 (il caso del moto armonico).

Lezioni 61 – 62 (12 novembre 2024)

**L14** Paragrafi 15.1 centro di massa di un corpo rigido, 15.2 momento d'inerzia, 15.3 matrice d'inerzia.

Lezioni 62 – 62 (13 novembre 2024)

Anticipata il 5 novembre

Lezioni 63 – 64 (14 novembre 2024)

**L14** Paragrafi 15.4 grandezze cinematiche e matrice d'inerzia, 15.5 tensore d'inerzia,

Lezioni 65 – 66 (18 novembre 2024)

**S03** Esercitazione sulla risoluzione di sistemi di equazioni differenziali – ed annessi problemi di Cauchy – mediante diagonalizzazione della matrice dei coefficienti e mediante matrice di trasferimento. Casi  $3 \times 3$  e casi non omogenei.

Lezioni 67 – 68 (19 novembre 2024)

**L14** Paragrafo 15.6 ellissoide d'inerzia.

**L15** Paragrafi 16.1 sistemi rigidi vincolati (cerniera, giunto e collare), 16.2 corpo rigido con almeno un punto fisso (cerniere incrociate, cerniera e bilanciamento),

Lezioni 69 – 70 (20 novembre 2024)

**L15** Paragrafi 16.2 corpo rigido con almeno un punto fisso (cerniere incrociate).

Lezioni 71 – 72 (21 novembre 2024)

**S03** Paragrafo 3.4: Teorema 3.33 (matrice esponenziale), Teorema 3.35 (matrice di transizione come matrice esponenziale). Paragrafo 3.4.1 (calcolo effettivo di un integrale generale). Paragrafo 3.4.3: Teorema 3.40 (risoluzione mediante matrice esponenziale). Esempio 3.42 (il caso del moto armonico). Esercitazione.

Lezioni 73 – 74 (25 novembre 2024)

**S04** Capitolo 4: comportamenti asintotici, Definizioni 4.1 (sistema dinamico), 4.2 (orbita e grafico), 4.3 (ritratto di fase), Osservazioni 4.4 e 4.5, Lemma 4.6, Esempio 4.7 (moto armonico), Definizione 4.9 e Lemma 4.10 (Integrale primo), Definizione 4.11, Lemma 4.12, Definizione 4.13 (equilibrio), Osservazione 4.14, Lemma 4.15 (comportamento vicino ai punti d'equilibrio), Definizione 4.16 (punto fisso stabile o instabile), Definizione 4.17 (punto fisso asintoticamente stabile), Teorema 4.19 (integrali primi e assenza di punti fissi asintoticamente stabili), Esempio 4.21 (moto dissipativo), Teorema 4.23 (stabilità per sistemi a coefficienti costanti).

Lezioni 75 – 76 (26 novembre 2024)

**L15** Paragrafo 16.2 corpo rigido con almeno un punto fisso (cerniera, bilanciamento statico e dinamico).

**L16** Paragrafi 13.1 coppia di oscillatori interagenti (oscillatori lineari).

Lezioni 77 – 78 (27 novembre 2024)

**L16** Paragrafi 13.1 coppia di oscillatori interagenti (oscillatori lineari. battimenti, oscillatori non lineari), 13.3 piccole oscillazioni.

Lezioni 79 – 80 (28 novembre 2024)

**L16** Paragrafo 13.3 piccole oscillazioni con esempio del bipendolo.

Lezioni 81 – 82 (2 dicembre 2024)

**S04** Sistemi lineari a coefficienti costanti in  $D = 2$  ed il piano traccia-determinante: fuochi, centri, selle, nodi. Teorema 4.29 di stabilità lineare. Esercitazione sui punti di equilibrio in sistemi lineari e nonlineari. Definizione 4.33 (funzione di Lyapunov). Teorema 4.35 di Lyapunov per la stabilità. Teorema 4.38 di Lyapunov per la stabilità asintotica. Applicazioni: Esempio 4.42 pendolo conservativo (analisi dei punti fissi).

Lezioni 83 – 84 (3 dicembre 2024)

**L14** Complementi di geometria delle masse: Teorema di Huygens per i prodotti d'inerzia.

**L17** Paragrafi 17.1 equazioni cardinali per il corpo rigido libero.

**L19** Paragrafi 17.5 corpo rigido con punto fisso, 17.5.1 moto alla Poincaré: definizione esempi, equazioni di Eulero, leggi di conservazione, rotazioni permanenti.

Lezioni 85 – 86 (4 dicembre 2024)

**L19** Paragrafi 17.5.1 moto alla Poincaré: definizione esempi, equazioni di Eulero, leggi di conservazione, rotazioni permanenti, 17.5.2 stabilità delle rotazioni permanenti.

Lezioni 87 – 88 (5 dicembre 2024)

**L19** Paragrafo 17.5.2 stabilità delle rotazioni permanenti.

**L21** Paragrafo 17.6 corpo rigido appoggiato su piano liscio.

Lezioni 89 – 90 (9 dicembre 2024)

**S04** Paragrafo 4.6: sistemi del II ordine. Definizioni 4.45, 4.46 e 4.47. Teorema 4.50 (criterio di stabilità di Dirichlet), Teorema 4.56 (sistemi dissipativi e stabilità asintotica). Teorema 4.58 (criterio di instabilità). Capitolo 5: sistemi dinamici planari. Teorema 5.1 (moti 1D conservativi). Teorema 5.5 (tempo di percorrenza). Ritratti di fase con esempi (casi conservativi e casi dissipativi).

Lezioni 91 – 92 (10 dicembre 2024)

**L21** Paragrafo 17.6 corpo rigido appoggiato su piano liscio (esercizi).

**L22** Paragrafo 17.7 sfera appoggiata su un piano scabro.

Lezioni 93 – 94 (11 dicembre 2024)

Esempi ed esercizi di ricapitolazione: ancora sulle piccole oscillazioni del bipendolo, moti senza strisciamento (paragrafo 16.3), sistemi di corpi rigidi a contatto (paragrafo 16.4).

Lezioni 95 – 96 (16 dicembre 2024)

Esempi ed esercizi di ricapitolazione sui sistemi dinamici.

Lezioni 97 – 98 (17 dicembre 2024)

Esempi ed esercizi di ricapitolazione: deduzione delle equazioni pure mediante le equazioni cardinali (cerniera ideale, corpo vincolato con due cerniere mutuamente ortogonali, corpo in rotazione in un campo centrifugo), quesito 18.352.

### **Testi suggeriti per eventuali approfondimenti**

- [3] D. Andreucci, “Meccanica Razionale – Modelli Matematici per l’Ingegneria.” Edizioni La Dotta, 2019, Bologna.
- [4] V.I. Arnold, “Metodi Matematici della Meccanica Classica.” Editori Riuniti, 1986.
- [5] P. Benvenuti, P.G. Bordoni, G. Maschio, “Lezioni di Meccanica Razionale.” Edizioni CompoMat, 2010, Configni (Ri).
- [6] P. Benvenuti, G. Maschio, “Esercizi di Meccanica Razionale.” Edizioni CompoMat, 2011, Configni (Ri).
- [7] W.E. Deskins, “Abstract Algebra.” The MacMillian Company, 1964, New York.

- [8] B.A. Dubrovin, S.P. Novikov, A.T. Fomenko, “Geometria delle superfici, dei gruppi di trasformazioni e dei campi.” Volume primo. Editori Riuniti, Edizioni Mir, Mosca, 1986.
- [9] G. Gallavotti, “Meccanica elementare.” Boringhieri, Torino, 1986.
- [10] H. Goldstein, C. Poole, J. Safko, “Meccanica Classica.” Zanichelli, 2005, Bologna.
- [11] L. Landau, E. Lifchitz, “Meccanica,” tomo 1 della collezione “Fisica Teorica.” Mir, 1964, Mosca.
- [12] T. Levi-Civita, U. Amaldi, “Lezioni di Meccanica Razionale.” Edizioni CompoMat, 2012, Configni (Ri).
- [13] E. Olivieri, “Appunti di Meccanica Razionale.” UniTor, 1991, Roma.
- [14] J.R. Taylor, “Meccanica Classica.” Zanichelli, 2006, Bologna.

### **Esame**

L'esame consiste in una prova scritta e un colloquio orale. Lo scritto è costituito da due esercizi, un classico problema di Meccanica Razionale con 10 domande e un esercizio sui sistemi di equazioni differenziali ordinarie con 5 domande. Le domande sono a risposta multipla con quattro opzioni di risposta. Per l'accesso all'orale si deve conseguire un punteggio maggiore o uguale a 17. Ciascuna risposta esatta vale 2 punti, ogni risposta sbagliata  $-0.5$  punti. Nessun punteggio viene assegnato a domande per le quali non sia stata indicata alcuna risposta. Il colloquio orale si svolge immediatamente dopo la correzione della prova scritta sulla base del calendario predisposto dal docente.

Per lo svolgimento della prova scritta, che avrà la durata di due ore, gli studenti devono portare in aula tutto il materiale necessario, per esempio, fogli e penne.

La commissione distribuirà solo il testo del compito in formato cartaceo. Le risposte dovranno essere riportate a penna e in stampatello sulla prima pagina del compito che, al termine della prova scritta, dovrà essere consegnato in tutte le sue parti al docente.

Durante la prova scritta è possibile usare tre tomi (libri oppure appunti ben rilegati), mentre è vietato l'uso di appunti su fogli sparsi e di dispositivi elettronici di qualsiasi natura.