

Esercizi e appunti per il corso di Fisica Matematica

Laurea Specialistica in Ingegneria Meccanica

E.N.M. Cirillo – A.A. 2005–2006

1. Equazioni differenziali ordinarie autonome del primo ordine

Dopo un breve richiamo dei concetti basilari relativi alla teoria delle equazioni differenziali ordinarie, in questo capitolo si focalizza l'attenzione sul caso del primo ordine. In particolare si enunciano e si dimostrano con metodi ad hoc validi solo nel caso unidimensionale i fondamentali teoremi di esistenza e di unicità della soluzione del problema di Cauchy. Le dimostrazioni si baseranno sulla riduzione del problema alle quadrature, cioè al calcolo di un integrale definito. Le lezioni sono state basate su [2, Capitoli 1 e 2].

1.1. Aspetti generali

Un'equazione differenziale ordinaria di ordine $n \in \mathbb{N}^*$ nella funzione incognita $x : t \in \mathbb{R} \rightarrow x(t) \in \mathbb{R}$ è un'equazione nella forma

$$F(t, x, x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) = 0 \quad (1.1)$$

dove $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione assegnata. Il problema consiste nel determinare una funzione $x : t \in J \subset \mathbb{R} \rightarrow x(t) \in \mathbb{R}$ derivabile n volte nell'intervallo $J \subset \mathbb{R}$ e tale che

$$F(t, x(t), x^{(1)}(t), \dots, x^{(n)}(t)) = 0 \quad \forall t \in J$$

tale funzione è detta *integrale* o *soluzione* dell'equazione differenziale (1.1) nell'intervallo J . Si dice *integrale generale* della (1.1) nell'intervallo $J \subset \mathbb{R}$ una funzione $x : (c_1, \dots, c_n; t) \in \mathbb{R}^n \times J \rightarrow x(c_1, \dots, c_n; t) \in \mathbb{R}$ tale che per ogni soluzione $\bar{x} = \bar{x}(t)$ dell'equazione (1.1) in J esiste una n -upla reale $(\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_n) \in \mathbb{R}^n$ tale che $\bar{x}(t) = x(\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_n; t)$ per ogni $t \in J$.

Esempio 1.1. Si consideri la funzione $F : (t, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^4 \rightarrow F(t, x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_3 \in \mathbb{R}$; l'equazione differenziale $F(t, x, \dot{x}, \ddot{x}) = 0$ è l'equazione differenziale dell'oscillatore armonico libero $x + \ddot{x} = 0$. Per ogni coppia di numeri reali a, b la funzione $x : t \in \mathbb{R} \rightarrow x(t) = a \cos t + b \sin t \in \mathbb{R}$ è una soluzione dell'equazione differenziale. Per verificare questa affermazione è sufficiente sostituire la funzione x nell'equazione differenziale e osservare che l'equazione è soddisfatta per ogni t reale; infatti

$$a \cos t + b \sin t + \frac{d^2}{dt^2}[a \cos t + b \sin t] = a \cos t + b \sin t + [-a \cos t - b \sin t] = 0$$

per ogni t reale.

Esempio 1.2. Si consideri la funzione $F : (t, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^4 \rightarrow F(t, x_1, x_2, x_3) = -\cos(2t) + x_1 + x_3 \in \mathbb{R}$; l'equazione differenziale $F(t, x, \dot{x}, \ddot{x}) = 0$ è l'equazione differenziale dell'oscillatore armonico forzato $-\cos(2t) + x + \ddot{x} = 0$. Per ogni coppia di numeri reali a, b la funzione $x : t \in \mathbb{R} \rightarrow x(t) = a \cos t + b \sin t - (1/3) \cos(2t) \in \mathbb{R}$ è una soluzione dell'equazione differenziale. La verifica può essere condotta come nell'Esempio 1.1.

Siano $t_0, x_0, x_0^{(1)}, \dots, x_0^{(n-1)} \in \mathbb{R}$, risolvere il problema di Cauchy associato all'equazione differenziale (1.1) con dato iniziale $x_0, x_0^{(1)}, \dots, x_0^{(n-1)}$ in t_0 vuol dire determinare una

soluzione $x : J \rightarrow \mathbb{R}$ dell'equazione differenziale (1.1) in un intorno J di t_0 tale che

$$x(t_0) = x_0, x^{(1)}(t_0) = x_0^{(1)}, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)}$$

Uno dei problemi più interessanti della teoria delle equazioni differenziali è quello relativo all'esistenza e all'unicità della soluzione dei problemi di Cauchy.

Esempio 1.3. Si consideri l'equazione differenziale del primo ordine $\dot{x} = t$; tale equazione è nella forma (1.1) con $n = 1$ e $F(t, x, \dot{x}) = -t + \dot{x}$. È immediato osservare che l'insieme di tutte le soluzioni di tale equazione è l'insieme di tutte le primitive della funzione $f(t) = t$. Pertanto il suo integrale generale è $x(c; t) = t^2/2 + c$. Si può ora determinare la soluzione che soddisfa alla condizione di Cauchy $x(1) = 3$; si ha

$$x(1) = 3 \Rightarrow \frac{1}{2} + c = 3 \Rightarrow c = \frac{5}{2} \Rightarrow x(t) = \frac{1}{2}t^2 + \frac{5}{2}$$

Un'equazione differenziale ordinaria in forma normale di ordine $n \in \mathbb{N}^*$ nella funzione incognita $x : t \in \mathbb{R} \rightarrow x(t) \in \mathbb{R}$ è un'equazione nella forma

$$x^{(n)} = f(t, x, x^{(1)}, \dots, x^{(n-1)}) \quad (1.2)$$

dove $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione assegnata.

Esempio 1.4. Un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine in forma normale con $f(x, t) = g(x)h(t)$ è detta a variabili separabili; la soluzione del problema di Cauchy $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}$ può essere determinata con un'integrazione ordinaria:

$$\int_{t_0}^t \frac{1}{g(x(s))} \frac{dx}{ds} ds = \int_{t_0}^t h(s) ds \Rightarrow \int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx}{g(x)} = \int_{t_0}^t h(s) ds \quad (1.3)$$

Un'equazione differenziale ordinaria autonoma di ordine $n \in \mathbb{N}^*$ nella funzione incognita $x : t \in \mathbb{R} \rightarrow x(t) \in \mathbb{R}$ è un'equazione nella forma

$$x^{(n)} = f(x, x^{(1)}, \dots, x^{(n-1)}) \quad (1.4)$$

dove $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione assegnata.

Se la variabile t viene interpretata come il tempo, allora l'equazione (1.4) può essere pensata come un'equazione che descrive l'evoluzione di un sistema il cui stato è individuato dalla variabile x . Per questo motivo equazioni del tipo (1.4) sono dette anche *equazioni evolutive*. Il fatto che l'equazione sia autonoma assicura che il sistema evolva liberamente senza risentire dell'effetto di agenti esterni.

Esempio 1.5. Le equazioni differenziali considerate negli Esempi 1.1 e 1.2 descrivono rispettivamente le oscillazioni libere di un sistema e quelle forzate. La prima equazione è autonoma mentre la seconda non lo è.

Esercizio 1.1. Si risolva il problema $\dot{x} = x$ con dato iniziale $x(0) = 1$.

Soluzione: l'equazione è a variabili separabili con $g(x) = x$ e $h(t) = 1$. Pertanto

$$\int \frac{dx}{x} = \int dt \Rightarrow \log |x(t)| = t + \text{cost} \Rightarrow |x(t)| = e^{\text{cost}} e^t = C e^t \quad \text{con } C > 0$$

$$\Rightarrow x(t) = Ce^t \text{ con } C \in \mathbb{R}$$

Imponendo $x(0) = 1$ si ottiene $C = 1$. E quindi $x(t) = \exp\{t\}$.

Esercizio 1.2. Si risolva l'equazione $\dot{x} = (t + x)^2$.

Soluzione: la funzione $f(x, t) = (t + x)^2$ non è nella forma $f(x, t) = g(x)h(t)$, ciononostante con un opportuno cambiamento di variabili l'equazione può essere scritta in forma separabile. Si pone $y(t) = x(t) + t$. Derivando si ottiene $\dot{y} = \dot{x} + 1$. Sostituendo l'equazione diventa: $\dot{y} - 1 = y^2$, ovvero $\dot{y} = y^2 + 1$ che può essere separata scrivendo $g(y) = y^2 + 1$ e $h(t) = 1$. Pertanto:

$$\int \frac{dy}{1 + y^2} = \int dt \Rightarrow \arctan y = t + \text{cost} \Rightarrow \arctan(x + t) = t + \text{cost} \quad .$$

1.2. Sistemi dinamici unidimensionali

Si dice *sistema dinamico* unidimensionale un'equazione differenziale ordinaria autonoma di ordine uno, cioè un'equazione differenziale nella forma

$$\dot{x} = f(x) \tag{1.5}$$

con $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione assegnata definita sull'intervallo aperto $I \subset \mathbb{R}$. Le soluzioni della (1.5) sono dette anche *curve integrali*. Come si vedrà nel seguito sotto opportune ipotesi di regolarità su f la soluzione del problema di Cauchy relativo all'equazione (1.5) con dato iniziale $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}$ esiste ed è unica.

Esempio 1.6. Riproduzione normale (modello di Malthus). Si vuole costruire un modello molto semplice per descrivere l'evoluzione di una popolazione: il numero di individui all'istante $t \in \mathbb{R}$ è indicato con $x(t)$.

Ipotesi di riproduzione normale: si assume che il bilancio tra gli individui che nascono e quelli che muoiono per unità di tempo sia tale che nell'intervallo di tempo $[t, t + \Delta t]$, con Δt piccolo, la popolazione si incrementi di una quantità proporzionale all'ampiezza dell'intervallo di tempo considerato e al numero di individui presenti all'istante t .

Equazione evolutiva: sia $k > 0$, allora

$$x(t + \Delta t) - x(t) = kx(t)\Delta t \Rightarrow \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = kx(t)$$

Passando al limite $\Delta t \rightarrow 0$ si ottiene il sistema dinamico

$$\dot{x} = kx \quad x \geq 0 \tag{1.6}$$

Il problema di Cauchy associato al sistema dinamico (1.6) con dato iniziale $x(0) = x_0 > 0$ consiste nel determinare il numero di individui al generico istante t sapendo che all'istante iniziale $t = 0$ la popolazione consta di x_0 elementi. Il problema può essere risolto facilmente per separazione delle variabili:

$$\dot{x} = kx \Rightarrow \int_0^t \frac{1}{x} \frac{dx}{ds} ds = \int_0^t ds \Rightarrow \log \left| \frac{x(t)}{x_0} \right| = kt \Rightarrow x(t) = x_0 e^{kt}$$

dove nell'ultimo passaggio è stato usato $x(t), x_0 > 0$. Si osserva che sotto l'ipotesi di riproduzione normale, la popolazione cresce esponenzialmente. Si osserva, infine, che il sistema dinamico lineare (1.6) appare in numerosi campi delle scienze applicate; si vedano l'Esempio 1.7 e gli esercizi alla fine del Paragrafo 1.3.

Esempio 1.7. Pressione atmosferica. Si suppone che la temperatura dell'atmosfera sia uniforme, che l'aria si comporti come un gas ideale e che ogni sua parte sia in equilibrio sotto l'effetto delle forze di

pressione e del campo gravitazionale terrestre. Si costruisce un modello per la variazione della pressione con la quota sulla base della conoscenza dei valori p_0 e ϱ_0 della pressione e della densità a livello del mare.

Si considera una colonna d'aria che poggia sulla base Σ e un volume di questa colonna delimitato da due sezioni orizzontali a quote z e $z + \Delta z$; si suppone che Δz sia piccolo. Sapendo che la base di questo volume è in equilibrio si ha

$$p(z)\Sigma = p(z + \Delta z)\Sigma + Nmg$$

dove $p(z)$ è la pressione alla quota z , N è il numero di particelle d'aria nel volume considerato, m è la massa di ciascuna particella e g è l'accelerazione di gravità. Il numero di particelle N può essere messo in relazione con la densità dell'atmosfera: $Nm = \varrho(z)\Delta z\Sigma$. Si ha, allora,

$$[p(z + \Delta z) - p(z)]\Sigma = -\varrho(z)\Delta z\Sigma g \Rightarrow \frac{p(z + \Delta z) - p(z)}{\Delta z} = -\varrho(z)g$$

La pressione, infine, può essere legata alla densità del gas per mezzo dell'equazione di stato dei gas ideali: $p = \varrho RT$, dove T è la temperatura e R la costante dei gas perfetti. Usando l'equazione di stato e passando al limite $\Delta z \rightarrow 0$ si ha

$$\frac{d\varrho}{dz} = -\frac{g}{RT}\varrho$$

Anche questo problema è stato ridotto allo studio di un'equazione ordinaria del primo ordine autonoma e lineare. Ricordando che $p_0 = \varrho_0 RT$ e integrando l'equazione differenziale per parti si trova

$$\varrho(z) = \varrho_0 \exp\left\{-\frac{p_0}{\varrho_0 g}z\right\}$$

1.3. Analisi grafica

L'equazione evolutiva (1.5) regola il "moto" o "evoluzione" di un sistema il cui stato è individuato dalla variabile x . Per rappresentare l'evoluzione del sistema è utile riportare istante per istante la sua posizione sul piano xt detto *piano* (o *spazio*) *delle fasi esteso*. Se si prepara il sistema in $x_0 \in I$ (si ricorda che I è l'intervallo aperto su cui è definita la funzione f) all'istante t_0 e se ne segue l'evoluzione sul piano delle fasi esteso si ottiene una curva uscente dal punto (t_0, x_0) , detta *linea di fase nel piano esteso*, che è il grafico della soluzione del problema di Cauchy associato all'equazione (1.5) con dato iniziale $x(t_0) = x_0$; si veda il grafico a sinistra nella figura 1.1.

Se una linea di fase passa per un punto (t, x) del piano delle fasi, la tangente ad essa in quel punto avrà coefficiente angolare $f(x)$; si veda il grafico a sinistra nella figura 1.1. In altri termini la funzione f , detta anche *campo delle direzioni*, assegna in ogni punto (t, x) del piano delle fasi esteso il valore della pendenza della retta tangente a una linea di fase passante per il punto (t, x) . Dal momento che f non dipende da t , in tutti i punti del piano delle fasi che giacciono su una retta orizzontale la pendenza della retta tangente alla linea di fase è la stessa. Tracciando la direzione della tangente alla linea di fase in un certo numero di punti del piano delle fasi si può avere un'idea del comportamento delle linee di fase; si veda il grafico al centro nella figura 1.1.

Esempio 1.8. Nel caso della riproduzione normale il campo delle direzioni $f(x) = kx$ cresce linearmente ed è nullo per $x = 0$. Il campo delle direzioni è rappresentato nel grafico a destra nella figura 1.1: si vede subito che per qualsiasi dato iniziale $x(0) = x_0 > 0$ la linea di fase è monotona crescente, mentre

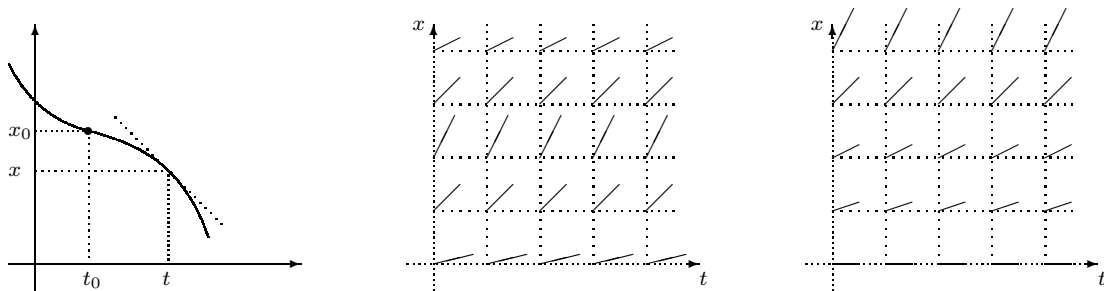


Fig. 1.1. A sinistra: linea di fase corrispondente al problema di Cauchy associato alla (1.5) con dato iniziale $x(t_0) = x_0$; è evidenziata la pendenza $f(x)$ della retta tangente alla linea di fase nel punto (t, x) . Al centro: schema del campo delle direzioni che permette di farsi un'idea intuitiva dell'andamento di una linea di fase nel piano esteso. A destra: analogo della figura centrale per il campo delle direzioni lineare $f(x) = kx$ con $k > 0$.

per $x(0) = 0$ la soluzione del problema di Cauchy è la funzione costante $x(t) = 0$; questo risultato è sicuramente sensato nel caso del sistema descritto dal modello della riproduzione normale: in una popolazione con zero elementi non nascono individui. Queste osservazioni grafiche sono perfettamente coerenti con la soluzione analitica del problema data nell'Esempio 1.6.

Per il sistema dinamico studiato nell'Esempio 1.8 in corrispondenza del dato iniziale nullo, il sistema resta "congelato" nella condizione iniziale. Questa osservazione suggerisce la seguente importante definizione: si dice che un punto x_e appartenente all'intervallo I su cui è definito il campo delle direzioni f del sistema dinamico $\dot{x} = f(x)$ è un *punto critico* (o *fisso* o *di equilibrio*) per il sistema dinamico se e solo se $f(x_e) = 0$.

L'individuazione dei punti fissi nello studio di un sistema dinamico è estremamente importante, perché le linee di fase emergenti dai punti fissi sono costanti, cioè un sistema dinamico preparato all'istante iniziale t_0 in un punto fisso x_e vi rimarrà per ogni $t > t_0$. Più precisamente vale la seguente proposizione.

Proposizione 1.9 *Si consideri il sistema dinamico (1.5) con $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continua sull'intervallo aperto $I \subset \mathbb{R}$ e sia $x_e \in I$ tale che $f(x_e) = 0$. Allora preso $t_0 \in \mathbb{R}$, il problema di Cauchy relativo a (1.5) con dato iniziale $x(t_0) = x_e$ ammette la soluzione costante $\varphi : t \in \mathbb{R} \rightarrow \varphi(t) = x_e \in \mathbb{R}$.*

Dimostrazione. Bisogna verificare che φ è soluzione del problema di Cauchy. In primo luogo si osserva che $\varphi(t_0) = x_e$, cioè la funzione φ verifica il dato iniziale; in secondo luogo

$$\frac{d\varphi}{dt}(t) = 0 \quad \text{e} \quad f(\varphi(t)) = f(x_e) = 0 \Rightarrow \frac{d\varphi}{dt}(t) = f(\varphi(t))$$

per ogni t reale.

Proposizione 1.9 \square

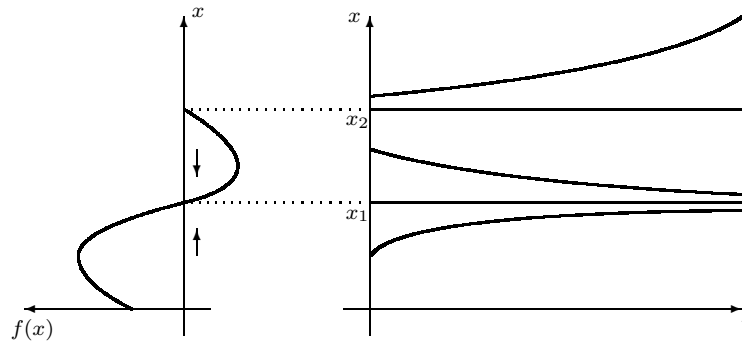


Fig. 1.2. Costruzione grafica delle linee di fase. A sinistra è disegnato il grafico del campo delle direzioni ruotato di novanta gradi in verso antiorario. A destra è disegnato il ritratto di fase.

La conoscenza del campo delle direzioni f permette di disegnare, almeno in modo approssimato, l'andamento delle linee di fase del sistema dinamico (1.5). L'insieme di tutte le linee di fase al variare del dato iniziale è detto *ritratto di fase* del sistema dinamico. Si procede nel modo seguente, i diversi passi sono illustrati nella figura 1.2:

- si disegna il grafico della funzione f con assi ruotati di novanta gradi in verso antiorario;
- a destra del grafico di f si disegna il piano delle fasi esteso e sul suo asse verticale si proiettano gli zeri della funzione f ;
- in corrispondenza degli zeri di f si tracciano sul piano delle fasi le linee di fase costanti che rappresentano i punti fissi;
- si individuano le regioni in cui f è positiva e quelle in cui è negativa e le si indicano rispettivamente con una freccia verso l'alto e una verso il basso;
- si traccia sul piano delle fasi l'andamento qualitativo delle linee di fase corrispondenti a dati iniziali non critici lasciandosi guidare dal segno di f .

In figura le linee di fase emergenti da dati iniziali non critici sono state disegnate in modo da tendere asintoticamente a un punto fisso senza raggiungerlo in un tempo finito. Questo comportamento è legato alla proprietà di unicità della soluzione del problema di Cauchy che verrà dimostrata nel paragrafo 1.5 sulla base di opportune ipotesi di regolarità sulla funzione f . In condizioni di validità del teorema di esistenza e di unicità della soluzione del problema di Cauchy per il sistema dinamico (1.5) due linee di fase non possono intersecarsi, se lo facessero, infatti, il problema di Cauchy corrispondente a (1.5) con dato iniziale il punto di intersezione ammetterebbe almeno due soluzioni.

Il caso considerato nella figura 1.2 mette in evidenza il ruolo diverso giocato dai due punti fissi x_1 e x_2 : se il dato iniziale viene scelto vicino a x_1 il moto del sistema dinamico resta vicino a x_1 , sembra addirittura che vi tenda in modo asintotico; se il dato iniziale

viene scelto vicino a x_2 il sistema dinamico se ne allontana inesorabilmente. È immediato l'interesse di una definizione che permetta di discriminare tra i due diversi comportamenti appena illustrati. Più precisamente si vuole introdurre la nozione di punto fisso stabile per caratterizzare quei punti fissi che si comportano come x_1 in figura 1.2, cioè per individuare quei punti fissi tali che la soluzione di un problema di Cauchy con dato iniziale vicino ad essi si mantiene vicina durante tutta la sua evoluzione.

Si danno le seguenti definizioni: sia $x_e \in I$ un punto fisso del sistema dinamico (1.5), si dice che x_e è

- *stabile* se e solo se comunque si scelga un numero reale positivo $\varepsilon > 0$ esiste $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tale che $(x_e - \delta, x_e + \delta) \subset I$ e per ogni $x_0 \in (x_e - \delta, x_e + \delta)$ la soluzione $\varphi : [t_0, +\infty) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ del problema di Cauchy associato al sistema dinamico (1.5) con dato iniziale $x(t_0) = x_0$, con $t_0 \in \mathbb{R}$ arbitrario, è tale che per ogni $t \in J$ si ha $\varphi(t) \in (x_e - \varepsilon, x_e + \varepsilon)$;
- *asintoticamente stabile* se e solo se è stabile e inoltre esiste un intorno $I' \subset I$ di x_e tale che per ogni $x_0 \in I'$ la soluzione $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ del problema di Cauchy associato al sistema dinamico (1.5) con dato iniziale $x(t_0) = x_0$, con $t_0 \in \mathbb{R}$ arbitrario, è tale che $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = x_e$;
- *instabile* se e solo se non è stabile.

Esempio 1.10. Se si considera il problema della riproduzione normale, lo studio grafico, ma anche la soluzione esplicita, mostra immediatamente che il punto 0 è un punto fisso instabile per il corrispondente sistema dinamico.

Esempio 1.11. Sia T la temperatura di un corpo all'istante t immerso in un fluido (il mare) tenuto a temperatura costante T_e . La legge di Newton afferma che la temperatura del corpo varia con il tempo con un tasso di segno opposto e proporzionale a $T(t) - T_e$.

Per scrivere l'equazione evolutiva del modello si osserva che sulla base della legge fenomenologica di Newton si ha

$$T(t + \Delta t) - T(t) = -k[T(t) - T_e]\Delta t \Rightarrow \frac{dT}{dt} = -k(T - T_e) \quad (1.7)$$

dove k è una costante reale positiva. L'evoluzione della temperatura del solido è quindi descritta dal sistema dinamico (1.5) con campo delle direzioni $f(T) = -k(T - T_e)$ definito per $T \geq 0$ (conseguenza della terza legge della termodinamica). Studiando l'equazione algebrica $f(T) = 0$ si scopre che l'unico punto fisso è proprio T_e , cioè la temperatura del corpo risulta costante solo se il sistema viene preparato con temperatura uguale a quella del bagno termico. Lo studio grafico è semplice, si veda la figura 1.3, e mostra che il punto fisso è asintoticamente stabile. Integrando per parti l'equazione evolutiva del sistema si ottiene la soluzione esplicita $T(t) = T_e + (T_0 - T_e) \exp\{-kt\}$, dove T_0 è la condizione iniziale $T(0) = T_0$.

Esempio 1.12. Equazione logistica (Verhulst 1836). Il modello logistico si ottiene da quello della riproduzione normale supponendo che la costante di proporzionalità dipenda dal numero di individui come $1 - x$. L'equazione evolutiva è, quindi, $\dot{x} = x(1 - x)$ che è nella forma (1.5) con campo delle direzioni $f(x) = x(1 - x)$ definito su $I = \mathbb{R}_+$ perché il modello non ha senso per $x < 0$. Studiando l'equazione algebrica $f(x) = 0$ si scopre che esistono i due punti fissi 0 e 1. Lo studio grafico è semplice, si veda

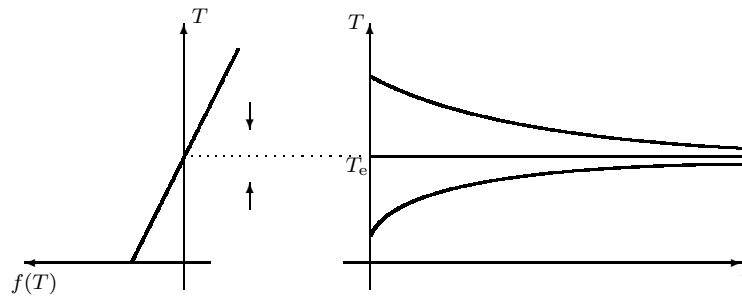


Fig. 1.3. Ritratto di fase per l'Esempio 1.11 relativo alla legge di raffreddamento di Newton. A sinistra è disegnato il grafico del campo delle direzioni ruotato di novanta gradi in verso antiorario. A destra è disegnato il ritratto di fase.

la figura 1.4, e mostra che il punto fisso 1 è asintoticamente stabile, mentre 0 è instabile. Nel grafico le linee di fase non critiche tendono asintoticamente al punto fisso stabile, ma non lo raggiungono in tempo finito. Come si è già accennato questo comportamento è un'ovvia conseguenza del teorema di unicità della soluzione del problema di Cauchy che verrà discusso nel paragrafo 1.5. In questo caso semplice questa proprietà può essere verificata mediante la soluzione esplicita che viene discussa di seguito.

Integrando per parti l'equazione evolutiva del sistema si ottiene la soluzione esplicita $x(t) = 1/[1 + ((1 - x_0)/x_0) \exp\{-t\}]$, dove x_0 è la condizione iniziale $x(0) = x_0$ non critica. Se x_0 tende a uno dei punti fissi si ottiene la soluzione costante, ma si osservi che, a rigore, il procedimento di separazione delle variabili ha senso soltanto in punti diversi dai punti critici.

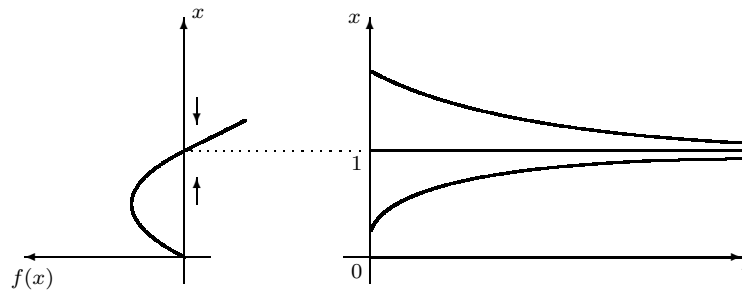


Fig. 1.4. Ritratto di fase per l'Esempio 1.12 relativo all'equazione logistica. A sinistra è disegnato il grafico del campo delle direzioni ruotato di novanta gradi in verso antiorario. A destra è disegnato il ritratto di fase.

Esempio 1.13. Un generalizzazione semplice e interessante dell'equazione logistica è costituita dal problema dell'evoluzione logistica con quota di raccolta proposta nell'Esercizio 1.5. Si veda anche [2, Capitolo 1].

Esercizio 1.3. Si supponga che il tasso di crescita di una popolazione sia proporzionale al quadrato del numero di individui. Si scriva l'equazione del modello. Si determinino i punti fissi. Si disegni il ritratto di fase nel piano delle fasi esteso e si studino euristicamente le proprietà di stabilità dei punti fissi. Si determini esplicitamente l'equazione delle linee di fase e si mostri che le curve esplodono in un tempo finito.

Soluzione: l'equazione è $\dot{x} = kx^2$ con $k \in \mathbb{R}$.

Esercizio 1.4. Supponendo uniforme la temperatura dell'atmosfera e supponendo che l'aria si comporti come un gas ideale, si costruisca un modello per la variazione della pressione con la quota. Sapendo che densità dell'aria al livello del mare vale 1250 g/m^3 , si determini a quale altezza la pressione si dimezza.

Soluzione: l'equazione $\dot{p} = -[g/(RT)]p$, la quota di dimezzamento è $h = (RT/g) \log 2 = 5.54 \text{ km}$.

Esercizio 1.5. Si modifichi l'equazione logistica supponendo che la popolazione venga decimata con tasso costante c . Si scriva l'equazione del modello. Si determinino i punti fissi. Si disegni il ritratto di fase nel piano delle fasi esteso al variare di c e si studino euristicamente le proprietà di stabilità dei punti fissi. Si determini esplicitamente l'equazione delle linee di fase.

Soluzione: l'equazione è $\dot{x} = (1-x)x - c$ con $c \in \mathbb{R}$.

Esercizio 1.6. Una variazione sul tema dell'equazione logistica permette di studiare l'evoluzione della popolazione degli insetti dell'abete rosso tenendo in conto l'effetto dei predatori. L'equazione si scrive nella forma

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{q}\right) - \frac{N^2}{1 + N^2} \quad (1.8)$$

con $r, q \geq 0$. Si disegni il diagramma di fase del modello nel piano $q-r$, ovvero si determinino il numero di punti fissi al variare dei parametri. Si disegni il ritratto di fase nelle diverse regioni del diagramma di fase.

Esercizio 1.7. Il numero di isotopi radioattivi decade con tasso proporzionale al numero di individui. Si scriva l'equazione del modello. Si determinino i punti fissi. Si disegni il ritratto di fase nel piano delle fasi esteso e si studino euristicamente le proprietà di stabilità dei punti fissi. Si determini esplicitamente l'equazione delle linee di fase.

Soluzione: l'equazione è $\dot{N} = -N/\tau$ con $\tau \geq 0$.

Esercizio 1.8. Il numero di isotopi radioattivi in un reattore decade con tasso proporzionale al numero di individui e ha un termine di crescita con tasso costante $\lambda > 0$. Si scriva l'equazione del modello. Si determinino i punti fissi. Si disegni il ritratto di fase nel piano delle fasi esteso e si studino euristicamente le proprietà di stabilità dei punti fissi. Si determini esplicitamente l'equazione delle linee di fase.

Soluzione: l'equazione è $\dot{N} = \lambda - N/\tau$ con $\tau \geq 0$.

Esercizio 1.9. Si consideri la catena radioattiva $A \rightarrow B \rightarrow C$ e si supponga che il primo decadimento abbia tasso $1/\alpha$ e il secondo tasso $1/\beta$. Si scriva l'equazione che regola l'evoluzione della specie B . L'equazione risulta non autonoma; se ne determini la soluzione. Si disegni il grafico della soluzione nel caso della catena



sapendo che i rate di decadimento sono $\tau_U = 2.48 \times 10^5$ anni e $\tau_{Th} = 8.0 \times 10^3$ anni.

Soluzione: l'equazione è $\dot{N}_B = (N_{A0}/\alpha) \exp\{-t/\alpha\} - N_B/\beta$.

Esercizio 1.10. Si determini l'equazione differenziale che regola l'evoluzione della velocità di un corpo in caduta libera in un fluido viscoso. Si determinino i punti fissi. Si disegni il ritratto di fase nel piano delle fasi esteso e si studino euristicamente le proprietà di stabilità dei punti fissi. Si determini esplicitamente l'equazione delle linee di fase.

Soluzione: l'equazione è $m\dot{v} = mg - kv$ con $k, m, g \in \mathbb{R}$.

Esercizio 1.11. Un fascio di raggi X di intensità (energia per unità di tempo e di superficie) I_0 penetra in un metallo. Si suppone che gli elettroni in banda di conduzione abbiano densità n e che ciascuno elettrone diffonda il fascio con sezione d'urto σ (potenzia irradiata diviso intensità incidente). Si determini l'equazione differenziale che regola la densità $I(x)$ del fascio che ha percorso la distanza x nel mezzo. Si

determinino i punti fissi. Si disegni il ritratto di fase nel piano delle fasi esteso e si studino euristically le proprietà di stabilità dei punti fissi. Si determini esplicitamente l'equazione delle linee di fase.

Soluzione: l'equazione è $dI/dx = -n\sigma I$, la costante $n\sigma$ è detta coefficiente lineari di scattering del gas di elettroni.

Esercizio 1.12. Una popolazione ha tasso di crescita e tasso di morte rispettivamente proporzionali al quadrato e al cubo del numero di individui $x \geq 0$. Si dimostri che l'evoluzione della popolazione è regolata dall'equazione differenziale autonoma

$$\dot{x} = ax^2 - bx^3 \quad a, b \in \mathbb{R}_+$$

Si determinino i punti fissi, si disegni il ritratto di fase nel piano delle fasi esteso e si discuta euristically la stabilità dei punti fissi.

Esercizio 1.13. Una popolazione ha tasso di crescita e tasso di morte rispettivamente proporzionali al cubo e al quadrato del numero di individui $x \geq 0$. Si dimostri che l'evoluzione della popolazione è regolata dall'equazione differenziale autonoma

$$\dot{x} = ax^3 - bx^2 \quad a, b \in \mathbb{R}_+$$

Si determinino i punti fissi, si disegni il ritratto di fase nel piano delle fasi esteso e si discuta euristically la stabilità dei punti fissi.

1.4. Stima del tempo di percorrenza

Nello studio dell'equazione logistica si è osservato che tutte le linee di fase corrispondenti a dati iniziali non critici tendono asintoticamente al punto fisso 1. Questo risultato segue immediatamente dalla soluzione esplicita del problema di Cauchy per l'equazione logistica, ma è anche un'ovvia conseguenza del teorema di unicità della soluzione del problema di Cauchy. Questo problema può essere visto sotto una terza prospettiva: l'analisi grafica permette di stabilire che una linea di fase φ del sistema dinamico logistico uscente dal punto $(0, x_0)$, con $x_0 \in (0, 1)$, raggiunge un qualsiasi punto $x_1 \in (x_0, 1)$; il tempo t_1 necessario per giungere in x_1 è dato da

$$\int_0^{t_1} \frac{1}{\varphi(s)[1 - \varphi(s)]} \frac{d\varphi}{ds} ds = \int_0^{t_1} ds \Rightarrow \int_{x_0}^{x_1} \frac{1}{x(1-x)} dx = t_1 \Rightarrow \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} \right] dx = t_1$$

Osservando che il secondo integrale diverge per $x_1 \rightarrow 1$ si conclude che la linea di fase tende asintoticamente al punto fisso 1, ma non lo raggiunge in tempo finito.

Questa tecnica può essere ovviamente applicata a un qualsiasi sistema dinamico del tipo (1.5). Sia $\varphi(t)$ una linea di fase di (1.5) passante per i due punti (t_0, x_0) e (t_1, x_1) ; il tempo di percorrenza tra i due punti considerati è dato dall'integrale

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{1}{f(x)} dx = t_1 - t_0 \tag{1.10}$$

Calcolare l'integrale (1.10) ammonta a risolvere il sistema dinamico per separazione delle variabili, quindi sembra che questo modo di guardare al problema sia ridondante se non vuoto.

Questo è parzialmente vero nel caso unidimensionale, ma sicuramente non lo è in dimensione maggiore di uno. In ogni caso se siamo interessati soltanto al tempo di percorrenza tra due punti particolari possiamo usare questa chiave di lettura e sforzarci di calcolare in modo approssimato l'integrale (1.10) cercando delle stime dall'alto e dal basso. Questo è ciò che è stato fatto nel caso dell'equazione logistica per dimostrare che le linee di fase non critiche tendono al punto fisso stabile in modo asintotico.

Esempio 1.14. Dallo studio grafico risulta che la linea di fase del sistema logistico uscente dal punto $(0, 1/2)$ giunge nel punto $(\bar{t}, 3/4)$. Il tempo \bar{t} può essere calcolato esattamente usando la soluzione esplicita dell'equazione logistica:

$$\bar{t} = \log\left(\frac{3/4}{1/2}\right) - \log\left(\frac{1-3/4}{1-1/2}\right) = \log\left(\frac{3}{2}\right) - \log\left(\frac{1/4}{1/2}\right) = \log 3 \approx 1.0986$$

Lo stesso integrale può essere stimato dall'alto riconducendolo a un integrale di tipo logaritmo; in questo caso la semplificazione è minima rispetto alla soluzione esatta, ma per funzioni f complicate il guadagno può essere notevole. È sufficiente osservare che la parabola grafico della funzione $f(x) = x(1-x)$ in corrispondenza dell'intervallo $[1/2, 3/4]$ si trova sopra la corda grafico della funzione $g(x) = -x/4 + 3/8$. Allora usando che in questo intervallo $f(x) \geq g(x)$ si ha

$$\bar{t} = \int_{1/2}^{3/4} \frac{dx}{x(1-x)} \leq \int_{1/2}^{3/4} \frac{dx}{-x/4 + 3/8} = 4 \log(4/3) \approx 1.15073$$

La stima potrebbe essere migliorata usando funzioni che approssimino sempre meglio la parabola dal basso.

Si può costruire una stima dal basso del tempo di percorrenza \bar{t} cercando una funzione semplice da integrare il cui grafico si trovi, nell'intervallo considerato, di poco sopra la parabola logistica. Si considera una funzione costituita da un segmento di retta orizzontale tangente alla parabola nel vertice raccordata a un segmento di retta tangente alla parabola nel punto di ascissa $3/4$. Si trova la funzione

$$h(x) = \begin{cases} 1/4 & 1/2 \leq x \leq 5/8 \\ -x/2 + 9/16 & 5/8 \leq x \leq 3/4 \end{cases}$$

Osservato che nell'intervallo $[1/2, 3/4]$ si ha $h(x) \geq f(x)$, si conclude che

$$\bar{t} = \int_{1/2}^{3/4} \frac{dx}{x(1-x)} \geq \int_{1/2}^{5/8} \frac{dx}{1/4} + \int_{5/8}^{3/4} \frac{dx}{-x/2 + 9/16} = 1/2 + 2 \log(4/3) \approx 1.07536$$

In conclusione il tempo di percorrenza è stimato come $1/2 + 2 \log(4/3) \leq \bar{t} \leq 4 \log(4/3)$ e l'errore commesso nella stima vale $4 \log(4/3) - (1/2 + 2 \log(4/3)) = 2 \log(4/3) - 1/2 \approx 0.07536$.

Esercizio 1.14. Si consideri il sistema dinamico costituito dall'equazione logistica con quota di raccolta proposto nell'Esempio 1.13 e nell'Esercizio 1.5. Si dimostri che nel caso $c > 1/4$ tutte le linee di fase con dato iniziale $x_0 > 0$ raggiungono il valore $x = 0$ in un tempo finito.

Esercizio 1.15. Si studi graficamente il sistema dinamico $\dot{x} = x^2$ con $x \in \mathbb{R}$. Si verifichi che la linea di fase emergente dal punto $(0, 1)$ passa per il punto $(\bar{t}, 2)$. Si stimi il tempo di percorrenza \bar{t} dall'alto e dl basso e poi si confrontino i risultati con il risultato esatto.

Esercizio 1.16. Si studi graficamente il sistema dinamico $\dot{x} = \sin x / (2 + \cos x)$ con $x \in \mathbb{R}$. Si verifichi che la linea di fase emergente dal punto $(0, 1/2)$ passa per il punto $(\bar{t}, 3)$. Si stimi il tempo di percorrenza \bar{t} dall'alto e dl basso. Se possibile si confrontino i risultati con il risultato esatto.

1.5. Esistenza e unicità

Nei paragrafi precedenti è stato già osservato che la costruzione grafica usata per studiare il comportamento del sistema dinamico (1.5) si basa su alcune proprietà fondamentali della soluzione del problema di Cauchy che valgono sotto opportune ipotesi di regolarità sul campo delle direzioni. Alla base della teoria vi è la condizione di Lipschitz che verrà introdotta nel seguito. Lo scopo di questo paragrafo è quello di stabilire i risultati fondamentali e di mostrare come la condizione di Lipschitz emerga in modo naturale. Le dimostrazioni verranno condotte sfruttando la specificità del caso unidimensionale, cioè riconducendo la soluzione delle equazioni differenziali al calcolo di un integrale definito; questa strategia, ovviamente, non ha alcuna possibilità di successo in dimensione maggiore o uguale a due. I risultati fondamentali che permettono la costruzione grafica discussa in precedenza sono essenzialmente tre:

- esistenza della soluzione del problema di Cauchy: questa proprietà permette di tracciare la linea di fase uscente da un punto dello spazio delle fasi esteso. Essa verrà dimostrata sulla base della sola ipotesi di continuità del campo delle direzioni f .
- Unicità della soluzione del problema di Cauchy: questa proprietà permette di affermare che da ogni punto dello spazio delle fasi esteso emerge una e una sola linea di fase. Essa verrà dimostrata sulla base della sola ipotesi di continuità del campo delle direzioni f per dati iniziali non critici, mentre per dati iniziali corrispondenti a un punto critico sarà necessario ricorrere a ipotesi più restrittive su f e introdurre la condizione di Lipschitz.
- Continuità della soluzione rispetto alle condizioni iniziali: questa proprietà permette di tracciare le linee di fase emergenti da punti vicini dello spazio delle fasi abbastanza vicine tra loro almeno per piccoli intervalli di tempi. Essa non verrà discussa in dettaglio in queste note e si rimanda lo studente a testi (veri) sulla teoria delle equazioni differenziali.

Teorema 1.15 *Si consideri il sistema dinamico (1.5) con $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua sull'intervallo aperto $I \subset \mathbb{R}$ e i due numeri reali $t_0 \in \mathbb{R}$ e $x_0 \in I$. Il problema di Cauchy associato a (1.5) con dato iniziale $x(t_0) = x_0$ ammette almeno una soluzione locale, cioè esiste un intorno J di t_0 e una funzione $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}$ soluzione del problema di Cauchy considerato.*

Dimostrazione. Sia $f(x_0) = 0$, la funzione $\varphi : t \in \mathbb{R} \rightarrow \varphi(t) = x_0$ è una soluzione globale del problema di Cauchy.

Sia $f(x_0) \neq 0$: per la continuità di f esiste un intorno $I' \subset I$ di x_0 in cui f è diversa da zero. Allora per ogni $x \in I'$ si può esprimere il tempo t impiegato dalla soluzione per giungere in x come

$$\int_{x_0}^x \frac{dy}{f(y)} = t - t_0$$

L'integrale, infatti, ha senso perché in ogni punto dell'intervallo di integrazione la funzione integranda $1/f$ è definita e continua. L'integrale precedente definisce la funzione

$$\psi : x \in I' \rightarrow \psi(x) := t_0 + \int_{x_0}^x \frac{dy}{f(y)}$$

Per costruire la soluzione del problema di Cauchy si dovrà semplicemente determinare la funzione inversa di ψ .

La continuità di f su I' e il fatto che per ogni $x \in I'$ si abbia $f(x) \neq 0$, implica che f ha segno definito in I' ; ciò implica, sulla base delle proprietà elementari degli integrali definiti, che la funzione ψ è monotona in I' . Si ha, allora, che ψ è invertibile, cioè detto J il codominio di ψ esiste la funzione

$$\varphi : t \in J \rightarrow \varphi(t) \in I' \quad \text{tale che} \quad \psi(\varphi(t)) = t$$

La funzione φ appena definita è una soluzione locale del problema di Cauchy, infatti:

- dalla definizione di ψ si ha immediatamente che

$$\psi(x_0) = t_0 + \int_{x_0}^{x_0} \frac{dy}{f(y)} = t_0$$

e per definizione di φ , ciò implica $\varphi(t_0) = x_0$;

- osservato che ψ è derivabile in I' e $\psi'(x) = 1/f(x)$ per ogni $x \in I'$, usando le proprietà della derivata della funzione inversa si ha che per ogni $\bar{t} \in J$

$$\frac{d\varphi}{dt}(\bar{t}) = \left[\frac{d\psi}{dx}(\bar{x}) \right]^{-1} = \left[\frac{1}{f(\bar{x})} \right]^{-1} = f(\bar{x}) = f(\varphi(\bar{t}))$$

dove $\bar{x} \in I'$ è tale che $\psi(\bar{x}) = \bar{t}$.

Dall'arbitrarietà di \bar{t} in J segue la tesi.

Teorema 1.15 \square

In tutti gli esempi precedenti sono state ricavate soluzioni esplicite dei problemi di Cauchy valide su tutto l'asse reale, cioè sono state determinate soluzioni *globali*. Il teorema precedente è un enunciato “molto prudente” che si limita ad asserire l'esistenza della soluzione solo localmente, cioè soltanto in un intorno dell'istante t_0 in cui viene assegnato il dato iniziale. Come è illustrato nell'esempio seguente questa precauzione è necessaria, perché per taluni sistemi dinamici le soluzioni divergono (esplodono) in tempo finito e quindi hanno senso soltanto localmente.

Esempio 1.16. Si consideri la funzione $f : x \in \mathbb{R}_+ \rightarrow f(x) = x^\alpha \in \mathbb{R}$ con $\alpha > 0$ e il problema di Cauchy associato al sistema dinamico $\dot{x} = f(x)$ con dato iniziale $x(0) = x_0 > 0$.

Si osserva che l'unico punto fisso del campo delle direzioni è 0, quindi il dato iniziale considerato è non critico. Si può quindi procedere alla soluzione dell'equazione differenziale con il metodo di separazione delle variabili. Nel caso $\alpha = 1$ si ha l'equazione della riproduzione normale e la soluzione del problema di Cauchy è $x(t) = x_0 \exp\{t\}$; nel caso $\alpha \neq 1$ si ha

$$\int_{x_0}^x \frac{dy}{y^\alpha} = \int_{t_0}^t ds \Rightarrow x^{1-\alpha} = x_0^{1-\alpha} + (1-\alpha)t$$

Con qualche semplice passaggio algebrico è possibile invertire l'equazione precedente distinguendo i due casi $\alpha < 1$ e $\alpha > 1$. Il risultato può essere sintetizzato nel modo seguente:

$$x(t) = \begin{cases} [x_0^{1-\alpha} + (1-\alpha)t]^{1/(1-\alpha)} & \alpha < 1 \\ x_0 \exp\{t\} & \alpha = 1 \\ \left[\frac{1}{x_0^{-(\alpha-1)} - (\alpha-1)t} \right]^{1/(\alpha-1)} & \alpha > 1 \end{cases} \quad (1.11)$$

È immediato osservare che per $\alpha \leq 1$ la soluzione è definita per ogni t , quindi è una soluzione globale. Nel caso $\alpha > 1$, invece, la soluzione diverge positivamente per t che tende a $\bar{t} = x_0^{-(\alpha-1)}/(\alpha-1)$ e quindi ha senso soltanto fino a \bar{t} . In conclusione in questo caso la soluzione è locale ed esplosa in tempo finito.

Sotto l'ipotesi di continuità del campo delle direzioni f e per dati iniziali non critici è possibile stabilire il seguente risultato di unicità.

Teorema 1.17 (primo sull'unicità) *Si consideri il sistema dinamico (1.5) con $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continua sull'intervallo aperto $I \subset \mathbb{R}$ e i due numeri reali $t_0 \in \mathbb{R}$ e $x_0 \in I$. Sia $f(x_0) \neq 0$ e siano $\varphi_1, \varphi_2 : J \rightarrow \mathbb{R}$ due soluzioni del problema di Cauchy associato a (1.5) con dato iniziale $x(t_0) = x_0$ nell'intorno J di t_0 . Detto J' il più grande intervallo aperto sottoinsieme di J tale che $f(\varphi_1(t)) \neq 0$ e $f(\varphi_2(t)) \neq 0$ per ogni $t \in J'$, si ha che $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$ per ogni $t \in J'$.*

Dimostrazione. Sia $J \subset \mathbb{R}$ un intorno di t_0 e $\varphi_1, \varphi_2 : J \rightarrow \mathbb{R}$ due soluzioni del problema di Cauchy. Per continuità esiste un intorno $J' \subset J$ sufficientemente piccolo di t_0 tale che $f(\varphi_1(t)) \neq 0$ e $f(\varphi_2(t)) \neq 0$ per ogni $t \in J'$. Sia $\bar{t} \in J'$ arbitrario e $\bar{\varphi}_i := \varphi_i(\bar{t})$ per $i = 1, 2$; si ha

$$\dot{\varphi}_i(t) = f(\varphi_i(t)) \quad \forall t \in J', \quad i = 1, 2 \Rightarrow \int_{t_0}^{\bar{t}} \frac{1}{f(\varphi_i(t))} \frac{d\varphi_i}{dt} dt = \bar{t} - t_0 \Rightarrow \int_{x_0}^{\bar{\varphi}_1} \frac{dx}{f(x)} = \int_{x_0}^{\bar{\varphi}_2} \frac{dx}{f(x)}$$

Osservato che $1/f$ ha segno definito nei due intervalli di integrazione, si ha che $\bar{\varphi}_1 = \bar{\varphi}_2$. Dall'arbitrarietà di $\bar{t} \in J'$ segue l'asserto.

Teorema 1.17 \square

Il teorema precedente afferma che se il dato iniziale non è critico, allora comunque si prendano due soluzioni locali del problema di Cauchy queste si mantengono coincidenti almeno fino al raggiungimento di un punto critico; per quanto ne sappiamo, a partire dal punto critico può accadere di tutto (questo aspetto del problema verrà illustrato nell'Esempio 1.19). In altri termini il teorema garantisce l'unicità della soluzione in un intorno sufficientemente piccolo dell'istante iniziale per dati iniziali non critici. Se il dato iniziale è critico, invece, cioè se $f(x_0) = 0$, allora l'ipotesi di continuità su f non è più sufficiente a garantire l'unicità della soluzione del problema di Cauchy. Questa affermazione viene illustrata nell'esempio che segue.

Esempio 1.18. Si considera il sistema dinamico studiato nell'Esempio 1.16. La soluzione (1.11) è stata determinata in corrispondenza di un dato iniziale non critico, si vuole ora esaminare cosa accade se in questa soluzione si pone $x_0 = 0$.

Nel caso $\alpha > 1$ si vede subito che la soluzione perde di significato perché sostituendo 0 a x_0 nella corrispondente espressione (1.11) si ottiene una funzione mal definita. Questo risultato è perfettamente

sensato, perché si ricorda che le espressioni (1.11) sono state determinate per separazione delle variabili e nel caso di sistemi dinamici del tipo (1.5) questa procedura ha senso soltanto fuori dai punti critici.

Nel caso $\alpha = 1$ sostituendo 0 a x_0 si ottiene la soluzione costante $x(t) = 0$, cioè si ottiene una soluzione del problema di Cauchy considerato coincidente con la linea di fase costante uscente dal punto fisso.

Nel caso $\alpha < 1$ sostituendo 0 a x_0 si ottiene la funzione $x(t) = [(1 - \alpha)t]^{1/(1-\alpha)}$ che è ben definita per ogni $t \geq 0$. Non è possibile concludere brutalmente che si tratta della soluzione del problema di Cauchy con dato iniziale critico, perché è stata ottenuta con una procedura matematicamente non sensata; d'altro canto è immediato verificare che si tratta effettivamente di una soluzione del problema, infatti

- $x(0) = 0$;
- $\dot{x} = (1/(1 - \alpha))[(1 - \alpha)t]^{\alpha/(1-\alpha)}(1 - \alpha) = [(1 - \alpha)t]^{\alpha/(1-\alpha)}$;
- $f(x(t)) = [(1 - \alpha)t]^{\alpha/(1-\alpha)}$.

In conclusione il sistema dinamico considerato nel caso $\alpha < 1$ ammette due soluzioni distinte del problema di Cauchy con dato iniziale critico $x(0) = 0$.

Esempio 1.19. Si considera il sistema dinamico dell'Esempio 1.16 nel caso $\alpha = 2/3$; specificando le soluzioni già determinate negli esempi precedenti si ha che le funzioni $\varphi_1(t) = 0$ e $\varphi_2(t) = (t/3)^3$ sono soluzioni dell'equazione differenziale $\dot{x} = x^{2/3}$ su tutto l'asse reale, cioè per ogni $t \in \mathbb{R}$. Usando queste due funzioni è possibile costruire le due seguenti soluzioni al problema di Cauchy associato a $\dot{x} = x^{2/3}$ con dato iniziale $x(-3) = -1$:

$$\psi_1(t) := \begin{cases} (t/3)^3 & t \in [-1, 0] \\ 0 & t \geq 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \psi_2(t) = (t/3)^3 \quad t \in [-1, +\infty)$$

Il problema di Cauchy considerato ha dato iniziale non critico, le due soluzioni determinate sono coincidenti fino al raggiungimento del punto fisso 0 e poi si differenziano.

Gli esempi precedenti mostrano che la perdita di unicità per dati iniziali critici si ha per un campo delle direzioni che tende a zero nel punto fisso più lentamente dell'andamento lineare; questo vuol dire che il campo delle direzioni si mantiene abbastanza elevato anche vicino al punto critico e quindi esiste una linea di fase che congiunge il punto critico a punti dello spazio delle fasi esteso non critici. Più precisamente questo andamento del campo delle direzioni implica che il sistema raggiunge un punto fisso in un tempo finito; da questo punto di vista tutto il problema sta nel fatto che per $\alpha < 1$

$$\int_0^a \frac{dx}{x^\alpha} < \infty$$

dove $a > 0$ è arbitrario, cioè l'integrale che esprime il tempo di percorrenza da un punto non critico a un punto critico è finito.

Sulla base delle osservazioni precedenti appare chiara l'importanza della seguente definizione: sia $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua sull'intervallo aperto $I \subset \mathbb{R}$. Si dice che f è di Lipschitz (o lipschitziana) su I se e solo se esiste un numero reale L tale che

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \tag{1.12}$$

uniformemente in $x, y \in I$.

L'avverbio uniformemente vuol dire che la costante L non dipende dalla scelta di x e y nell'intervallo ma al più dipende dall'intervallo I . È interessante osservare che se 0 è un

punto fisso, allora la condizione di Lipschitz in zero si scrive $|f(x)| \leq L|x|$ e questo spiega perché questa condizione assicura che l'integrale che esprime il tempo per giungere in un punto fisso è divergente. Si osserva, infine, che la funzione x^α , con $\alpha < 1$, ha derivata destra verticale in zero, quindi è di Lipschitz in ogni intervallo che non contiene 0, mentre non lo è negli intervalli che contengono 0 perché comunque si scelga un numero reale M esiste sempre un piccolo intorno destro di 0 in cui $|x^\alpha| > M|x|$.

Stabilire se una funzione è di Lipschitz può essere non banale, quindi è utile un teorema che fornisca una condizione sufficiente.

Proposizione 1.20 *Sia $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua sull'intervallo aperto $I \subset \mathbb{R}$. Se f è derivabile su I con derivata prima limitata, allora f è di Lipschitz con costante $L = \max_{x \in I} |f'(x)|$.*

Dimostrazione. Siano $x, y \in I$ arbitrari; in virtù del teorema di Lagrange esiste $\xi \in [x, y]$ tale che $f(x) - f(y) = f'(\xi)(x - y)$. Allora

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)||x - y| \leq L|x - y|$$

Proposizione 1.20 \square

Esempio 1.21. Si consideri il sistema dinamico (1.5) con campo delle direzioni $f(x) = 0$ per $x \leq 0$ e $f(x) = x$ per $x \geq 0$. Si dimostra che f è di Lipschitz con costante 1 in ciascun intervallo aperto $I \subset \mathbb{R}$.

Se $I \not\ni 0$ l'affermazione segue immediatamente dalla Proposizione 1.20. Se $I \ni 0$ non è possibile usare la proposizione precedente, quindi questo esempio costituisce una prova che la condizione contenuta in detta proposizione è sufficiente ma non necessaria. Per dimostrare la lipschitzianità anche in questo caso si considerano $x, y \in I$ e si distinguono i tre casi seguenti:

- $x < y \leq 0$: $|f(x) - f(y)| = |0 - 0| = 0 \leq |x - y|$;
- $x \leq 0 < y$: $|f(x) - f(y)| = |0 - y| \leq |x - y|$, dove nell'ultimo passaggio si è usato che x è minore o uguale a zero;
- $0 < x < y$: $|f(x) - f(y)| = |x - y| \leq |x - y|$.

Si enuncia, ora, un lemma che, sulla base dell'ipotesi di lipschitzianità del campo delle direzioni, assicura che una linea di fase che emerga da un punto non critico non giungerà mai in un punto critico, al limite vi convergerà in tempo infinito. Sulla base di questo lemma si potrà poi dimostrare il teorema di unicità della soluzione del problema di Cauchy per un generico dato iniziale.

Lemma 1.22 *Si consideri il sistema dinamico (1.5) con $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continua e di Lipschitz sull'intervallo aperto $I \subset \mathbb{R}$; siano $t_0 \in \mathbb{R}$ e $x_0 \in I$ tali che $f(x_0) \neq 0$. Detta $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}$ una soluzione del problema di Cauchy associato a (1.5) con dato iniziale $x(t_0) = x_0$ nell'intorno J di t_0 , si ha che $f(\varphi(t)) \neq 0$ per ogni $t \in J$.*

Dimostrazione. Per assurdo esiste almeno un punto $t \in J$ tale che $f(\varphi(t)) = 0$. Sia $t_1 > t_0$ l'istante più vicino a t_0 in cui la linea di fase passa per un punto critico, cioè $t_1 := \inf\{t \in J : f(\varphi(t)) = 0\}$. L'idea alla base della dimostrazione che segue è quella di

dimostrare che il tempo $t_1 - t_0$ che il sistema dinamico impiega per giungere nel punto fisso $\varphi(t_1)$ è infinito e cioè costituisce un assurdo.

Si pone $x_1 := \varphi(t_1)$ e, per fissare le idee, si suppone $x_0 < x_1$; la dimostrazione procederebbe in modo analogo nel caso complementare. Si scelga $x_2 \in (x_0, x_1)$; dalla derivabilità di φ e dal fatto che $\dot{\varphi}(t) = f(\varphi(t)) \neq 0$ per ogni $t \in [t_0, t_1)$, segue che $\dot{\varphi}$ ha segno costante in $[t_0, t_1)$ e quindi φ è invertibile nel medesimo intervallo. Allora esiste un unico $t_2 \in (t_0, t_1)$ tale che $\varphi(t_2) = x_2$. Ora

$$\dot{\varphi}(t) = f(\varphi(t)) \text{ e } f(\varphi(t)) \neq 0 \forall t \in [t_0, t_1) \Rightarrow \int_{t_0}^{t_2} \frac{\dot{\varphi}(t)}{f(\varphi(t))} dt = \int_{t_0}^{t_2} dt \Rightarrow \int_{x_0}^{\varphi(t_2)} \frac{dx}{f(x)} = t_2 - t_0$$

Passando al limite per $t_2 \rightarrow t_1$ si ha

$$t_1 - t_0 = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \int_{x_0}^{\varphi(t_2)} \frac{dx}{f(x)} = \lim_{x_2 \rightarrow x_1} \int_{x_0}^{x_2} \frac{dx}{f(x)}$$

L'assurdo deriva dal fatto che, sulla base della condizione di Lipschitz, l'ultimo integrale, che rappresenta il tempo necessario per giungere in un punto fisso a partire da uno non fisso, è divergente; infatti preso $x \in [x_0, x_1]$ si ha

$$|f(x)| = |f(x) - f(x_1)| \leq L|x - x_1| \Rightarrow f(x) \leq L(x_1 - x)$$

dove nell'ultimo passaggio si è usato che come conseguenza dell'ipotesi di lavoro $x_1 > x_0$, si ha che $f(x)$ è positiva nell'intervallo $[x_0, x_1)$; ovviamente nel caso complementare si ragiona in modo analogo. In conclusione

$$t_1 - t_0 = \lim_{x_2 \rightarrow x_1} \int_{x_0}^{x_2} \frac{dx}{f(x)} \geq \lim_{x_2 \rightarrow x_1} \int_{x_0}^{x_2} \frac{dx}{L(x_1 - x)} = +\infty$$

Lemma 1.22 \square

Teorema 1.23 (secondo sull'unicità) *Si consideri il sistema dinamico (1.5) con $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continua sull'intervallo aperto $I \subset \mathbb{R}$ e i due numeri reali $t_0 \in \mathbb{R}$ e $x_0 \in I$. Se f è di Lipschitz su I allora il problema di Cauchy associato a (1.5) con dato iniziale $x(t_0) = x_0$ ammette una soluzione locale unica.*

Dimostrazione. Il teorema segue immediatamente dal Teorema 1.17 e dal Lemma 1.22.

Teorema 1.17 \square

Esercizio 1.17. Si consideri il sistema dinamico (1.5) con campo delle direzioni $f(x) = 0$ per $x \leq 0$ e $f(x) = \sin x$ per $x \geq 0$. Si dimostri che f è di Lipschitz in ciascun aperto sottoinsieme di \mathbb{R} e si disegni il ritratto di fase del sistema dinamico discutendo la stabilità dei punti critici.

Esercizio 1.18. Si consideri il sistema dinamico (1.5) con campo delle direzioni $f(x) = 0$ per $x \leq 0$ e $f(x) = x \sin x$ per $x \geq 0$. Si dimostri che f è di Lipschitz in ciascun aperto sottoinsieme di \mathbb{R} e si disegni il ritratto di fase del sistema dinamico discutendo la stabilità dei punti critici.

Esercizio 1.19. Si consideri il sistema dinamico (1.5) con campo delle direzioni $f(x) = 0$ per $x \leq 0$ e $f(x) = x^2 \cos x$ per $x \geq 0$. Si dimostri che f è di Lipschitz in ciascun aperto sottoinsieme di \mathbb{R} e si disegni il ritratto di fase del sistema dinamico discutendo la stabilità dei punti critici.

Esercizio 1.20. Si consideri il sistema dinamico (1.5) con campo delle direzioni $f(x) = \exp\{-x^2\} \cos x$. Si dimostri che f è di Lipschitz in ciascun aperto sottoinsieme di \mathbb{R} e si disegni il ritratto di fase del sistema dinamico discutendo la stabilità dei punti critici.

Esercizio 1.21. Si consideri il sistema dinamico (1.5) con campo delle direzioni $f(x) = (1 - x^2)/(1 + x^2)$. Si dimostri che f è di Lipschitz in ciascun aperto sottoinsieme di \mathbb{R} e si disegni il ritratto di fase del sistema dinamico discutendo la stabilità dei punti critici.

2. Equazioni differenziali ordinarie autonome di ordine superiore al primo

Dopo un breve richiamo delle definizioni e dei risultati fondamentali per i sistemi di equazioni differenziali ordinari autonomi in dimensione qualsiasi, dati senza dimostrazione, si discute lo studio grafico di questi sistemi.

2.1. Aspetti generali e teoremi fondamentali

Si dice **sistema di equazioni differenziali autonomo** del primo ordine in dimensione $n \in \mathbb{N}^*$ nelle funzioni incognite $x_1, \dots, x_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, \dots, x_n) \end{cases} \quad (2.1)$$

dove le n funzioni $f_1, \dots, f_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sono assegnate e la loro collezione è detta **campo delle direzioni**. Il problema consiste nel determinare n funzioni $x_i : t \in J \subset \mathbb{R} \rightarrow x_i(t) \in \mathbb{R}$, dove $i = 1, \dots, n$ e J è un intervallo, tali che si abbia $\dot{x}_i(t) = f_i(x_1(t), \dots, x_n(t))$ per ogni $t \in J$ e $i = 1, \dots, n$. L'aggettivo autonomo sta a significare che le funzioni f_i non dipendono esplicitamente dal tempo. L'oggetto (2.1) è detto anche **sistema dinamico in dimensione n** e si riduce al problema (1.5) nel caso $n = 1$.

Siano $t_0, x_{1,0}, \dots, x_{n,0} \in \mathbb{R}$, risolvere il problema di Cauchy associato al sistema di equazioni differenziali (2.1) con dato iniziale $x_{1,0}, \dots, x_{n,0} \in \mathbb{R}$ in t_0 vuol dire determinare una soluzione $x_i : J \rightarrow \mathbb{R}$, con $i = 1, \dots, n$, del sistema (2.1) in un intorno J di t_0 tale che

$$x_1(t_0) = x_{1,0}, \quad x_2(t_0) = x_{1,0}, \dots, x_n(t_0) = x_{n,0}$$

Il problema (2.1) è ovviamente interessante in sé, ma un aspetto importante è che una generica equazione differenziale di ordine n autonoma e in forma normale può essere ricondotta allo studio di un sistema dinamico nella forma (2.1). Si consideri, infatti, il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} x^{(n)} = f(x, x^{(1)}, \dots, x^{(n-1)}) \\ x(t_0) = x_{1,0}, x^{(1)}(t_0) = x_{2,0}, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = x_{n,0} \end{cases}$$

con $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione assegnata e i $t_0, x_{1,0}, \dots, x_{n,0}$ numeri reali assegnati. Si pone

$$x_1 = x, x_2 = x^{(1)}, \dots, x_n = x^{(n-1)}$$

allora la condizione iniziale diventa

$$x_1(t_0) = x_{1,0}, x_2(t_0) = x_{2,0}, \dots, x_n(t_0) = x_{n,0}$$

inoltre

$$x^{(n)} = f(x, x^{(1)}, \dots, x^{(n-1)}) \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x^{(1)} = x_2 \\ \dot{x}_2 = x^{(2)} = x_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_n = x^{(n)} = f(x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

In conclusione il problema di Cauchy per l'equazione differenziale autonoma di ordine n è stato ridotto a un problema di Cauchy per un sistema dinamico nella forma (2.1) con le seguenti funzioni al secondo membro:

$$f_1(x_1, \dots, x_n) = x_2, f_2(x_1, \dots, x_n) = x_3, \dots, f_n(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Il problema di Cauchy per il sistema dinamico (2.1) può essere posto in una forma molto compatta se si introduce la seguente notazione vettoriale. Si pone $x : t \in \mathbb{R} \rightarrow x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n$ per la funzione incognita, $x_0 = (x_{1,0}, \dots, x_{n,0}) \in \mathbb{R}^n$ per il dato iniziale e

$$f : (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \rightarrow f(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n)) \in \mathbb{R}^n$$

per il campo delle direzioni; allora il problema di Cauchy per il sistema dinamico (2.1) si scrive

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (2.2)$$

dove t_0 è un numero reale assegnato. Con questa notazione il problema n -dimensionale viene scritto in una forma identica a quella tipica del problema di Cauchy per il sistema dinamico unidimensionale (1.5); ma ovviamente si tratta soltanto di un trucco.

Esempio 2.1. Il moto di una particella di massa m lungo l'asse y sottoposta all'azione di una forza $g(y)$ è la soluzione del problema di Cauchy per l'equazione differenziale del secondo ordine $\ddot{y} = (1/m)g$ con dato iniziale $y(0) = y_0$ e $\dot{y}(0) = \dot{y}_0$. Se si pone $q = y$ per la posizione e $p = m\dot{y}$ per la quantità di moto si ha

$$\ddot{y} = \frac{1}{m}g \Rightarrow \begin{cases} \dot{q} = \dot{y} = (1/m)p \\ \dot{p} = m\ddot{y} = g \end{cases} \Rightarrow \dot{x} = f(x)$$

dove si è posto $x = (q, p)$ per la funzione incognita e $f = ((1/m)p, g)$ per il campo delle direzioni. Con questa notazione la condizione di Cauchy si scrive $x(0) = (q(0), p(0)) = (y(0), m\dot{y}(0)) = (y_0, m\dot{y}_0)$.

Lo studio dei sistemi dinamici n -dimensionali si basa sui fondamentali teoremi di esistenza e di unicità che in queste note verranno soltanto enunciati. L'esistenza può essere stabilita sulla base della continuità del campo delle direzioni in un insieme chiuso,

mentre per l'unicità sarà necessario richiedere la lipschizianità del campo delle direzioni f .

Prima di enunciare i teoremi si richiamano alcune nozioni elementari di topologia e di analisi in \mathbb{R}^n . Sia $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, si definisce **norma** o **modulo** di x il numero reale non negativo $|x| := (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}$, con questa nozione si dà allo spazio \mathbb{R}^n la struttura di spazio metrico rispetto alla distanza euclidea $|x - y| = [(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2]^{1/2}$. Dato $x \in \mathbb{R}^n$ e un numero reale positivo $\varepsilon > 0$, si definisce **intorno sferico aperto** (o **palla aperta**) di centro x e raggio ε l'insieme $B_\varepsilon(x) := \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| < \varepsilon\}$; si dice, invece, **intorno sferico chiuso** (o **palla chiusa**) di centro x e raggio ε l'insieme $\bar{B}_\varepsilon(x) := \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| \leq \varepsilon\}$. Sia $I \subset \mathbb{R}^n$ si dice che I è **aperto** se e solo se per ogni $x \in I$ esiste $\varepsilon > 0$ tale che $B_\varepsilon(x) \subset I$; si dice che I è **chiuso** se e solo se $\mathbb{R}^n \setminus I$ è aperto. Si dice che $I \subset \mathbb{R}^n$ è **connesso** se e solo se non esistono due sottoinsiemi $I_1, I_2 \subset I$ disgiunti e non vuoti tali che: $I_1 \cup I_2 = I$ e per ogni $i = 1, 2$ e per ogni $x \in I_i$ esista $r_i > 0$ tale che $B_{r_i}(x) \cap I \subset I_i$. Sia $f : I \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definita sull'aperto I : si dice che f è **continua in** $x \in I$ se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tale se $|y - x| < \delta$ allora $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$; si dice che f è **continua su** I se e solo se è continua in ogni punto $x \in I$.

Teorema 2.2 (Cauchy–Peano) *Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua nella palla chiusa $\bar{B}_\beta(x_0)$ di centro $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e raggio $\beta > 0$. Allora il problema di Cauchy associato al sistema dinamico (2.2) con dato iniziale $x(t_0) = x_0$, dove t_0 è un numero reale, ammette una soluzione definita in un intorno chiuso di t_0 di raggio β/M , dove $M := \max_{x \in B_\beta(x_0)} |f(x)|$.*

Il teorema precedente assicura l'esistenza di una soluzione del problema di Cauchy sulla base della sola continuità del campo delle direzioni. Per avere informazioni sull'unicità della soluzione è necessario rafforzare le ipotesi sul campo f introducendo la condizione di Lipschitz. Sia $f : I \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua sull'aperto connesso $I \subset \mathbb{R}^n$. Si dice che f è **di Lipschitz** (o **lipschitziana**) su I se e solo se esiste un numero reale L tale che

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad (2.3)$$

uniformemente in $x, y \in I$.

Si osserva che la costante L non dipende dalla scelta di x e di y nell'aperto I ma in generale dipenderà da I . Si noti, anche, che con la notazione adottata per la distanza in \mathbb{R}^n la condizione (2.3) appare identica alla sua controparte unidimensionale (1.12). In realtà scrivendo la (2.3) in modo esteso si ottiene

$$[(f_1(x) - f_1(y))^2 + \dots + (f_n(x) - f_n(y))^2]^{1/2} \leq L[(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2]^{1/2} \quad (2.4)$$

Teorema 2.3 (Cauchy) *Sia $f : I \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua nell'aperto connesso $I \subset \mathbb{R}^n$. Se f è di Lipschitz su I , allora il problema di Cauchy associato al sistema dinamico (2.2) con dato iniziale $x(t_0) = x_0$, dove t_0 è un numero reale, ammette una soluzione unica definita in un intorno di t_0 sufficientemente piccolo.*

Come nel caso unidimensionale verificare la validità della condizione di Lipschitz può risultare complicato; è utile la seguente condizione sufficiente.

Proposizione 2.4 *Sia $f : I \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua sull'aperto convesso $I \subset \mathbb{R}^n$. Se esistono limitate le derivate parziali prime di f in I , allora f è di Lipschitz con costante*

$$L = n \max_{x \in I} \max_{i,j=1,\dots,n} \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right| \quad (2.5)$$

Dimostrazione. Siano $x, y \in I$ arbitrari. Dal momento che I è convesso si ha che il segmento di estremi x e y è tutto contenuto in I ; in virtù del teorema di Lagrange per le funzioni di più variabili esistono ξ_{ij} appartenenti al segmento congiungente x e y tali che

$$f_i(x) = f_i(y) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\xi_{ij})(x_j - y_j)$$

Allora

$$|f_i(x) - f_i(y)| \leq \left| \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\xi_{ij})(x_j - y_j) \right| \leq \left[\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\xi_{ij}) \right)^2 \right]^{1/2} |x - y|$$

dove nella maggiorazione è stata usata la disuguaglianza di Schwarz, si veda il Teorema ?? in Appendice ?. La tesi segue facilmente dalla disuguaglianza precedente.

Proposizione 1.20 \square

2.2. Descrizione grafica e definizione di stabilità secondo Liapunov

Sia $f : (x_1, \dots, x_n) \in I \subset \mathbb{R}^n \rightarrow f(x) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n)) \in \mathbb{R}^n$ una funzione vettoriale continua e di Lipschitz sull'aperto connesso $I \subset \mathbb{R}^n$; si considera il sistema dinamico

$$\dot{x} = f(x) \quad (2.6)$$

per la funzione vettoriale incognita $x : t \in \mathbb{R} \rightarrow x(t) := (x_1(t), \dots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n$.

Lo stato del sistema dinamico all'istante t può essere rappresentato come un punto appartenente a $I \subset \mathbb{R}^n$, per questo motivo I è detto **spazio degli stati** (o **spazio delle fasi**) associato al sistema dinamico (2.6). Una soluzione $\varphi : t \in J \subset \mathbb{R} \rightarrow \varphi(t) \in I \subset \mathbb{R}^n$ del problema di Cauchy associato a (2.6) con dato iniziale $x(t_0) = x_0 \in I$ è una curva nello spazio delle fasi detta **curva integrale** del problema di Cauchy o **moto** con dato iniziale x_0 . L'immagine della curva integrale, ovvero il luogo costituito da tutti i punti dello spazio delle fasi occupati dalla curva integrale, è detta **curva** o **orbita** o **traiettoria** di fase, passante per il punto $x_0 \in I$. Quindi formulare un problema di Cauchy associato a (2.6) vuol dire preparare il sistema dinamico in un certo punto dello spazio delle fasi e risolvere il problema vuol dire determinare l'orbita uscente dal punto iniziale che il sistema segue durante la sua evoluzione. In virtù del Teorema 2.3 per ciascun punto dello spazio delle fasi passa una e una sola orbita di fase. Dalle proprietà delle curve segue immediatamente che il campo delle direzioni f è in ogni punto di un'orbita di fase un vettore tangente all'orbita

in quel punto, infatti considerata la curva di fase $\varphi : t \in J \subset \mathbb{R} \rightarrow \varphi(t) \in I \subset \mathbb{R}^n$ il vettore \bar{T} tangente alla curva nel punto $\varphi(\bar{t})$ raggiunto dalla curva all'istante \bar{t} è dato da

$$\bar{T} := (\dot{\varphi}_1(\bar{t}), \dots, \dot{\varphi}_n(\bar{t})) = (f_1(\varphi(\bar{t})), \dots, f_n(\varphi_n(\bar{t})))$$

dove, si ricorda, f_i sono le funzioni componenti del campo vettoriale f e dove nell'ultimo passaggio si è usato che φ è una soluzione del sistema dinamico (2.6). L'insieme di tutte le possibili orbite di fase di un sistema dinamico è detto **ritratto di fase** del sistema dinamico.

Se è nota la curva integrale si sa tutto dell'evoluzione del sistema, in particolare si conoscono i diversi punti dello spazio delle fasi visitati durante l'evoluzione, cioè l'orbita di fase, e la legge temporale con cui i diversi punti sono raggiunti. È importante osservare, però, che la conoscenza della sola orbita di fase fornisce i punti che il sistema visita durante la sua evoluzione ma non da alcuna informazione sulla legge temporale. Per esempio se di un sistema dinamico bidimensionale si sapesse che l'orbita di fase uscente dal punto $(0, 1)$ è la circonferenza di centro $(0, 0)$ e raggio 1, allora si conoscerebbero tutti i punti visitati dal sistema durante la sua evoluzione, in particolare si sarebbe a conoscenza del fatto che a un certo istante il sistema occupa la posizione $(1, 0)$, ma non si avrebbe alcuna idea dell'istante in cui il sistema raggiunge il punto $(1, 0)$.

In analogia con i risultati discussi nel caso unidimensionale, è evidente che giocano un ruolo chiave nello studio dei sistemi dinamici quei punti in cui il campo delle direzioni si annulla: si dice che $x_e \in I$ è un punto **fisso** o **di equilibrio** o **critico** per il sistema dinamico (2.6) se e solo se $f(x_e) = 0$. Vale la seguente importante proprietà.

Proposizione 2.5 *Si consideri il sistema dinamico (2.6), sia $x_e \in I$ tale che $f(x_e) = 0$. Allora preso $t_0 \in \mathbb{R}$, il problema di Cauchy relativo a (2.6) con dato iniziale $x(t_0) = x_e$ ammette l'unica soluzione $\varphi : t \in \mathbb{R} \rightarrow \varphi(t) = x_e \in \mathbb{R}^n$.*

Dimostrazione. Si procede come nel caso della dimostrazione del relativo risultato unidimensionale; si veda la Proposizione 1.9.

Proposizione 2.5 \square

In virtù della proposizione precedente se il sistema dinamico viene preparato in un punto fisso vi rimarrà durante tutta la sua evoluzione; ma se la condizione iniziale viene scelta non critica ma vicina a un punto fisso, allora il sistema può evolvere mantenendosi vicino al punto fisso o allontanandosene inesorabilmente. Per distinguere tra questi diversi comportamenti si introduce la nozione di stabilità. Si danno le seguenti definizioni: sia $x_e \in I$ un punto fisso del sistema dinamico (2.6), si dice che x_e è

- **stabile** (o **stabile secondo Liapunov**) se e solo se comunque si scelga un numero reale positivo $\varepsilon > 0$ esiste $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tale che $B_\delta(x_e) \subset I$ e per ogni $x_0 \in B_\delta(x_e)$ la soluzione $\varphi : [t_0, +\infty) \subset \mathbb{R} \rightarrow \varphi(t) \in \mathbb{R}^n$ del problema di Cauchy associato al sistema dinamico (2.6) con dato iniziale $x(t_0) = x_0$, con $t_0 \in \mathbb{R}$ arbitrario, è tale che per ogni $t \geq t_0$ si ha $\varphi(t) \in B_\varepsilon(x_e)$;

- **asintoticamente stabile** se e solo se è stabile e inoltre esiste un intorno sferico $I' \subset I$ di x_e tale che per ogni $x_0 \in I'$ la soluzione $\varphi : [t_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ del problema di Cauchy associato al sistema dinamico (2.6) con dato iniziale $x(t_0) = x_0$, con $t_0 \in \mathbb{R}$ arbitrario, è tale che $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = x_e$;
- **instabile** se e solo se non è stabile.

È utile osservare che le definizioni appena date sono le stesse del caso unidimensionale a patto di sostituire gli intorni aperti con le palle aperte. Si definisce, infine, **bacino d'attrazione** del punto fisso x_e asintoticamente stabile il sottoinsieme dello spazio delle fasi costituito da tutti i punti x_0 tali che l'unico moto $\varphi : [t_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ con dato iniziale x_0 tende asintoticamente a x_e , cioè $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = x_e$.

2.3. Sistemi dinamici planari

Un sistema dinamico planare è un sistema dinamico nella forma (2.6) nel caso $n = 2$. Per i sistemi dinamici planari è possibile dare uno studio qualitativo molto dettagliato delle orbite che però richiede molta accortezza e profondità di analisi. In questo paragrafo ci si limita a fornire alcuni metodi grafici che permettono di intuire l'andamento delle linee di fase nel piano e a discutere alcuni esempi molto semplici che permettono di mettere in luce i diversi comportamenti che si possono verificare nel piano nelle vicinanze di un punto critico. In particolare si vedrà che i punti fissi nel piano possono essere suddivisi in *odi stabili, odi instabili, selle e centri*.

Esempio 2.6. Siano $f : J \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $g : H \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ allora il sistema dinamico

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ \dot{y} = g(y) \end{cases} \quad (2.7)$$

nelle funzioni incognite $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ è detto **prodotto diretto** dei sistemi dinamici $\dot{x} = f(x)$ e $\dot{y} = g(y)$. Un esempio semplice di sistema dinamico nella forma di prodotto diretto è il sistema dinamico

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \\ \dot{x}_2 = kx_2 \end{cases} \quad (2.8)$$

con $k \in \mathbb{R}$ e $x_1, x_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ le due funzioni incognite.

Esempio 2.7. Sulla base di argomenti euristici si determina il ritratto di fase del sistema dinamico (2.8) nel caso $k = 0$. Il campo delle direzioni è dato da $f(x_1, x_2) = (x_1, 0)$. Per determinare i punti fissi si devono determinare i punti in cui il campo delle direzioni è nullo:

$$f(x_1, x_2) = (0, 0) \Rightarrow (x_1, 0) = (0, 0) \Rightarrow x_1 = 0$$

Il sistema dinamico ha infiniti punti fissi, tutti i punti dell'asse x_2 . Per disegnare il ritratto di fase è utile tracciare il vettore tangente alle linee di fase in alcuni punti dello spazio delle fasi; si osserva che il campo f è orizzontale in ogni punto non appartenente all'asse x_2 . Inoltre il vettore punta verso destra nei punti del semipiano $x_1 > 0$ e verso sinistra nei punti del semipiano $x_1 < 0$; si veda il diagramma a sinistra nella figura 2.5. Dal ritratto di fase emerge che i punti fissi sono tutti instabili e che vi sono due tipi di orbite di fase: i punti di fissi e le semirette orizzontali; le semirette uscenti da punti nel semipiano $x_1 > 0$ puntano verso destra, mentre quelle uscenti da punti nel semipiano $x_1 < 0$ puntano verso sinistra.

In questo caso molto semplice è possibile verificare le conclusioni euristiche sul ritratto di fase integrando esplicitamente il sistema dinamico. Per separazione delle variabili si ottiene che il problema

di Cauchy con dato iniziale $x(0) = x_0 = (x_{0,1}, x_{0,2})$ ha la soluzione unica $x(t) = (x_1(t), x_2(t)) = (x_{0,1} \exp\{t\}, x_{0,2})$. Ai dati iniziali nella forma $(0, x_{0,2})$ corrispondono i punti fissi; ai dati iniziali nella forma $(x_{0,1}, x_{0,2})$ con $x_{0,1} \neq 0$ corrispondono le semirette, più precisamente se $x_{0,1} > 0$ si hanno le semirette orientate verso destra se $x_{0,1} < 0$ quelle orientate verso sinistra.

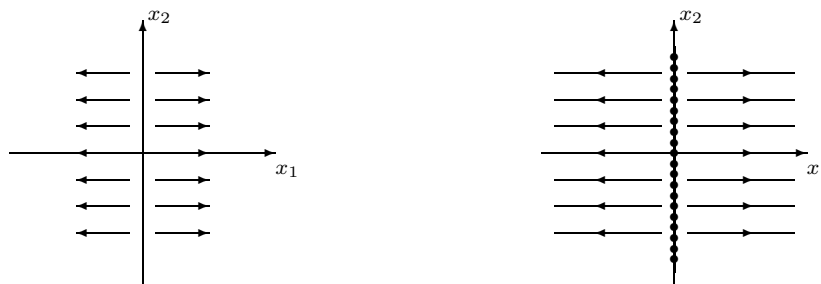


Fig. 2.5. A sinistra il campo vettoriale in alcuni punti dello spazio delle fasi per il sistema dinamico dell'Esempio 2.7, a destra l'andamento qualitativo delle linee di fase.

Esempio 2.8. Sulla base di argomenti euristici si determina il ritratto di fase del sistema dinamico (2.8) nel caso $k = 1$. Il campo delle direzioni è dato da $f(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$. Per determinare i punti fissi si devono determinare i punti in cui il campo delle direzioni è nullo:

$$f(x_1, x_2) = (0, 0) \Rightarrow (x_1, x_2) = (0, 0) \Rightarrow x_1 = 0 \text{ e } x_2 = 0$$

Il sistema dinamico ha il solo punto fisso $0 = (0, 0)$. Per disegnare il ritratto di fase è utile tracciare il vettore tangente alle linee di fase in alcuni punti dello spazio delle fasi; si osserva che il campo f è orizzontale nei punti dell'asse x_1 , verticale in quelli dell'asse x_2 e centrale in quelli fuori dagli assi. In tutti i casi il campo è uscente dall'origine; si veda il diagramma a sinistra nella figura 2.6. Dal ritratto di fase emerge che il punto fisso 0 è instabile e che vi sono due tipi di orbite di fase: il punto fisso e le semirette uscenti dall'origine. Un punto fisso nelle cui vicinanze il ritratto di fase abbia la struttura nel grafico di destra in figura 2.6 è detto *nodo instabile proprio*.

In questo caso molto semplice è possibile verificare le conclusioni euristiche sul ritratto di fase integrando esplicitamente il sistema dinamico. Per separazione delle variabili si ottiene che il problema di Cauchy con dato iniziale $x(0) = x_0 = (x_{0,1}, x_{0,2})$ ha la soluzione unica $x(t) = (x_1(t), x_2(t)) = (x_{0,1} \exp\{t\}, x_{0,2} \exp\{t\})$. Al dato iniziale $(0, 0)$ corrisponde il punto fisso; ai dati iniziali nella forma $(x_{0,1}, x_{0,2}) \neq (0, 0)$, cioè tali che almeno una delle due coordinate del dato iniziale sia non nulla, corrispondono le semirette uscenti dall'origine.

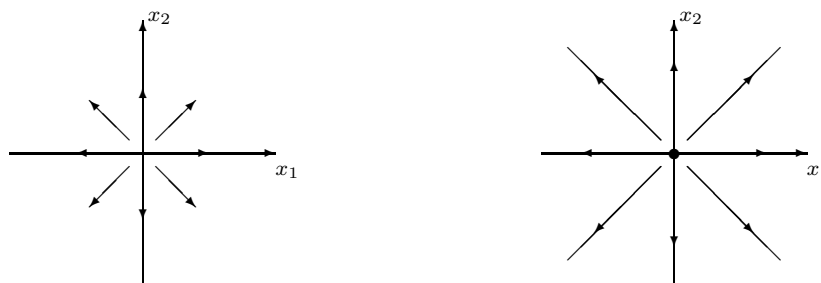


Fig. 2.6. A sinistra il campo vettoriale in alcuni punti dello spazio delle fasi per il sistema dinamico dell'Esempio 2.8, a destra l'andamento qualitativo delle linee di fase.

Esempio 2.9. Sulla base di argomenti euristici si determina il ritratto di fase del sistema dinamico (2.8) nel caso $k = 2$. Il campo delle direzioni è dato da $f(x_1, x_2) = (x_1, 2x_2)$. Procedendo come nell'Esempio 2.8 si trova che il sistema dinamico ha il solo punto fisso $0 = (0, 0)$. Per disegnare il ritratto di fase è utile tracciare il vettore tangente alle linee di fase in alcuni punti dello spazio delle fasi: si osserva che il campo f è orizzontale nei punti dell'asse x_1 e verticale in quelli dell'asse x_2 . Nei punti non appartenenti agli assi il campo punta in verso opposto all'origine ma non ha la struttura centrale vista nell'Esempio 2.8; si veda il diagramma a sinistra nella figura 2.7. Dal ritratto di fase emerge che il punto fisso 0 è instabile e che vi sono tre tipi di orbite di fase: il punto fisso, le semirette uscenti dall'origine e giacenti sugli assi cartesiani, le curve uscenti da punti non appartenenti agli assi. Un punto fisso nelle cui vicinanze il ritratto di fase abbia la struttura nel grafico di destra in figura 2.7 è detto *nodo instabile*.

In questo caso molto semplice è possibile verificare le conclusioni euristiche sul ritratto di fase integrando esplicitamente il sistema dinamico. Per separazione delle variabili si ottiene che il problema di Cauchy con dato iniziale $x(0) = x_0 = (x_{0,1}, x_{0,2})$ ha la soluzione unica $x(t) = (x_1(t), x_2(t)) = (x_{0,1} \exp\{t\}, x_{0,2} \exp\{2t\})$. Al dato iniziale $(0, 0)$ corrisponde il punto fisso, ai dati iniziali nella forma $(x_{0,1}, 0)$ con $x_{0,1} \neq 0$ e $(0, x_{0,2})$ con $x_{0,2} \neq 0$ corrispondono le semirette giacenti sugli assi cartesiani, ai dati iniziali nella forma $(x_{0,1}, x_{0,2})$ con $x_{0,1}, x_{0,2} > 0$ corrisponde il ramo di parabola di equazione algebrica $x_2 = x_{0,2}[x_1/x_{0,1}]^2$ giacente nel primo quadrante. In corrispondenza delle altre tre possibili scelte dei segni delle coordinate del dato iniziale ($x_{0,1} > 0$ e $x_{0,2} < 0$, $x_{0,1} < 0$ e $x_{0,2} < 0$, $x_{0,1} < 0$ e $x_{0,2} > 0$) si hanno gli archi di parabola giacenti negli altri tre quadranti. È importante osservare che l'intera parabola di equazione algebrica $x_2 = x_{0,2}[x_1/x_{0,1}]^2$, per esempio con $x_{0,2} > 0$, non è una linea di fase del sistema dinamico, ma una curva del piano delle fasi su cui giacciono tre linee di fase: il ramo di parabola nel primo quadrante, il punto fisso nell'origine e il ramo di parabola nel secondo quadrante. È interessante ripetere lo studio nel caso $k = 1/2$, si veda l'Esercizio 2.1.

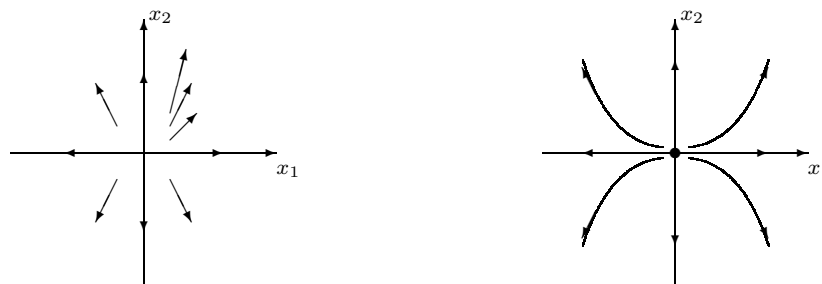


Fig. 2.7. A sinistra il campo vettoriale in alcuni punti dello spazio delle fasi per il sistema dinamico dell'Esempio 2.9, a destra l'andamento qualitativo delle linee di fase.

Esempio 2.10. Sulla base di argomenti euristici si determina il ritratto di fase del sistema dinamico (2.8) nel caso $k = -1$. Il campo delle direzioni è dato da $f(x_1, x_2) = (x_1, -x_2)$. Procedendo come nell'Esempio 2.8 si trova che il sistema dinamico ha il solo punto fisso $0 = (0, 0)$. Per disegnare il ritratto di fase è utile tracciare il vettore tangente alle linee di fase in alcuni punti dello spazio delle fasi: il campo f ha l'andamento rappresentato nel diagramma a sinistra nella figura 2.8. Dal ritratto di fase emerge che il punto fisso 0 è instabile e che vi sono quattro tipi di orbite di fase: il punto fisso, le semirette uscenti dall'origine e giacenti sull'asse x_1 , le semirette entranti nell'origine e giacenti sull'asse x_2 , le curve uscenti da punti non appartenenti agli assi e dall'andamento asintotico. Un punto fisso nelle cui vicinanze il ritratto di fase abbia la struttura nel grafico di destra in figura 2.8 è detto *sella*. In analogia con quanto

visto negli Esempi 2.7–2.9 è possibile verificare le conclusioni euristiche sul ritratto di fase integrando esplicitamente il sistema dinamico; si veda anche l'Esercizio 2.2.

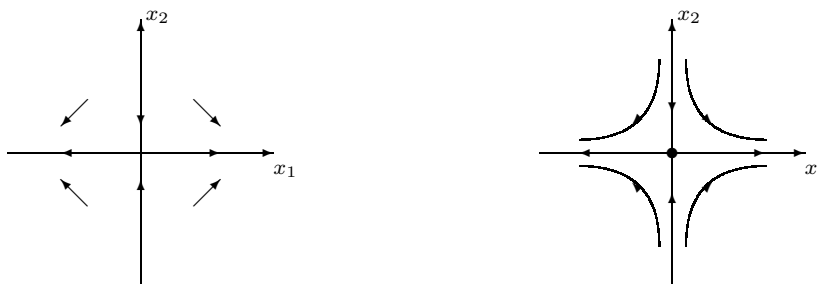


Fig. 2.8. A sinistra il campo vettoriale in alcuni punti dello spazio delle fasi per il sistema dinamico dell'Esempio 2.10, a destra l'andamento qualitativo delle linee di fase.

Esempio 2.11. È interessante ripetere lo studio qualitativo svolto negli Esempi 2.7–2.10 per il sistema dinamico

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 \\ \dot{x}_2 = kx_2 \end{cases} \quad (2.9)$$

In particolare va osservato che nel caso $k < 0$ l'origine risulta un punto fisso con la struttura di *nodo stabile*.

Esempio 2.12. Si consideri il moto di una particella di massa uno sull'asse y sottoposta all'azione di una forza di richiamo lineare (oscillatore armonico unidimensionale). L'equazione del moto è $\ddot{y} + y = 0$; procedendo come nell'Esempio 2.1 il problema viene ricondotto allo studio del sistema dinamico (2.6) con

$$x = (q, p), \quad q = y, \quad p = \dot{y} \quad \text{e} \quad f(x) = f(q, p) = (p, -q)$$

Si vede subito, risolvendo $f(q, p) = 0$, che l'unico punto fisso è l'origine $(q, p) = (0, 0)$, cioè l'unico punto di equilibrio per l'oscillatore armonico è il punto corrispondente all'oscillatore posto con velocità nulla ($p = 0$) nel punto in cui la molla è a riposo ($q = 0$). Per capire la struttura del ritratto di fase si prova a disegnare in qualche punto il campo delle direzioni, ma come si vede dalla figura 2.9 l'analisi non è conclusiva perché il campo direzioni disegnato nel grafico a sinistra è compatibile con tutti i ritratti di fase riportati nei diagrammi restanti; anche se un'attenta analisi delle lunghezze dei vettori tangenti tende a far preferire l'ultimo diagramma. In questo caso molto semplice è possibile stabilire la struttura del ritratto di fase integrando il sistema dinamico:

$$\ddot{q} = \dot{p} = -q \Rightarrow \ddot{q} + q = 0 \Rightarrow \begin{cases} q(t) = A \sin(t + \phi) \\ p(t) = A \cos(t + \phi) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q(t) = q_0 \cos t \\ p(t) = -q_0 \sin t \end{cases}$$

dove nell'ultimo passaggio è stata imposta la condizione iniziale $(q(0), p(0)) = (q_0, 0)$. Dalla soluzione esplicita segue che l'orbita di fase è una circonferenza percorsa in verso orario, quindi il ritratto di fase è costituito dal punto fisso e da una sequenza di circonferenze concentriche percorse in verso orario, cioè corrisponde al grafico riportato nel diagramma di destra in figura 2.9. Si può quindi concludere che il punto fisso è stabile. Punti fissi con ritratto di fase di questo tipo sono detti *centri*; nel caso particolare le curve chiuse che circondano il punto fisso stabile sono circonferenze, in generale queste curve chiuse possono essere di altra natura, in ogni caso il punto fisso verrà detto centro.

È interessante studiare anche il caso in cui la forza lineare agente sulla particella sia repulsiva; si veda l'Esercizio 2.4.

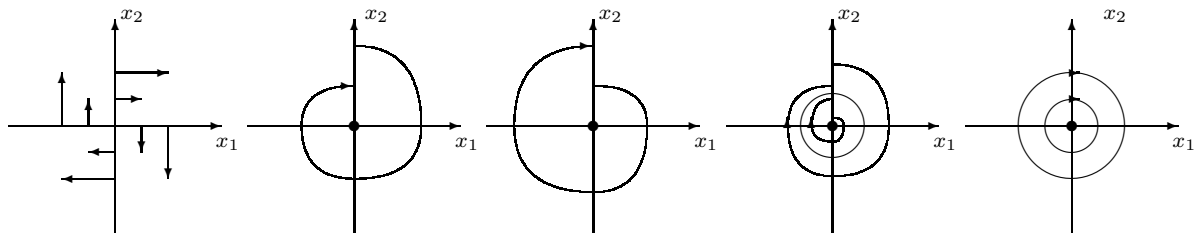


Fig. 2.9. A sinistra il campo vettoriale in alcuni punti dello spazio delle fasi per il sistema dinamico dell'Esempio 2.12, negli altri grafici sono riportati i possibili scenari con il campo delle direzioni disegnato a sinistra.

Esempio 2.13. Le equazioni di Lotka–Volterra, ovvero il sistema preda–predatore. Le equazioni di Lotka–Volterra descrivono l'evoluzione di un sistema costituito da due specie animali: le prede e i predatori; le equazioni furono introdotte dal matematico Volterra nel 1926 per studiare l'evoluzione di due specie di pesci nel mare Adriatico. Si denota con $x_1(t) \geq 0$ il numero di prede e con $x_2(t) \geq 0$ il numero di predatori all'istante t e si assume che

- in assenza di predatori la popolazione delle prede evolve secondo la legge di Malthus;
- le prede costituiscono l'unico alimento dei predatori;
- a ogni incontro il predatore mangia la preda e il numero di incontri in un piccolo intervallo di tempo $[t, t + \Delta t]$ è proporzionale al prodotto $x_1(t)x_2(t)$ del numero di prede per il numero di predatori all'istante t e all'ampiezza dell'intervallo Δt considerato;
- in assenza di prede i predatori muoiono con tasso lineare.

Sulla base di queste ipotesi si ha che

$$x_1(t + \Delta t) - x_1(t) = ax_1(t)\Delta t - bx_1(t)x_2(t)\Delta t \quad \text{e} \quad x_2(t + \Delta t) - x_2(t) = cx_1(t)x_2(t)\Delta t - dx_2(t)\Delta t$$

dove a, b, c, d sono costanti reali positive. Passando al limite per $\Delta t \rightarrow 0$ e normalizzando opportunamente le costanti si ottiene il sistema dinamico

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(1 - x_2) \\ \dot{x}_2 = \alpha x_2(x_1 - 1) \end{cases} \quad (2.10)$$

dove $\alpha > 0$. In definitiva il sistema preda–predatore è stato scritto come un sistema dinamico (2.6) con spazio delle fasi il quadrante $x_1, x_2 \geq 0$ e campo delle direzioni $f(x_1, x_2) = (x_1(1 - x_2), \alpha x_2(x_1 - 1))$.

Risolvendo l'equazione $f(x_1, x_2) = (0, 0)$ si ottengono i due punti fissi $(0, 0)$ e $(1, 1)$. Per fare uno schizzo del ritratto di fase si procede come al solito e si disegna il campo vettoriale in qualche punto del piano delle fasi, si veda la figura 2.10. In questo caso non è possibile intuire il comportamento delle linee di fase, perché attorno al punto fisso $(1, 1)$ ci si trova di fronte ai quattro possibili comportamenti descritti nella figura 2.9 relativa al problema dell'oscillatore armonico. Per quanto riguarda la stabilità dei punti fissi, si può senza dubbio dire che $(0, 0)$ è instabile, infatti se il sistema viene preparato in uno stato iniziale con $x_1 = 0$ e $x_2 > 0$, l'evoluzione tenderà a far allontanare il sistema dall'origine lungo l'asse x_1 (le prede presenti all'inizio si riproducono e la popolazione cresce con legge di Malthus). Per quanto riguarda il punto fisso $(1, 1)$ non si può dire nulla.

In conclusione questo esempio mostra che per poter determinare il ritratto di fase di un sistema dinamico in dimensione maggiore o uguale a due non è sufficiente lo studio del campo delle direzioni f , come accadeva nel caso unidimensionale, è necessario quindi introdurre strumenti più raffinati e più potenti; in questo senso sarà di grande importanza la nozione di integrale primo (si veda il paragrafo 2.4).

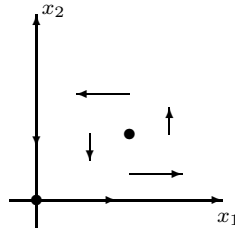


Fig. 2.10. Rappresentazione del campo vettoriale in alcuni punti dello spazio delle fasi per il sistema dinamico dell'Esempio 2.13.

Esercizio 2.1. Si determini il ritratto di fase del sistema dinamico (2.8) nel caso $k = 1/2$, in particolare si mostri che l'unico punto fisso ha la struttura di nodo instabile e si verifichino le conclusioni ottenute graficamente determinando la soluzione esplicita del sistema dinamico.

Esercizio 2.2. Si integri il sistema dinamico (2.8) nel caso $k = -1$ e si verifichino tutte le conclusioni relative al ritratto di fase contenute nell'Esempio 2.10.

Esercizio 2.3. Si studi il sistema dinamico proposto nell'Esempio 2.11.

Esercizio 2.4. Si studi il sistema dinamico, proposto alla fine dell'Esempio 2.12, associato al problema del moto unidimensionale di una particella sottoposto all'azione di una forza lineare repulsiva. Si mostri che l'unico punto fisso ha la struttura di sella con asintoti la prima e la seconda bisettrice.

Esercizio 2.5. Si consideri il sistema dinamico di Lotka–Volterra (2.10) e, aiutandosi con la discussione contenuta nell'Esempio 2.13, si determini la soluzione del problema di Cauchy nel caso di dati iniziale scelti sugli assi cartesiani.

2.4. Integrali primi

Gli integrali primi sono uno strumento molto utile per determinare la struttura del ritratto di fase; il loro analogo nel contesto dei sistemi meccanici sono le costanti del moto.

Si consideri una funzione $u : I \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ differenziabile sull'aperto connesso $I \subset \mathbb{R}^n$, $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ un vettore assegnato e $\bar{x} \in I$ un punto di I fissato. Si definisce la **derivata di u in \bar{x} lungo la direzione v**

$$L_v u(\bar{x}) := \nabla u(\bar{x}) \cdot v = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i}(\bar{x}) v_i \quad (2.11)$$

Il nome è giustificato dal fatto che presa una qualsiasi curva regolare $\varphi : J \subset \mathbb{R} \rightarrow I$ di codominio contenuto in I passante per \bar{x} e tangente a v in \bar{x} , cioè tale che esiste $\bar{t} \in J$ tale che $\varphi(\bar{t}) = \bar{x}$ e $\dot{\varphi}(\bar{t}) = v$, si ha

$$\left. \frac{d}{dt} u(\varphi(t)) \right|_{t=\bar{t}} = \left. \frac{d}{dt} u(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) \right|_{t=\bar{t}} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i}(\varphi(\bar{t})) \frac{d\varphi_i}{dt}(\bar{t}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i}(\bar{x}) v_i = L_v u(\bar{x})$$

Esempio 2.14. Si considera $u(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$, il paraboloide di vertice nell'origine e concavità verso l'alto, e il vettore $v = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ che forma l'angolo $\alpha \in [0, 2\pi)$ con l'asse x_1 . Allora

$$L_v u(\bar{x}) = \nabla u(\bar{x}) \cdot v = 2\bar{x}_1 \cos \alpha + 2\bar{x}_2 \sin \alpha$$

Per esempio nel punto $\bar{x} = (0, 1)$ si ha $L_v u(0, 1) = 2 \sin \alpha$, si vede subito che $\alpha = 0$ si ha che la derivata direzionale è nulla perché si sta calcolando la derivata lungo una curva di livello, per $\alpha = \pi/2$ si ha che la derivata direzionale è uguale a 2 perché la derivata ammonta a calcolare la derivata della parabola che genera il paraboloido. Si considera, ora, la retta del piano $x_1 x_2$ passante per \bar{x} e con direzione data da v , cioè si considera una curva passante per \bar{x} e tangente a v in questo punto: $\varphi(t) = (\bar{x}_1 + t \cos \alpha, \bar{x}_2 + t \sin \alpha)$ con $t \in \mathbb{R}$. Per la proprietà discussa in precedenza la derivata direzionale può essere calcolata anche nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} u(\varphi(t)) \right|_{t=0} &= \left. \frac{d}{dt} [(\bar{x}_1 + t \cos \alpha)^2 + (\bar{x}_2 + t \sin \alpha)^2] \right|_{t=0} \\ &= [2(\bar{x}_1 + t \cos \alpha) \cos \alpha + 2(\bar{x}_2 + t \sin \alpha) \sin \alpha]_{t=0} = 2\bar{x}_1 \cos \alpha + 2\bar{x}_2 \sin \alpha \end{aligned}$$

dove si è usato che la retta passa per \bar{x} in corrispondenza di $t = 0$.

Su supponga, ora, che sull'aperto connesso I su cui u è differenziabile sia definita anche la funzione vettoriale $f : I \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ di Lipschitz su I che a ogni punto $x \in I$ associa il vettore n -dimensionale $f(x)$. Si definisce **derivata di Lie** della funzione u relativa al campo vettoriale f la quantità

$$L_f u(x) := L_{f(x)} u(x) = \nabla u(x) \cdot f(x) \quad (2.12)$$

per ogni $x \in I$. In altri termini la derivata di Lie¹ di u rispetto al campo vettoriale f è la derivata di u nel punto x calcolata lungo la direzione specificata dal vettore $f(x)$ che il campo vettoriale f associa a x . Dalla discussione precedente segue la seguente importante interpretazione della derivata di Lie: si consideri l'unico moto $\varphi : J \rightarrow I$ associato al sistema dinamico $\dot{x} = f(x)$ passante per un punto $\bar{x} \in I$ all'istante \bar{t} e si consideri la funzione composta $U(t) := u(\varphi(t))$ con $t \in J$, allora la derivata di Lie di u rispetto a f nel punto \bar{x} è uguale alla derivata ordinaria della funzione composta di una variabile U , ottenuta calcolando u lungo il moto φ , calcolata nell'istante in cui il moto passa per il punto \bar{x} , in altri termini $L_f u(\bar{x}) = U'(\bar{t})$.

Si può finalmente dare la definizione di integrale primo: si consideri il sistema dinamico (2.6) con $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ di Lipschitz sull'aperto connesso $I \subset \mathbb{R}^n$. Si dice che una funzione a valori reali $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ di classe $C^1(I)$ è un **integrale primo** del sistema dinamico (2.6) se e solo se per ogni $x \in I$ si ha $L_f u(x) = 0$. Dalla discussione precedente sul significato della derivata di Lie segue immediatamente l'importanza degli integrali primi nel contesto dello studio dei sistemi dinamici: comunque si prenda un moto $\varphi : J \rightarrow I$, se u è un integrale primo del sistema dinamico, allora la funzione del tempo $U : J \rightarrow \mathbb{R}$ ottenuta calcolando l'integrale primo lungo il moto ha derivata nulla in ogni istante e quindi è costante. In altri termini un integrale primo è costante lungo un qualsiasi moto del sistema dinamico. Più precisamente vale la seguente proposizione.

Proposizione 2.15 *Si considera il sistema dinamico (2.6) con il campo delle direzioni $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ di Lipschitz sull'aperto connesso $I \subset \mathbb{R}^n$. Sia $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ differenziabile su I . La funzione u è un integrale primo del sistema dinamico (2.6) se e solo se per ogni moto $\varphi : J \rightarrow I$ si ha $U(t) := u(\varphi(t))$ costante su J .*

¹Si noti l'analogia tra la derivata di Lie e la *derivata sostanziale* che si introduce nei problemi di fluidodinamica.

Dimostrazione. L'asserto è conseguenza immediata del fatto che per ogni moto in I si ha $L_f u(\varphi(t)) = U'(t)$ per ogni $t \in J$.

Proposizione 2.15 \square

Esempio 2.16. Si consideri un sistema meccanico conservativo unidimensionale, cioè un sistema meccanico costituito da una particella in moto sull'asse y sulla quale agisce la forza $g(y)$ tale che esiste una funzione $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $g = -du/dy$. Come si è visto nell'Esempio 2.6 se la particella ha massa unitaria, questo problema può essere posto nella forma (2.6) ponendo: $q = y$, $p = \dot{y}$, $x = (q, p)$ e $f(x) = f(q, p) = (p, g)$. Si considera l'energia meccanica del sistema $h : (q, p) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow h(q, p) := p^2/2 + u(q) \in \mathbb{R}$. Usando la definizione si dimostra immediatamente che h è un integrale primo del sistema e quindi si conserva lungo tutti i moti:

$$L_f h(q, p) = \nabla h(q, p) \cdot f(q, p) = \left(\frac{du}{dq}, p \right) \cdot (p, g) = (-g, p) \cdot (p, g) = -gp + pg = 0$$

Come si è accennato all'inizio del paragrafo gli integrali primi sono uno strumento molto utile per capire la struttura del ritratto di fase, soprattutto nel caso di sistemi dinamici bidimensionali. Si supponga, che $u : I \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sia un integrale primo per il sistema dinamico (2.6). Si considera la superficie di livello $\Gamma_e := \{x \in \mathbb{R}^n : u(x) = e\}$, con $e \in \mathbb{R}$ una costante reale fissata, e si osserva che in ogni punto $x \in \Gamma_e$ si ha che il vettore $\nabla u(x)$ è ortogonale alla superficie, cioè è ortogonale al piano tangente alla superficie in x . Essendo u un integrale primo si ha anche che $\nabla u(x) \cdot f(x) = 0$ e quindi per ogni punto x appartenente alla superficie di livello Γ_e si ha che il vettore $f(x)$ giace nel piano tangente alla superficie in x . Questa semplice osservazione permette di concludere che qualora esista un integrale primo, ciascuna linea di fase del sistema dinamico appartiene a una determinata superficie di livello. Nel caso bidimensionale le superfici di livello sono curve di livello e quindi il vincolo che una linea di fase debba appartenere a una superficie di livello è molto forte.

Esempio 2.17. Si considera il sistema dinamico di Lotka–Volterra introdotto nell'Esempio 2.13. Si verifica facilmente che la funzione $u(x_1, x_2) := \alpha(x_1 - \log x_1) + x_2 - \log x_2$ in $x_1, x_2 > 0$ è un integrale primo del sistema dinamico, infatti

$$\nabla u \cdot f = \left(\alpha - \frac{\alpha}{x_1}, 1 - \frac{1}{x_2} \right) \cdot (x_1(1 - x_2), \alpha x_2(x_1 - 1)) = \alpha(x_1 - 1)(1 - x_2) + (x_2 - 1)\alpha(x_1 - 1) = 0$$

Per capire come sono fatte le curve di livello si deve studiare la funzione di due variabili $u(x_1, x_2)$. In primo luogo si osserva che

$$u_{x_1} = \alpha - \frac{\alpha}{x_1}, \quad u_{x_2} = 1 - \frac{1}{x_2}, \quad u_{x_1 x_1} = \frac{\alpha}{x_1^2}, \quad u_{x_2 x_2} = \frac{1}{x_2^2}, \quad u_{x_1 x_2} = 0$$

Segue che l'unico punto di stazionarietà di u è $(1, 1)$ e che si tratta di un minimo relativo proprio. Osservato che u diverge positivamente quando ci si avvicina agli assi, si ha che il grafico di u ha grossomodo la struttura di un paraboloido che si schiaccia nei pressi degli assi cartesiani. Determinare la superficie di livello $\Gamma_e := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* : u(x_1, x_2) = e\}$ vuol dire tagliare il grafico della funzione u con un piano parallelo al piano $x_1 x_2$ alla quota e . Si ha, allora, che $\Gamma_e = \emptyset$ se $e < u(1, 1) = \alpha + 1$, $\Gamma_e = \{(1, 1)\}$ se $e = u(1, 1)$, Γ_e è una curva chiusa nel cui interno cade $(1, 1)$ se $e > u(1, 1)$; si veda la figura 2.11. Le orbite di fase con dato iniziale esterno agli assi e diverso dal punto fisso $(1, 1)$ evolvono su una curva di

livello chiusa, questa osservazione permette di concludere che il punto fisso $(1, 1)$ è stabile e che si tratta di un centro. È abbastanza ragionevole attendersi che una linea di fase con dato iniziale su una curva di livello chiusa percorra l'intera curva di livello in tempo finito, infatti la curva di livello non passa per punti critici; quindi i moti che giacciono sulle curve di livello chiuse sono periodici. Nel caso di Lotka–Volterra la stima del tempo di percorrenza non è molto facile perché non è possibile risolvere l'equazione che definisce le curve di livello rispetto a una delle due variabili; quando ciò è possibile allora i tempi di percorrenza lungo archi di linea di fase possono essere ricondotti al calcolo di un integrale definito (si veda l'Esempio 2.19).

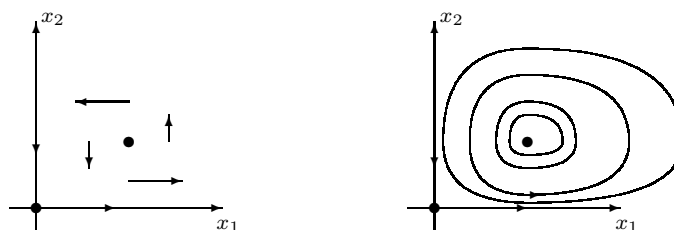


Fig. 2.11. A sinistra: il campo vettoriale in alcuni punti dello spazio delle fasi per il sistema dinamico dell'Esempio 2.13. A destra: il ritratto di fase con le linee di fase chiuse percorse in verso antiorario.

Nell'Esempio 2.17 è stata usato l'integrale primo del sistema dinamico di Lotka–Volterra per determinare la struttura del ritratto di fase; ci si è limitati a verificare che una funzione u , indovinata chissà come, fosse un integrale primo. Sarebbe utile sviluppare un metodo che permettesse di costruire gli integrali primi a partire dalla conoscenza del campo vettoriale del sistema dinamico. Questo problema è tutt'altro che banale. Ricordando la definizione di integrale primo si ha che u è un integrale primo per il sistema dinamico $\dot{x} = f(x)$ se e solo se in ogni punto x dell'aperto connesso I in cui il campo delle direzioni è di Lipschitz si ha $\nabla u(x) \cdot f(x) = 0$, ovvero

$$f_1(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n) + \dots + f_n(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad (2.13)$$

In altri termini per determinare un integrale primo si deve risolvere un'equazione differenziale del primo ordine alle derivate parziali in dimensione n .

In dimensione n arbitraria il problema è difficile, ma in dimensione due, cioè nel caso dei sistemi dinamici planari, il problema può essere affrontato in modo sistematico. Il vettore normale alla curva di livello $\nabla u(x_1, x_2)$ è ortogonale in ogni punto al vettore $f(x_1, x_2)$, quindi esiste una funzione incognita $\mu : (x_1, x_2) \in I \rightarrow \mu(x_1, x_2) \in \mathbb{R}$ definita su tutto l'aperto I tale che per ogni $(x_1, x_2) \in I$ si abbia $\nabla u(x_1, x_2) = \mu(x_1, x_2) \nu(x_1, x_2)$ dove $\nu(x_1, x_2) = (f_2(x_1, x_2), -f_1(x_1, x_2))$ è un campo vettoriale in ogni punto ortogonale al campo delle direzioni f ; in modo più esplicito si ha

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \mu(x_1, x_2) \nu_1(x_1, x_2) \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, x_2) = \mu(x_1, x_2) \nu_2(x_1, x_2) \quad (2.14)$$

In conclusione al fine di determinare un integrale primo di un sistema dinamico planare ci si deve chiedere se esiste una funzione $\mu : (x_1, x_2) \in I \rightarrow \mu(x_1, x_2) \in \mathbb{R}$, detta *fattore*

integrante, tale che il campo vettoriale $(\mu\nu_1, \mu\nu_2)$ è un differenziale esatto, dove ν è il campo vettoriale continuo ortogonale in ogni punto a f . Per fare ciò è sufficiente trovare una qualsiasi funzione μ a valori reali per la quale sia soddisfatta la condizione di chiusura

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(\mu(x_1, x_2)\nu_2(x_1, x_2)) = \frac{\partial}{\partial x_2}(\mu(x_1, x_2)\nu_1(x_1, x_2)) \quad (2.15)$$

È utile sottolineare che μ non è un campo vettoriale ma una funzione definita sull'aperto I e a valori reali, cioè è una funzione scalare. Una volta determinata μ si risolvono le equazioni (2.14) e si determina l'integrale primo u . Se il sistema dinamico ammette un integrale primo che soddisfa alle (2.14) con $\mu = 1$, allora si dice che il sistema dinamico è **hamiltoniano** e l'integrale primo u soddisfacente le (2.14) viene detto **hamiltoniana** del sistema.

Nell'esempio seguente viene discusso in modo dettagliato un sistema dinamico planare facendo ricorso a tutti gli strumenti introdotti fino a questo punto. In particolare emergerà l'utilità enorme degli integrali primi nello studio qualitativo del ritratto di fase. Come si è già osservato in precedenza il ritratto di fase non fornisce alcuna informazione sui tempi di percorrenza lungo le diverse orbite; nell'esempio che segue si vedrà che se l'integrale primo è abbastanza semplice, cioè se l'equazione che definisce le curve di livello può essere risolta rispetto ad almeno una delle due variabili, allora i tempi di percorrenza possono essere ricondotti al calcolo di un integrale definito. Nello studio dei sistemi dinamici planari si preferirà spesso la notazione (x, y) , in sostituzione di (x_1, x_2) , per il generico punto di \mathbb{R}^2 che rappresenta lo stato del sistema.

Esempio 2.18. Si considera il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = e^x y^2 \\ \dot{y} = -e^x x y \end{cases} \quad (2.16)$$

Il sistema dinamico è nella forma (2.6) con campo delle $f(x, y) = (\exp\{x\}y^2, -\exp\{x\}xy)$. Punti fissi:

$$f = 0 \Rightarrow (e^x y^2, -e^x x y) = (0, 0) \Rightarrow y = 0 \text{ e } x \text{ arbitrario}$$

Sono punti fissi tutti e soli i punti dell'asse x . L'andamento qualitativo del campo delle direzioni f è riportato nel diagramma a sinistra nella figura 2.12. Per capire più a fondo la struttura del ritratto di fase si cerca un integrale primo del sistema dinamico: si considera il campo $\nu(x, y) = (-\exp\{x\}xy, -\exp\{x\}y^2)$ ortogonale in ogni punto al campo delle direzioni f , e, ricordando che l'integrale primo deve avere gradiente parallelo a ν in ogni punto, deve esistere una funzione $\mu : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $\nabla u(x, y) = \mu(x, y)\nu(x, y)$, ovvero

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -e^x x y \mu(x, y) \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x y^2 \mu(x, y) \quad (2.17)$$

Si deve determinare μ in modo che il campo differenziale costituito dalle due funzioni al secondo membro delle equazioni precedenti sia chiuso:

$$\frac{\partial}{\partial y}[-e^x x y \mu(x, y)] = \frac{\partial}{\partial x}[-e^x y^2 \mu(x, y)] \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}[x] = \frac{\partial}{\partial x}[y] \Rightarrow 0 = 0$$

dove si è scelto $\mu(x, y) = -1/(y \exp\{x\})$; allora l'integrale primo è soluzione delle equazioni (2.17) con questa scelta di μ . Integrando le (2.17) seguendo la procedura adottata nell'Esempio 2.19 si ha $u(x, y) =$

$(x^2 + y^2)/2$. Si può verificare che i calcoli eseguiti sono corretti verificando che la derivata di Lie della funzione u rispetto al campo f è nulla:

$$\nabla u \cdot f = (x, y) \cdot (e^x y^2, -e^x xy) = e^x xy^2 - e^x xy^2 = 0$$

Le curve di livello sono le curve di equazione $u(x, y) = a$ con $a \in \mathbb{R}$ reale; si vede subito che hanno senso solo per $a \geq 0$: per $a = 0$ si ottiene l'origine e per $a > 0$ la circonferenza di centro nell'origine e raggio $(2a)^{1/2}$. Per $a = 0$ la curva di livello coincide con un punto fisso, mentre per $a > 0$ su ciascuna curva di livello giacciono quattro linee di fase: due punti fissi e due semicirconferenze aperte. Il ritratto di fase è riportato nel grafico a destra in figura 2.12. Natura dei punti fissi: applicando la definizione di stabilità si ha che i punti fissi $(\bar{x}, 0)$ con $\bar{x} < 0$ sono instabili, mentre quelli con $\bar{x} \geq 0$ sono stabili. Per quanto riguarda l'origine, per ogni $\varepsilon > 0$ tutti i moti con dato iniziale nella palla aperta di centro $(0, 0)$ e raggio $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$ giacciono completamente nella palla di centro $B_\varepsilon(0, 0)$; quindi la definizione di stabilità è verificata con $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$. Per i punti fissi $\bar{x} > 0$ è necessario prendere un $\delta(\varepsilon)$ così piccolo che tutte le circonferenze di centro nell'origine passanti per $B_\delta(\bar{x}, 0)$ intersecano il semiasse positivo delle x in punti che giacciono in $B_\varepsilon(\bar{x}, 0)$. A proposito della natura dei punti fissi è interessante osservare che tutti i punti fissi stabili non sono asintoticamente stabili, si veda a tal proposito anche il Teorema 2.21.

Le curve di livello $u(x, y) = a$ sono equazioni algebriche di secondo grado che possono essere risolte rispetto a entrambe le variabili; per esempio il ramo positivo della curva di livello corrispondente ad a ha equazione $y = \sqrt{2a - x^2}$. Questa proprietà permette di esprimere come integrale definito il tempo di percorrenza lungo l'orbita di fase, per esempio il tempo $T(b)$ che il sistema preparato in $(0, \sqrt{2a})$ impiega per giungere in $(b, \sqrt{2a - b^2})$, con $b \in (0, \sqrt{2a})$ può essere scritto come segue:

$$\dot{x} = e^x y^2 \Rightarrow \dot{x} = e^x (2a - x^2) \Rightarrow \int_0^b \frac{dx}{e^x (2a - x^2)} = \int_0^{T(b)} dt \Rightarrow T(b) = \int_0^b \frac{dx}{e^x (2a - x^2)}$$

Il tempo $T(b)$ può essere stimato con i metodi introdotti nel paragrafo 1.4; si osservi che $T(b)$ diverge positivamente per $b \rightarrow \sqrt{2a}$ e ciò è consistente con il fatto che il sistema si avvicina a un punto fisso stabile.

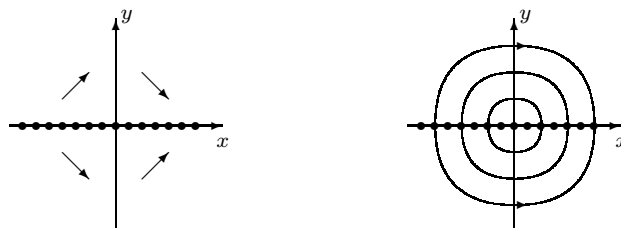


Fig. 2.12. A sinistra: il campo vettoriale in alcuni punti dello spazio delle fasi per il sistema dinamico dell'Esempio 2.18. A destra: il ritratto di fase; i versi sono indicati su due sole linee di fase, gli altri possono essere determinati per continuità del campo f .

Esempio 2.19. Si considera il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y \\ \dot{y} = 4x(x^2 - 1) \end{cases} \quad (2.18)$$

Il sistema dinamico è nella forma (2.6) con campo delle direzioni $f(x, y) = (2y, 4x(x^2 - 1))$. Punti fissi:

$$f = 0 \Rightarrow (2y, 4x(x^2 - 1)) = (0, 0) \Rightarrow y = 0 \text{ e } x = 0, -1, +1$$

Quindi esistono i tre punti fissi $P_1 = (-1, 0)$, $P_2 = (0, 0)$ e $P_3 = (+1, 0)$. L'andamento qualitativo del campo delle direzioni f è riportato nel diagramma a sinistra nella figura 2.13. Per capire più a fondo

la struttura del ritratto di fase si cerca un integrale primo del sistema dinamico: si considera il campo $\nu(x, y) = (4x(x^2 - 1), -2y)$ ortogonale in ogni punto al campo delle direzioni e, ricordando che l'integrale primo deve avere gradiente parallelo a ν in ogni punto, deve esistere una funzione $\mu : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $\nabla u(x, y) = \mu(x, y)\nu(x, y)$, ovvero

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 4x(x^2 - 1)\mu(x, y) \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y\mu(x, y) \quad (2.19)$$

Si deve determinare μ in modo che il campo differenziale costituito dalle due funzioni al secondo membro delle equazioni precedenti sia chiuso:

$$\frac{\partial}{\partial y}[4x(x^2 - 1)\mu(x, y)] = \frac{\partial}{\partial x}[-2y\mu(x, y)] \Rightarrow [4x(x^2 - 1)]\frac{\partial \mu}{\partial y} = [-2y]\frac{\partial \mu}{\partial x}$$

L'equazione precedente è soddisfatta se si sceglie $\mu(x, y) = 1$; allora l'integrale primo è soluzione delle equazioni (2.19) con $\mu = 1$. Integrando la prima si ha $u(x, y) = x^4 - 2x^2 + \Phi(y)$, dove Φ è una funzione arbitraria della sola variabile y , sostituendo questa espressione nella seconda delle (2.19) si trova

$$\Phi'(y) = -2y \Rightarrow \Phi(y) = -y^2 + \text{costante} \Rightarrow u(x, y) = x^4 - 2x^2 - y^2 + 1 = (x^2 - 1)^2 - y^2$$

dove la costante è stata scelta uguale a uno per porre u in una forma compatta. Si può verificare che i calcoli eseguiti sono corretti verificando che la derivata di Lie della funzione u rispetto al campo vettoriale f è nulla in ogni punto:

$$\nabla u \cdot f = (4x^3 - 4x, -2y) \cdot (2y, 4x^3 - 4x) = 8x^3y - 8xy - 8x^3y + 8xy = 0$$

Per disegnare le curve di livello $u(x, y) = a$, con $a \in \mathbb{R}$ fissato, è conveniente iniziare con quelle passanti per i punti critici: $u(-1, 0) = u(1, 0) = 0$ e $u(0, 0) = 1$. Si considera dapprima la curva di livello $a = 0$, cioè $(x^2 - 1)^2 - y^2 = 0$, che fornisce le due parabole $y = x^2 - 1$ e $y = -(x^2 - 1)$; quindi in corrispondenza del valore $a = 0$ si hanno le due parabole passanti per i punti fissi P_1 e P_3 disegnate nel grafico di destra della figura 2.13. Si considera, ora, la curva di livello $a = 1$, cioè $(x^2 - 1)^2 - 1 = y^2$, che fornisce il punto fisso nell'origine e le curve di equazione $y = \pm\sqrt{(x^2 - 1)^2 - 1} = \pm\sqrt{x^2(x^2 - 2)}$. Queste curve sono definite nella regione $x < \sqrt{2}$ e $x > \sqrt{2}$, negli estremi degli intervalli di definizione intersecano l'asse y e in questo punto hanno derivata verticale, per esempio per il ramo positivo

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x^2(x^2 - 2)} = \frac{1}{2\sqrt{x^2(x^2 - 2)}}(4x^3 - 4x) = \frac{2x(x^2 - 1)}{\sqrt{x^2(x^2 - 2)}}$$

L'espressione della derivata appena calcolata mostra anche che l'arco di curva di livello considerato è decrescente nella regione $x < \sqrt{2}$ e crescente nella regione $x > \sqrt{2}$. Tutte queste osservazioni permettono di disegnare la curva di livello $a = 1$; si veda la figura 2.13.

Tutte le altre curve di livello possono essere disegnate per continuità e il verso di percorrenza può essere stabilito sulla base del campo delle direzioni sui punti della curva, si veda il grafico a destra nella figura 2.13. Sulla base del ritratto di fase in figura si può concludere, anche se a rigore non si tratta di dimostrazioni cristalline perché le linee di fase sono state dedotte con argomenti non del tutto rigorosi, che il punto fisso P_2 è stabile, mentre gli altri due punti fissi sono instabili. La curva di livello passante per i punti fissi instabili, cioè la curva di livello $u(x, y) = 0$, è detta **separatrice** e in questo caso è costituita da due parabole.

Per quanto riguarda i valori di a nelle diverse regioni in cui è suddiviso il ritratto di fase è sufficiente calcolare $u(x, y)$ in qualche punto opportuno e poi ricordare che u è una funzione continua:

- per $a = 0$, la curva di livello è la separatrice, cioè passa per i due punti fissi instabili, ed è costituita dall'unione dei due grafici delle parabole di equazione $y = \pm(x^2 - 1)$. Sulla separatrice giacciono otto linee di fase, due delle quali corrispondono ai punti fissi.

- Per $a = 1$, la curva di livello passa per il punto fisso stabile e consta di tre componenti conesse: una degenera e coincidente con l'origine e le altre due costituite dall'unione dei grafici delle funzioni $y = \pm\sqrt{x^2(x^2 - 1)}$ rispettivamente per $x \leq -\sqrt{2}$ e $x \geq \sqrt{2}$. Su ciascuna componente connessa giace una sola linea di fase, pertanto sulla curva di livello corrispondente ad $a = 1$ giacciono tre linee di fase.
- Per $a < 0$, si hanno le curve di livello nella regione al di sopra delle separatrici e in quella al di sotto delle separatrici; più precisamente ciascuna curva è costituita da due componenti conesse le quali giacciono rispettivamente nelle regioni del piano delle fasi

$$A_{a<0,+} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x \leq -1 \text{ e } y > x^2 - 1) \text{ o } (-1 \leq x \leq 1 \text{ e } y > 1 - x^2) \text{ o } (x \geq 1 \text{ e } y > x^2 - 1)\}$$

e

$$A_{a<0,-} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x \leq -1 \text{ e } y < 1 - x^2) \text{ o } (-1 \leq x \leq 1 \text{ e } y < x^2 - 1) \text{ o } (x \geq 1 \text{ e } y < 1 - x^2)\}$$

Si noti che $A_{a<0,-}$ è ottenuta da $A_{a<0,+}$ per simmetria rispetto all'asse x . Su ciascuna componente connessa di ciascuna curva di livello giace una sola linea di fase. Quindi su ciascuna curva di livello giacciono due linee di fase.

- Per $0 < a < 1$, ciascuna curva di livello è costituita da tre componenti conesse: una è una curva chiusa attorno all'origine che giace nella regione compresa tra le due parabole che costituiscono la separatrice; le altre due sono simmetriche rispetto all'asse y e giacciono nella regione compresa tra la separatrice e le due componenti conesse non degeneri della curva di livello corrispondente ad $a = 1$. Su ciascuna componente connessa giace una sola linea di fase; quindi sulla curva di livello giacciono tre linee di fase una delle quali corrisponde a un moto periodico.
- Per $a > 1$, ciascuna curva di livello è costituita da due componenti conesse che giacciono rispettivamente nelle regioni del piano delle fasi

$$A_{a>1,+} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > \sqrt{2} \text{ e } -\sqrt{x^2(x^2 - 1)} < y < \sqrt{x^2(x^2 - 1)}\}$$

e

$$A_{a>1,-} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < -\sqrt{2} \text{ e } -\sqrt{x^2(x^2 - 1)} < y < \sqrt{x^2(x^2 - 1)}\}$$

Si noti che $A_{a>1,-}$ è ottenuta da $A_{a>1,+}$ per simmetria rispetto all'asse y . Su ciascuna componente connessa di ciascuna curva di livello giace una sola linea di fase. Quindi su ciascuna curva di livello giacciono due linee di fase.

Le curve di livello $u(x, y) = a$ sono equazioni algebriche di quarto grado che possono essere risolte rispetto alla variabile y ; per esempio il ramo positivo della curva di livello corrispondente ad $a = 1$ ha equazione $y = \sqrt{(x^2 - 1)^2 - 1}$. Questa proprietà permette di esprimere come integrale definito il tempo di percorrenza lungo l'orbita di fase, per esempio il tempo T che il sistema preparato nel punto $(\sqrt{2}, 0)$ impiega per giungere nel punto $(2, 2\sqrt{2})$ si scrive come segue:

$$\dot{x} = 2y \Rightarrow \dot{x} = 2\sqrt{(x^2 - 1)^2 - 1} \Rightarrow \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - 1)^2 - 1}} = 2 \int_0^T dt \Rightarrow T = \frac{1}{2} \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - 1)^2 - 1}}$$

Questo integrale può essere calcolato numericamente o stimato con i metodi discussi nel paragrafo 1.4.

Come secondo esempio si considera la separatrice $y = -(x^2 - 1)$ e si suppone di preparare il sistema in $(0, 1)$; sia $T(b)$ il tempo impiegato per giungere in $(b, 1 - b^2)$ con $0 < b < 1$, procedendo come prima si ha

$$\dot{x} = 2(1 - x^2) \Rightarrow \int_0^b \frac{dx}{1 - x^2} = 2 \int_0^{T(b)} dt \Rightarrow T(b) = \frac{1}{2} \int_0^b \frac{dx}{1 - x^2} \Rightarrow T(b) = \frac{1}{4} \int_0^b \left[\frac{1}{1 - x} + \frac{1}{1 + x} \right] dx$$

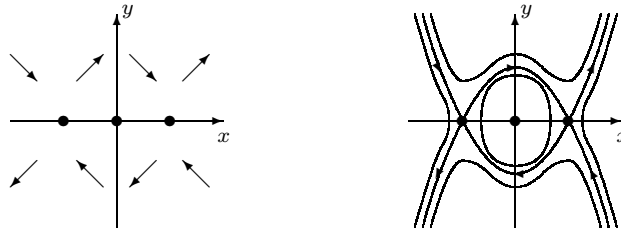


Fig. 2.13. A sinistra: il campo vettoriale in alcuni punti dello spazio delle fasi per il sistema dinamico dell'Esempio 2.19. A destra: il ritratto di fase; i versi di percorrenza sono indicati esplicitamente solo sulla separatrice, sulle altre linee di fase possono essere dedotti per continuità del campo f .

Da cui si ha $T(b) = (1/4) \log[(1+b)/(1-b)]$; si osservi che il tempo diverge positivamente per $b \rightarrow 1$ e ciò è consistente con il fatto che il sistema si avvicina a un punto fisso instabile.

In generale non è facile seguire la procedura proposta nelle pagine precedenti per determinare l'integrale primo perché non si riesce a determinare la funzione incognita μ che rende esatta la forma differenziale (2.14). Un metodo a volte utile è quello di *separazione delle variabili*; segue un esempio di applicazione di questo metodo.

Esempio 2.20. Si determina l'integrale primo del sistema dinamico di Lotka–Volterra (2.10) già introdotto nell'Esempio 2.17 usando la procedura spiegata nel testo per i sistemi dinamici bidimensionali; si vedano le equazioni (2.14) e (2.15). Si usa la notazione (x, y) per (x_1, x_2) .

nel diagramma a sinistra nella figura 2.13. Per capire più a fondo la struttura del ritratto di fase si cerca un integrale primo del sistema dinamico: si considera il campo $\nu(x, y) = (\alpha y(x-1), -x(1-y))$ ortogonale in ogni punto al campo delle direzioni e, ricordando che l'integrale primo deve avere gradiente parallelo a ν in ogni punto, deve esistere una funzione $\mu : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $\nabla u(x, y) = \mu(x, y)\nu(x, y)$, ovvero

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \alpha y(x-1)\mu(x, y) \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -x(1-y)\mu(x, y) \quad (2.20)$$

Si deve determinare μ in modo che il campo differenziale costituito dalle due funzioni al secondo membro delle equazioni precedenti sia chiuso:

$$\frac{\partial}{\partial y}[\alpha y(x-1)\mu(x, y)] = -\frac{\partial}{\partial x}[x(1-y)\mu(x, y)] \Rightarrow \alpha(x-1)\frac{\partial}{\partial y}[y\mu(x, y)] = (1-y)\frac{\partial}{\partial x}[x\mu(x, y)]$$

Le variabili sono separate quindi ha senso cercare μ nella forma $\mu(x, y) = X(x)Y(y)$, si vede subito che una scelta possibile è $\mu(x, y) = (1/x)(1/y)$. Allora l'integrale primo è soluzione delle equazioni (2.20) con la funzione $\mu = 1/(xy)$. Integrando la prima si ha $u(x, y) = \alpha(x - \log x) + \Phi(y)$, dove Φ è una funzione arbitraria della sola variabile y , sostituendo questa espressione nella seconda delle (2.20) si trova

$$\Phi'(y) = 1 - \frac{1}{y} \Rightarrow \Phi(y) = y - \log y + \text{costante} \Rightarrow u(x, y) = \alpha(x - \log x) + y - \log y$$

dove la costante è stata scelta uguale a zero.

Negli esempi precedenti si è visto che gli integrali primi sono uno strumento molto valido nell'analisi qualitativa dei sistemi dinamici planari. In particolare si è visto che permettono di tracciare con notevole precisione il ritratto di fase e sulla base della struttura delle linee di fase spesso è possibile anche discutere la stabilità dei punti fissi. A questo proposito è possibile enunciare due risultati molto interessanti che sono stati già usati in modo non esplicito nelle analisi grafiche discusse in alcuni degli esempi precedenti.

Teorema 2.21 *Si consideri il sistema dinamico $\dot{x} = f(x)$ con $f : I \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ di Lipschitz sull'aperto connesso $I \subset \mathbb{R}^n$. Se il sistema dinamico ammette un integrale primo non identicamente costante su alcun sottoinsieme aperto di I allora il sistema dinamico non ha punti fissi asintoticamente stabili.*

Dimostrazione. Per assurdo sia $x_e \in I$ un punto fisso asintoticamente stabile per il sistema dinamico. Allora esiste un intorno sferico (aperto) $I' \subset I$ di x_e tale che per ogni $x_0 \in I'$, detta $\varphi_{x_0} : [0, +\infty) \rightarrow I$ l'unica soluzione del problema di Cauchy associato al sistema dinamico con dato iniziale $x(0) = x_0$, si ha $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_{x_0}(t) = x_e$. Sia $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ l'integrale primo che esiste per ipotesi, allora

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_{x_0}(t) = x_e \quad \forall x_0 \in I' \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} u(\varphi_{x_0}(t)) = u(x_e) \quad \forall x_0 \in I'$$

Ricordando che u è costante lungo ogni moto e che $\varphi_{x_0}(0) = x_0$, si ha $u(x_0) = u(x_e) \quad \forall x_0 \in I'$. In conclusione abbiamo dimostrato che u è costante nell'aperto I' e ciò è assurdo per ipotesi.

Teorema 2.21 \square

Teorema 2.22 *Si consideri il sistema dinamico planare $\dot{x} = f(x)$ con $f : I \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ di Lipschitz sull'aperto connesso $I \subset \mathbb{R}^2$. Si supponga che il sistema dinamico ammette un integrale primo $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ non identicamente costante su alcun sottoinsieme aperto di I e che esista un aperto $I' \subset I$ tale che sia vera una delle due seguenti affermazioni:*

- I' è la regione compresa tra due componenti connesse di una curva di livello chiusa di u e non contiene punti fissi;
- I' è la regione delimitata da una curva di livello chiusa di u , esiste un unico punto fisso x_e appartenente a I' e tale punto fisso è stabile.

Allora, tutte le curve integrali del sistema dinamico corrispondenti a dati iniziali del problema di Cauchy appartenenti a $I' \setminus \{x_e\}$ sono periodiche e, nel secondo caso, si svolgono attorno al punto fisso x_e .

Dimostrazione. La dimostrazione di questo risultato va oltre gli scopi di queste note; si rimanda a [4, Capitolo 5, Paragrafo 20].

Teorema 2.22 \square

Esercizio 2.6. Si determini un integrale primo del sistema dinamico (2.8) studiato negli Esempi 2.7–2.10 e si verifichi che le linee di fase determinate negli esempi giacciono sulle curve di livello.

Esercizio 2.7. Si determini un integrale primo del sistema dinamico (2.9) studiato nell'Esempio 2.11 e si verifichi che le linee di fase determinate negli esempi giacciono sulle curve di livello.

Esercizio 2.8. Si determinino i punti fissi e un integrale primo del sistema dinamico planare $\dot{x} = f(x)$ con $x = (x_1, x_2)$ e $f(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$. Si disegni il ritratto di fase.

Esercizio 2.9. Dati due campi vettoriali f e g continui sull'aperto connesso $I \subset \mathbb{R}^n$ esiste un terzo campo vettoriale continuo h tale che $L_f L_g - L_g L_f = L_h$; dove l'uguaglianza va intesa in senso operatoriale, cioè è vera qualunque sia la funzione scalare cui si applicano gli operatori differenziali al primo e al secondo membro. Posto $h := [f, g]$, si dimostrino le seguenti tre proprietà

- $[f, g + \lambda h] = [f, g] + \lambda [f, h]$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$;
- $[f, g] + [g, f] = 0$;
- $[[f, g], h] + [[g, h], f] + [[h, f], g] = 0$ (identità di Jacobi).

Esercizio 2.10. Uno spazio vettoriale sul quale sia definita un'operazione binaria che gode delle proprietà enunciate nell'Esercizio 2.9 costituisce un'algebra di Lie. Si dimostri che lo spazio vettoriale tridimensionale è un'algebra di Lie rispetto all'operazione di prodotto vettoriale. Si dimostri che lo spazio delle matrici quadrate di ordine n è un'algebra di Lie rispetto all'operazione di commutazione $[A, B] = AB - BA$.

Esercizio 2.11. Si dimostri, costruendo opportuni esempi, che la derivata di Lie rispetto a campi vettoriali diversi non è commutativa, cioè che in generale $L_f L_g u - L_g L_f u \neq 0$ dove $u : I \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è differenziabile sull'aperto connesso I e $f, g : I \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sono due generici campi vettoriali continui su I .

Soluzione: per esempio nel caso $n = 1$ se si considera $f(x) = 1$ e $g(x) = x$, si ha $L_f L_g u = u + xu''$ e $L_g L_f u = xu''$.

2.5. Stabilità dei punti fissi

Nei paragrafi precedenti si è discussa l'importanza della nozione di stabilità e si sono visti anche molti esempi nei quali è stato possibile studiare la stabilità dei punti fissi sulla base del ritratto di fase. Ovviamente questo approccio porta a buoni risultati soltanto nel caso bidimensionale, dove, soprattutto se si ha a disposizione un integrale primo, si riesce a disegnare in modo molto dettagliato il ritratto di fase. Per lo studio della stabilità in problemi in dimensione maggiore di due è evidente l'importanza di teoremi che permettano di stabilire il comportamento delle orbite nelle vicinanze di un punto critico del sistema dinamico (2.6) sulla base di proprietà analitiche del campo delle direzioni f .

In questo paragrafo verranno discussi due diversi approcci: quello basato sullo studio di un sistema dinamico lineare ottenuto approssimando il sistema dinamico di partenza in un intorno di un punto fisso e quello basato sulla teoria di Liapunov.

Si consideri il sistema dinamico (2.6) e si supponga che il campo delle direzioni $f : I \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sia di classe $C^1(I)$. Sia x_e un punto fisso di (2.6) e si consideri la matrice jacobiana A di tipo $n \times n$ e di elementi $A_{i,j} := \partial f_i / \partial f_j(x_e)$ per ogni $i, j = 1, \dots, n$. Si dice **sistema linearizzato** associato al sistema dinamico (2.6) nell'intorno del punto fisso x_e il sistema dinamico lineare

$$\dot{x} = A(x - x_e) \tag{2.21}$$

dove il prodotto al secondo membro va inteso come il prodotto righe per colonne della matrice A per il vettore colonna $x - x_e$. Poiché f è di classe $C^1(I)$ si ha

$$\lim_{x \rightarrow x_e} \frac{|f(x) - A(x - x_e)|}{|x - x_e|} = 0$$

ciò fa intuire che in qualche senso le orbite di fase di (2.6) vicine al punto fisso x_e sono ben approssimate dalle orbite del sistema linearizzato (2.21). Ovviamente queste sono parole vuote (si veda l'Esempio 2.29), sta di fatto che sulla base dello studio di (2.21) è possibile stabilire le importanti proprietà relative alla stabilità del punto fisso x_e riassunte nel seguente teorema, detto anche *principio di stabilità lineare*.

Teorema 2.23 *Si consideri il sistema dinamico (2.6) con $f : I \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ di classe $C^1(I)$. Sia x_e un suo punto fisso; si consideri il sistema linearizzato (2.21) associato a (2.6) nell'intorno di x_e . Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ gli n autovalori della matrice A , allora*

- se $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$ per ogni $i = 1, \dots, n$ allora il punto fisso x_e è asintoticamente stabile;
- se esiste $i \in \{1, \dots, n\}$ tale che $\operatorname{Re} \lambda_i > 0$ allora il punto fisso x_e è instabile.

Dimostrazione. La dimostrazione di questo risultato va oltre gli scopi di queste note; si rimanda a [4, Capitolo 4, Paragrafo 17].

Teorema 2.23 \square

Questo teorema è molto potente, ma prima di discuterne le applicazioni si esaminano i suoi limiti: sulla base del teorema precedente non si potrà mai individuare un punto fisso stabile che non sia anche asintoticamente stabile. Più precisamente il teorema non permette di concludere nulla sulla stabilità di x_e nel caso in cui gli autovalori hanno tutti parte reale minore o uguale a zero, ma ve ne è almeno uno con parte reale nulla.

Esempio 2.24. Si considera il sistema di Lotka–Volterra (2.10) e si calcolano le derivate parziali prime del campo delle direzioni:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 1 - x_2, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = -x_1, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = \alpha x_2, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = \alpha(x_1 - 1)$$

Studio del punto fisso $(0, 0)$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A - \lambda \mathbb{I}) = -(1 - \lambda)(\alpha + \lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -\alpha < 0 < \lambda_2 = 1$$

L'esistenza di un autovalore con parte reale positiva implica che il punto fisso $(0, 0)$ è instabile. Studio del punto fisso $(1, 1)$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A - \lambda \mathbb{I}) = \lambda^2 + \alpha = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\alpha}$$

dove si è usato che $\alpha > 0$. Tutti gli autovalori hanno parte reale nulla, quindi il teorema precedente non permette di stabilire nulla sulla stabilità del punto fisso $(1, 1)$.

Esempio 2.25. Si considera il sistema dinamico (2.16) studiato nell'Esempio 2.18 e si calcolano le derivate parziali prime del campo delle direzioni:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = e^x y^2, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = 2ye^x, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x} = -y(e^x x + e^x), \quad \frac{\partial f_2}{\partial y} = -e^x x$$

Studio del punto fisso $(\bar{x}, 0)$ con $\bar{x} \in \mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -e^{\bar{x}} \bar{x} \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A - \lambda \mathbb{I}) = \lambda(\lambda + xe^x) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = -\bar{x}e^{\bar{x}}$$

Per $\bar{x} < 0$ si può concludere che il punto fisso è instabile, perché esiste un autovalore con parte reale positiva, mentre per $\bar{x} \geq 0$ non si può dire nulla.

Esempio 2.26. Si considera il sistema dinamico (2.18) studiato nell'Esempio 2.19 e si calcolano le derivate parziali prime del campo delle direzioni:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = 2, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x} = 12x^2 - 4, \quad \frac{\partial f_2}{\partial y} = 0$$

Studio del punto fisso $(-1, 0)$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 8 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A - \lambda \mathbb{I}) = \lambda^2 - 16 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -4 < 0 < \lambda_2 = 4$$

Il punto fisso $(-1, 0)$ è instabile; lo studio del punto fisso $(1, 0)$ è analogo. Studio del punto fisso $(0, 0)$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A - \lambda \mathbb{I}) = \lambda^2 + 8 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 2i\sqrt{2}$$

Non si può dire nulla perché entrambi gli autovalori hanno parte reale nulla.

Negli Esempi 2.24–2.26 si sono presentati punti fissi la cui stabilità non può essere studiata per mezzo del Teorema 2.23 a causa della presenza di almeno un autovalore con parte reale nulla tra gli autovalori della matrice del sistema linearizzato associato. In tutti i casi discussi, però, sulla base del ritratto di fase è possibile stabilire che i punti fissi in questione sono stabili. Si discute, ora, un esempio che mette in luce come si possano verificare casi in cui il principio di stabilità lineare, ovvero il Teorema 2.23, non permette di studiare la stabilità di punti fissi instabili.

Esempio 2.27. Si considera il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = y^3 \end{cases} \quad (2.22)$$

L'origine è l'unico punto fisso e da una semplice analisi grafica del campo delle direzioni si deduce che è instabile. Questo risultato può essere dimostrato anche determinando per separazione delle variabili la soluzione esplicita del problema di Cauchy associato a (2.22) con dato iniziale $(x(0), y(0)) = (0, y_0)$ con $y_0 > 0$; si ottiene $x(t) = 0$ e $y(t) = 1/\sqrt{(1/y_0)^2 - 2t}$ che diverge per $t \rightarrow 1/(2y_0^2)$. Si studia, ora, il sistema linearizzato nell'intorno dell'origine:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A - \lambda \mathbb{I}) = \lambda(\lambda + 1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1 < \lambda_2 = 0$$

Sulla base del solo Teorema 2.23 non si può dire nulla perché un autovalore è nullo e l'altro è negativo.

Come si è osservato in precedenza il Teorema 2.23 lascia dei casi scoperti, cioè non permette sempre di determinare la stabilità di un punto fisso sulla base dell'analisi degli autovalori della matrice del sistema linearizzato associato al punto fisso. Gli Esempi 2.24–2.27 appena discussi mostrano come nei casi in cui il Teorema 2.23 non fornisce alcuna informazione utile il punto fisso può essere sia stabile sia instabile. Questa lacunosità del principio di stabilità lineare è da contrapporre alla completezza della sua versione per i *sistemi dinamici lineari* a coefficienti costanti; in questo caso, infatti, studiando gli autovalori della matrice del sistema è sempre possibile determinare la stabilità del punto fisso.

Teorema 2.28 (Stabilità dei sistemi dinamici lineari) *Si consideri il sistema dinamico lineare a coefficienti costanti*

$$\dot{x} = A(x - x_e) \quad (2.23)$$

dove A è una matrice quadrata $n \times n$ di numeri reali, $x_e \in \mathbb{R}^n$ è fissato e il prodotto al secondo membro va inteso come prodotto riga per colonna. Il punto x_e è un suo punto fisso del sistema dinamico (2.23). Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ gli n autovalori della matrice A , allora

- se $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$ per ogni $i = 1, \dots, n$ allora il punto fisso x_e è asintoticamente stabile;
- se esiste $i \in \{1, \dots, n\}$ tale che $\operatorname{Re} \lambda_i > 0$ allora il punto fisso x_e è instabile;
- se $\operatorname{Re} \lambda_i \leq 0$ per ogni $i = 1, \dots, n$ e esiste almeno un $j \in \{1, \dots, n\}$ tale che $\operatorname{Re} \lambda_j = 0$, allora x_e è stabile se ciascun autovalore immaginario puro ha molteplicità geometrica uguale alla molteplicità algebrica, altrimenti è instabile.

Dimostrazione. La dimostrazione di questo risultato va oltre gli scopi di queste note; si rimanda a [6, Paragrafo 4.2, Theorem 4.1].

Teorema 2.23 \square

Riassumendo la discussione precedente si può concludere che l'analisi degli autovalori della matrice del sistema lineare permette di riconoscere *sempre* il comportamento stabile dei punti fissi del sistema lineare, mentre *a volte* lo studio della matrice A del sistema linearizzato non fornisce alcuna informazione sulla stabilità del punto fisso attorno al quale è stato linearizzato il sistema dinamico (non lineare) di partenza. Tutto ciò può essere interpretato dicendo che in alcuni casi il sistema linearizzato attorno a un punto fisso *non approssima bene* il comportamento delle traiettorie del sistema di partenza vicine al punto fisso; l'esempio che segue permette di chiarire a fondo questo concetto.

Esempio 2.29. Si considera il sistema dinamico planare studiato nell'Esempio 2.27. Come si è visto l'origine è l'unico punto fisso ed è instabile, ma questo risultato non può essere riconosciuto sulla base dello studio degli autovalori del sistema linearizzato. D'altro canto per il sistema linearizzato l'origine è un punto fisso stabile, infatti, ricordando la matrice A determinata nell'Esempio 2.27, si ha che il sistema linearizzato è

$$\begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = 0 \end{cases}$$

e il corrispondente problema di Cauchy con dato iniziale $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$ ha l'unica soluzione $x(t) = x_0 \exp\{-t\}$ e $y(t) = y_0$.

La soluzione del problema di Cauchy con medesimo dato iniziale per il sistema dinamico di partenza (2.22), che è evidentemente non lineare, è completamente diversa; si trova facilmente $x(t) = x_0 \exp\{-t\}$ e $y(t) = a(y_0)/\sqrt{(1/y_0)^2 - 2t}$, dove $a(y_0) = +1$ se $y_0 > 0$, $a(y_0) = 0$ se $y_0 = 0$ e $a(y_0) = -1$ se $y_0 < 0$. Le due soluzioni sono rappresentate in figura 2.14: dai grafici si vede immediatamente che l'origine è stabile per il sistema linearizzato, mentre è instabile per quello originario. Il comportamento qualitativo delle orbite dei due sistemi dinamici risulta, quindi, completamente diverso.

Un approccio diverso alla stabilità è costituito dalla teoria di Liapunov; piuttosto che studiare il comportamento delle orbite in un intorno piccolo del punto fisso approssimando

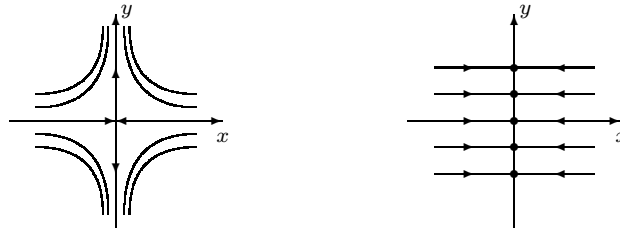


Fig. 2.14. A sinistra: ritratto di fase del sistema dinamico (2.22); il punto fisso ha la natura di una sella. A destra: ritratto di fase del sistema dinamico ottenuto linearizzando (2.22) attorno all'origine.

il sistema dinamico con un sistema lineare, si cerca di dedurre il comportamento del sistema esibendo delle funzioni definite sullo spazio delle fasi che abbiano comportamenti peculiari lungo ciascuna traiettoria di fase, si pensi, per esempio, agli integrali primi che sono costanti lungo le linee di fase. La teoria di Liapunov permette di studiare i punti fissi per i quali non è possibile applicare il teorema sulla stabilità lineare, per esempio i punti fissi stabili di sistemi dinamici che hanno un integrale primo o i punti fissi asintoticamente stabili di sistemi dinamici ottenuti aggiungendo un termine dissipativo al campo delle direzioni di un sistema dinamico che ammette una costante del moto.

Teorema 2.30 (Liapunov sulla stabilità dei punti fissi) *Si consideri il sistema dinamico (2.6) con campo delle direzioni $f : I \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ continuo e di Lipschitz su I e sia x_e un suo punto fisso. Si supponga che esiste una funzione $w : I' \subset I \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 sull'intorno sferico (aperto) I' di x_e tale che*

- $w(x_e) = 0$ e $w(x) > 0$ per ogni $x \in I' \setminus \{x_e\}$;
- $L_f w(x) \leq 0$ per ogni $x \in I'$;

allora il punto fisso x_e è stabile. Se, inoltre, la funzione w è tale che

- $L_f w(x) < 0$ per ogni $x \in I' \setminus \{x_e\}$

allora il punto fisso x_e è asintoticamente stabile.

Dimostrazione. Si dimostra dapprima la prima parte del teorema. Sia $\varepsilon > 0$ tale che la palla di centro x_e e raggio ε sia tutta contenuta nell'aperto I' , cioè $B_\varepsilon(x_e) \subset I'$. Il problema sta nel determinare un numero reale e positivo δ tale che il moto emergente da un qualunque dato iniziale nella palla di raggio δ centrata nel punto fisso resta confinato nella palla $B_\varepsilon(x_e)$.

Si considera la frontiera $\partial B_\varepsilon(x_e)$, che è un insieme chiuso e limitato, e il minimo $m > 0$ che la funzione w assume su $\partial B_\varepsilon(x_e)$; tale minimo esiste per la continuità di w . Dal momento che per ipotesi $w(x_e) = 0 < m$ si ha che l'insieme $A := \{x \in I' : w(x) < m/2\}$ contiene x_e ; inoltre dalla continuità di w segue che A è un insieme aperto. Allora esiste un numero reale $\delta > 0$ tale che la palla di raggio δ centrata in x_e è tutta contenuta in A , cioè $B_\delta(x_e) \subset A$.

La palla $B_\delta(x_e)$ è proprio quella che fa al nostro gioco; l'idea alla base del seguito della dimostrazione è la seguente: se il sistema parte da un punto di $B_\delta(x_e)$ parte da un punto in cui la funzione w vale meno di m ; per uscire da $B_\varepsilon(x_e)$ deve giungere sulla sua frontiera e quindi toccare punti in cui w vale m , cioè il valore di w deve aumentare durante il moto e ciò è in contraddizione con la seconda ipotesi del teorema. Più precisamente: per assurdo esiste un moto $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ con dato iniziale $\varphi(0) = x_0 \in B_\delta(x_e)$ tale che per $\bar{t} \in J$ finito giunge sulla frontiera di $B_\varepsilon(x_e)$, cioè $\varphi(\bar{t}) \in \partial B_\varepsilon(x_e)$. Allora

$$\int_0^{\bar{t}} L_f w(\varphi(t)) dt = \int_0^{\bar{t}} \frac{d}{dt} w(\varphi(t)) dt = w(\varphi(\bar{t})) - w(\varphi(0)) > \frac{m}{2}$$

che è in palese contraddizione con la seconda ipotesi del teorema. Quindi il moto è definito su $[t_0, +\infty)$ e il punto fisso è stabile.

Si dimostra, ora, la seconda parte del teorema. Si sceglie $\varepsilon > 0$ come in precedenza e per la stabilità appena dimostrata esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x_0 \in B_\delta(x_e)$ il moto $\varphi : [t_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ con dato iniziale $\varphi(0) = x_0$ resta nella palla $B_\varepsilon(x_e)$ per ogni $t \geq 0$.

Per assurdo esiste un numero reale $\lambda > 0$ tale che il moto non entra mai nella palla $B_\lambda(x_e)$; allora per ogni $t \geq t_0$ si ha $\varphi(t) \in B_\varepsilon(x_e) \setminus B_\lambda(x_e)$. Posto

$$\alpha := \max_{x \in \bar{B}_\varepsilon(x_e) \setminus B_\lambda(x_e)} L_f w(x) < 0$$

dove si è usata la terza ipotesi del teorema, si ha che per ogni $t \geq t_0$

$$w(\varphi(t)) - w(\varphi(t_0)) = \int_{t_0}^t \frac{d}{ds} w(\varphi(s)) ds = \int_{t_0}^t L_f w(\varphi(s)) ds \leq \alpha(t - t_0)$$

Da cui si deduce che, per t abbastanza grande, $w(\varphi(t))$ è minore di zero e ciò è assurdo perché per ipotesi w è definita positiva in I' .

Teorema 2.30 \square

Teorema 2.31 (Liapunov sulla instabilità) *Si consideri il sistema dinamico (2.6) con campo delle direzioni $f : I \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ continuo e di Lipschitz su I e sia x_e un suo punto fisso. Si supponga che esiste una funzione $w : I' \subset I \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 sull'intorno sferico (aperto) I' di x_e tale che*

- $w(x_e) = 0$ e $w(x) > 0$ per ogni $x \in I' \setminus \{x_e\}$;
- $L_f w(x_e) \geq 0$ e $L_f w(x) > 0$ per ogni $x \in I' \setminus \{x_e\}$;

allora il punto fisso x_e è instabile.

Dimostrazione. Si può costruire una dimostrazione in analogia con quanto fatto per il Teorema 2.30, ma in realtà è sufficiente osservare che se si considera il sistema dinamico ottenuto cambiando il segno alla variabile temporale, $\tau = -t$, si ha

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{dx}{dt} \frac{dt}{d\tau} = -\frac{dx}{dt} = -f(x)$$

Per il sistema dinamico così ottenuto valgono le tre ipotesi del Teorema 2.30 e quindi il punto fisso x_e è asintoticamente stabile. Se x_e è asintoticamente stabile per $dx/d\tau = -f(x)$, allora sarà instabile per il sistema dinamico di partenza.

Teorema 2.31 \square

Una funzione che soddisfi ai primi due requisiti nell'enunciato del teorema precedente è detta **di Liapunov** per il punto fisso x_e , se soddisfa anche all'ulteriore terzo requisito è detta **di Liapunov in senso stretto**. È immediato che il teorema precedente permette di dimostrare la stabilità di un punto fisso che sia un minimo relativo proprio di un integrale primo u , infatti l'essere minimo relativo proprio implica che u soddisfa alla prima ipotesi del teorema, il fatto che u è un integrale primo implica che è soddisfatta anche la seconda ipotesi.

Esempio 2.32. Si discutono alcuni sistemi dinamici studiati negli esempi precedenti alla luce del teorema di stabilità di Liapunov. È facile dimostrare che $(1, 1)$ è punto fisso stabile del sistema di Lotka–Volterra (2.10): l'integrale primo ha un minimo relativo proprio in $(0, 0)$, ma $u(0, 0) \neq 0$; ciò non è grave, è sufficiente considerare $w(x, y) = u(x, y) - u(0, 0) = \alpha(x - \log x) + y - \log y - \alpha - 1$. Ovviamente w ha un minimo relativo proprio in $(1, 1)$, in tale punto assume valore 0 e inoltre $L_f w(x, y) = 0$ perché anche w è un integrale primo del sistema dinamico di Lotka–Volterra; in conclusione w è una funzione di Liapunov e quindi $(1, 1)$ è un punto critico stabile.

È immediato dimostrare che $(0, 0)$ è punto fisso stabile del sistema dinamico (2.16) usando l'integrale primo come funzione di Liapunov. Per quanto riguarda i punti fissi del tipo $(\bar{x}, 0)$, con $\bar{x} > 0$, si può usare come funzione di Liapunov il paraboloide centrato nel punto fisso $w(x, y) := (x - \bar{x})^2 + y^2$; si verifica facilmente che le ipotesi del Teorema 2.30 sono soddisfatte, in particolare

$$L_f w(x, y) = \nabla w(x, y) \cdot f(x, y) = 2(x - \bar{x})e^x y^2 - 2ye^x xy = -2\bar{x}y^2 e^x \leq 0 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

dove si è usato che \bar{x} è positivo; è un utile esercizio tentare di capire per quale motivo la derivata di Lie del paraboloide rispetto al campo f del sistema dinamico (2.16) risulta minore o uguale a zero, si ricordi che le orbite di fase del sistema dinamico sono archi di circonferenza che tendono all'asse x da sotto e da sopra l'asse.

Si considera, ora, il sistema dinamico (2.18) studiato in dettaglio nell'Esempio 2.19; l'origine $(0, 0)$ è un punto fisso del sistema dinamico, ma l'integrale primo $u(x, y) = (x^2 - 1)^2 - 1$ ha un punto di massimo relativo proprio in $(0, 0)$ e $u(0, 0) = 1$, quindi non è una funzione di Liapunov. Si osserva, però, che se u è integrale primo allora sarà integrale primo anche $w(x, y) := -[u(x, y) - 1]$, cioè $L_f w(x, y) = 0$, dove f è il campo delle direzioni del sistema dinamico in questione. D'altro canto w ha un minimo relativo proprio in $(0, 0)$ e $w(0, 0) = 0$; in conclusione w è una funzione di Liapunov e quindi $(0, 0)$ è stabile.

Esempio 2.33. Si considera il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = -x^3 + xy \\ \dot{y} = -y^3 - x^2 \end{cases} \quad (2.24)$$

Il sistema dinamico è nella forma (2.6) con campo delle direzioni $f(x, y) = (-x^3 + xy, -y^3 - x^2)$. Si determinano i punti fissi e se ne studia la stabilità. Punti fissi:

$$f(x, y) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x(-x^2 + y) = 0 \\ y^3 + x^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0 \text{ e } y = 0$$

Quindi l'origine è l'unico punto fisso. Per studiarne la stabilità si considera dapprima sistema linearizzato nell'intorno dell'origine; si calcolano le derivate del campo delle direzioni

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = -3x^2 + y, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = x, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x} = -2x^2, \quad \frac{\partial f_2}{\partial y} = 3y^2$$

e si studia la matrice associata al sistema linearizzato

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A - \lambda \mathbb{I}) = \lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

Il Teorema 2.23 non permette di trarre conclusioni a proposito della stabilità dell'origine.

Si cerca, allora, una funzione di Liapunov; tipicamente conviene provare con funzioni di secondo grado contenenti solo le potenze di ordine 2 (paraboloide), cioè $w(x, y) = ax^2 + by^2$, con $a, b > 0$; con questa scelta, infatti, si è sicuri che l'origine sia un punto di minimo relativo proprio per w . Allora

$$L_f w(x, y) = (2ax, 2by) \cdot (-x^3 + xy, -y^3 - x^2) = -2ax^4 + 2ax^2y - 2by^4 - 2bx^2y$$

In questo caso se si sceglie $a = b > 0$ il gioco è fatto, infatti:

$$L_f w(x, y) = -2ax^4 + 2ax^2y - 2ay^4 - 2ax^2y = -2a(x^4 + y^4)$$

È immediato osservare che w è una funzione di Liapunov in senso stretto per il punto fisso $(0, 0)$ e quindi, in virtù del Teorema 2.30, $(0, 0)$ è un punto fisso asintoticamente stabile.

Esempio 2.34. Moto armonico semplice. Si considera l'equazione differenziale lineare del secondo ordine che descrive il moto armonico semplice di una palla di massa m sottoposta all'azione di una molla di costante elastica κ :

$$m\ddot{z} + \kappa z = 0 \tag{2.25}$$

con $m, \kappa \in \mathbb{R}_+$.

In primo luogo si osserva che l'equazione (2.25) può essere scritta nella forma (2.6) introducendo le due nuove variabili $q = z$ e $p = m\dot{z}$, rispettivamente la posizione e l'impulso della palla. Infatti

$$\begin{cases} q = z \\ p = m\dot{z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{q} = \dot{z} \\ \dot{p} = m\ddot{z} = -\kappa z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{q} = p/m \\ \dot{p} = -\kappa q \end{cases} \tag{2.26}$$

Il sistema (2.26) è un sistema dinamico nella forma (2.6) con $x = (q, p) \in \mathbb{R}^2$ e campo delle direzioni $f(q, p) = (p/m, -\kappa q)$.

Si scrive ora l'energia meccanica totale che, come è stato già dimostrato nell'Esempio 2.16, è un integrale primo. Si osserva che detta $u(q) = \kappa q^2/2$, si ha $du/dq = \kappa q$, allora l'energia meccanica totale è

$$h(q, p) = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}\kappa q^2 \tag{2.27}$$

I punti di equilibrio soddisfano il sistema di equazioni $f(q, p) = 0$, ovvero

$$\begin{cases} f_1(q, p) = 0 \\ f_2(q, p) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p/m = 0 \\ -\kappa q = 0 \end{cases} \Rightarrow P = (0, 0)$$

è l'unico punto di equilibrio.

Per studiare la stabilità del punto fisso si linearizza il sistema in un intorno dell'origine. In realtà il sistema (2.26) è lineare e può essere scritto nella forma $\dot{x} = Ax$ con A la matrice 2×2 reale

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/m \\ -\kappa & 0 \end{pmatrix}$$

Si scrive, quindi, l'equazione secolare e si determinano gli autovalori della matrice A :

$$\det(A - \lambda \mathbb{I}) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1/m \\ -\kappa & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + \frac{\kappa}{m} = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i \sqrt{\frac{\kappa}{m}}$$

Gli autovalori di A sono complessi coniugati con parte reale nulla. Il Teorema 2.23 non permette di concludere nulla sulla stabilità dell'origine, ma, ricordando che il sistema sotto esame è un sistema lineare,

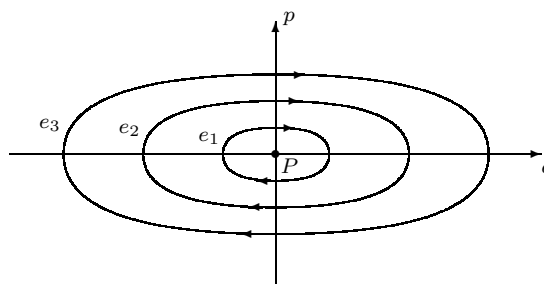


Fig. 2.15. Curve di livello per il moto armonico semplice; $P = (0, 0)$ è un punto di equilibrio stabile; $h(P) = 0$ e $e_3 > e_2 > e_1 > 0$.

si può invocare il Teorema 2.28 e concludere che $(0, 0)$ è un punto fisso stabile ma non asintoticamente stabile.

A titolo di esercizio si mostra come il problema possa essere affrontato con la teoria di Liapunov. Il punto P è estrema per la funzione $h(q, p)$. Per studiarne le proprietà si scrive la matrice hessiana $\mathcal{H}(q, p)$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial q^2} = \kappa \quad \frac{\partial^2 h}{\partial p^2} = \frac{1}{m} \quad \frac{\partial^2 h}{\partial q \partial p} = \frac{\partial^2 h}{\partial p \partial q} = 0$$

pertanto

$$\mathcal{H}(q, p) = \begin{pmatrix} \kappa & 0 \\ 0 & 1/m \end{pmatrix}$$

Inoltre $\det(\mathcal{H}(0, 0)) = \kappa/m > 0$ e $\mathcal{H}_{1,1}(0, 0) = \kappa > 0$ implicano che P è un punto di minimo per la funzione $h(q, p)$. Si dimostra che la funzione $w(q, p) = h(q, p) - h(0, 0)$ è una funzione di Liapunov, quindi usando il Teorema 2.30 si conclude che P è un punto di equilibrio stabile.

In primo luogo si osserva che $h(0, 0) = 0$. Fissato un numero reale $e > 0$ la curva di livello con energia e ha equazione

$$\frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}\kappa q^2 = e \quad (2.28)$$

Per ogni $e > 0$ la curva di livello è un'ellisse centrata nell'origine (si veda la figura 2.15). Per $e < 0$ non si hanno curve di livello. Per $e = 0$ la curva di livello coincide con il punto di equilibrio stabile. Orbite periodiche: per ogni valore di $e > 0$ la corrispondente curva di livello è una curva chiusa e regolare. Su di essa giace un'orbita periodica. Pertanto l'insieme dei dati iniziali che danno luogo a orbite periodiche è $\Pi = \mathbb{R} \setminus \{P\}$.

Si consideri $e > 0$. Lungo l'orbita con energia e si ha $p = \pm \sqrt{m(2e - \kappa q^2)}$. Per ragioni di simmetria il periodo T è dato dal doppio del tempo impiegato a percorrere l'arco superiore della traiettoria di equazione $p = \sqrt{m(2e - \kappa q^2)}$. Il punto iniziale è $(-\sqrt{2e/\kappa}, 0)$, mentre quello finale è $(\sqrt{2e/\kappa}, 0)$. Usando la prima delle (2.26) si ha

$$\frac{dq}{dt} = \frac{1}{m}p = \sqrt{\frac{2e - \kappa q^2}{m}} \Rightarrow \int_0^{T/2} dt = \int_{-\sqrt{2e/\kappa}}^{\sqrt{2e/\kappa}} \frac{dq}{\sqrt{(2e - \kappa q^2)/m}} = 2 \int_0^{\sqrt{2e/\kappa}} \frac{dq}{\sqrt{(2e - \kappa q^2)/m}}$$

Eseguendo la sostituzione $q = \sqrt{2e/\kappa} \sin \theta$ si ottiene

$$\frac{T}{2} = \sqrt{\frac{4m}{\kappa}} \int_0^{\pi/2} d\theta \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\kappa}}$$

Si osservi che il periodo è indipendente da e .

Esempio 2.35. Pendolo semplice. Si considera il pendolo semplice di lunghezza ℓ e massa m ; detto θ l'angolo tra la direzione del pendolo e la verticale discendente si ha che il moto è regolato dall'equazione $\ddot{\theta} =$

$-\omega^2 \sin \theta$, dove $\omega = \sqrt{g/\ell}$ è la pulsazione e g l'accelerazione di gravità. Procedendo come nell'Esempio 2.1 il problema può essere ricondotto allo studio del sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{q} = p \\ \dot{p} = -\omega^2 \sin q \end{cases} \quad (2.29)$$

dove si è posto $q = \theta$ e $p = \dot{\theta}$. Lo studio dettagliato di problemi meccanici unidimensionali verrà affrontato nel paragrafo 3, in questo esempio ci si limita a studiare la stabilità dell'origine.

In primo luogo si osserva che l'origine dello spazio delle fasi, ovvero il punto $q = 0$ e $p = 0$, è un punto fisso del sistema dinamico, infatti posto $f(q, p) = (p, -\omega^2 \sin q)$ il campo delle direzioni, si ha $f(0, 0) = 0$. Per studiare la stabilità dell'origine si può usare l'approccio di Liapunov. Si osserva dapprima che la funzione $h(q, p) = p^2/2 - \omega^2 \cos q$ è un integrale primo del sistema dinamico, infatti

$$L_f h(q, p) = \nabla h(q, p) \cdot f(q, p) = (\omega^2 \sin q)p + p(-\omega^2 \sin q) = 0$$

Si considera, poi, la funzione $w = h - h(0, 0) = h + \omega^2$ e si dimostra che è una funzione di Liapunov. In primo luogo $w(0, 0) = h(0, 0) - h(0, 0) = 0$; in secondo luogo

$$\frac{\partial^2 w}{\partial q^2} = \omega^2 \cos q, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial p^2} = 1, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial q \partial p} = 0$$

allora il determinante hessiano calcolato nell'origine vale ω^2 , quindi è positivo. In conclusione l'origine è un punto di minimo relativo proprio per la funzione w , quindi w è una funzione di Liapunov per l'origine che, a sua volta, è un punto fisso stabile.

Si considera, ora, il pendolo semplice sottoposto all'azione di una forza dissipativa proporzionale a $\dot{\theta}$ mediante un coefficiente positivo $b > 0$. In questo caso la descrizione in termini di sistema dinamico è analoga con l'unica (fondamentale) differenza che il campo delle direzioni è $f(q, p) = (p, -\omega^2 \sin q - bp)$. In questo caso la funzione w non è più un integrale primo del sistema dinamico, ma resta una funzione di Liapunov per l'origine, infatti

$$L_f w(q, p) = \nabla w(q, p) \cdot f(q, p) = (\omega^2 \sin q)p + p(-\omega^2 \sin q - bp) = -bp^2 \leq 0$$

In virtù del Teorema 2.30, allora, si conclude che l'origine è un punto fisso stabile. In questo caso ci si aspetta che l'origine sia anche asintoticamente stabile, purtroppo non è possibile riconoscere questa proprietà sulla base del Teorema 2.30 perché la terza ipotesi sulla funzione w non è soddisfatta, più precisamente $L_f w$ è uguale a zero sui punti dell'asse q , quindi w è una funzione di Liapunov per l'origine ma non è di Liapunov in senso stretto. Questa incapacità del teorema di Liapunov a trattare i punti asintoticamente stabili del pendolo dissipativo è in realtà comune a tutti i sistemi meccanici dissipativi; nel seguito si vedrà come il problema possa essere risolto per mezzo del Teorema 2.36 di Barbasin.

Al fine di enunciare il teorema di Barbasin si introduce il concetto di insieme positivamente invariante. Si considera il sistema dinamico (2.6) con f di Lipschitz su $I \subset \mathbb{R}^n$, si dice che $I' \subset I$ è **positivamente invariante** sotto l'evoluzione del sistema dinamico (2.6) se e solo per ogni $x_0 \in I'$ l'unica soluzione $\varphi : [t_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ del problema di Cauchy associato a (2.6) con dato iniziale $x(t_0) = x_0$ è definita globalmente su $[t_0, +\infty)$ e inoltre $\varphi(t) \in I'$ per ogni $t \geq t_0$. Ciascuna componente connessa di una superficie di livello è un insieme positivamente invariante.

Teorema 2.36 (Barbasin–Krasovskij) *Si consideri il sistema dinamico (2.6) con campo delle direzioni $f : I \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ continuo e di Lipschitz su I e sia x_e un suo punto fisso. Si supponga che esiste una funzione $w : I' \subset I \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 sull'intorno*

sferico (aperto) I' di x_e di Liapunov per x_e . Si suppone, inoltre, che esiste un insieme compatto $C \subset I'$ tale che $x_e \in C$, C è positivamente invariante e in $C \setminus \{x_e\}$ non esistono traiettorie lungo cui w è costante a eccezione del punto critico x_e . Allora il punto fisso x_e è asintoticamente stabile e il suo bacino d'attrazione contiene C .

Prima di dimostrare il teorema di Barbasin è utile discutere in modo molto sintetico l'applicazione al problema del pendolo dissipativo introdotto nell'Esempio 2.35; per una discussione più dettagliata si rimanda all'Esercizio 2.13. Si considera la funzione di Liapunov $w(q, p) = p^2/2 - \omega^2 \cos q + \omega^2$; è facile vedere che la sua curva di livello $w(q, p) = 2\omega^2$ è chiusa e contiene l'origine. Inoltre in ogni suo punto il campo delle direzioni f punta verso l'interno della regione C delimitata dalla curva di livello stessa. Se si osserva, infine, che gli unici punti di C in cui si abbia $L_f w = 0$ sono quelli che giacciono sull'asse q e che in tali punti il campo delle direzioni è parallelo all'asse p , si conclude, in virtù del Teorema 2.36 che l'origine è un punto fisso asintoticamente stabile e che la regione C è contenuta nel bacino d'attrazione, quindi ne costituisce una stima.

Prima di dimostrare il Teorema 2.36 è necessario introdurre il concetto di insieme limite. Si considera il sistema dinamico (2.6) con f di Lipschitz su $I \subset \mathbb{R}^n$, sia $x \in I$ e sia $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ l'unica soluzione del problema di Cauchy associato al sistema dinamico (2.6) con dato iniziale $\varphi(t_0) = x$. Si dice **insieme ω -limite** di x l'insieme $\omega(x) \subset \mathbb{R}^n$ costituito da tutti i punti $y \in \mathbb{R}^n$ tali che esiste una successione monotona crescente $t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k \leq \dots$ divergente positivamente tale che $\lim_{k \rightarrow +\infty} |\varphi(t_k) - y| = 0$. Si dice **insieme α -limite** di x l'insieme $\alpha(x) \subset \mathbb{R}^n$ costituito da tutti i punti $y \in \mathbb{R}^n$ tali che esiste una successione monotona decrescente $t_0 \geq t_1 \geq \dots \geq t_k \geq \dots$ divergente negativamente tale che $\lim_{k \rightarrow +\infty} |\varphi(t_k) - y| = 0$.

È immediato osservare che un punto fisso asintoticamente stabile è l'insieme ω -limite di ciascun punto del suo bacino d'attrazione; se si considera, invece, una linea di fase lungo cui si svolge un moto periodico passante per un punto $x \in \mathbb{R}^n$, allora l'insieme $\omega(x)$ è costituito dall'intera linea di fase. Per ulteriori esempi meno ovvi di insiemi limite si rimanda al paragrafo ??.

Dimostrazione del Teorema 2.36. Sia $x \in C$ e sia $\varphi : [t_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ la soluzione del problema di Cauchy associato al sistema dinamico (2.6) con dato iniziale $\varphi(t_0) = x$.

In primo luogo si dimostra che l'insieme ω -limite di x è non vuoto ed è contenuto in C . Dal momento che C è positivamente invariante, si ha che $\varphi(t) \in C$ per ogni $t \geq t_0$; allora data una successione monotona crescente $\{t_k\}$ divergente positivamente si ha che $\varphi(t_k) \in C$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Ricordando che C è compatto si conclude che esiste una sottosuccessione t_{k_s} estratta da t_k tale che $\varphi(t_{k_s})$ converge a un punto di C . Si può quindi concludere che

$$\omega(x) \neq \emptyset \quad \text{e} \quad \omega(x) \subset C \tag{2.30}$$

Si osserva, ora, che $\varphi(t) \in C$ per ogni $t \geq t_0$ e $L_f w(y) \leq 0$ per ogni $y \in C$ si ha che $w(\varphi(t))$ è una funzione monotona del tempo e quindi esiste il limite

$$w_x := \lim_{t \rightarrow +\infty} w(\varphi(t)) \tag{2.31}$$

Da questa proprietà segue che w è costante su $\omega(x)$: sia, infatti, $y \in \omega(x)$, per definizione di insieme limite esiste una successione monotona t_k divergente positivamente tale che $\varphi(t_k) \rightarrow y$ per $k \rightarrow +\infty$; allora, ricordando che w è continua,

$$w(y) = w\left(\lim_{k \rightarrow +\infty} \varphi(t_k)\right) = \lim_{k \rightarrow +\infty} w(\varphi(t_k)) = w_x$$

In conclusione w è costante su $\omega(x)$ e $w(y) = w_x$ per ogni $y \in \omega(x)$.

Si suppone, infine, per assurdo che l'insieme limite $\omega(x)$ contenga un punto $z \in C$ diverso da x_e ; si raggiungerà una contraddizione e per eliminare l'assurdo si dovrà dedurre che $\omega(x)$ non può contenere punti diversi da x_e , ma dal momento che $\omega(x) \neq \emptyset$ si dovrà concludere $\omega(x) = \{x_e\}$. Da ciò seguirà immediatamente la tesi. Per ottenere l'assurdo si considera l'unica orbita ψ del sistema dinamico con dato iniziale $\psi(t_0) = z$; dal momento che $\psi(t_0) = z \in \omega(x)$ e dall'invarianza degli insiemi limite, si veda² [4, Proprietà 16.19], si ha che $\psi(t) \in \omega(x)$ per ogni $t \geq t_0$. In conclusione

$$\psi(t) \in \omega(x) \quad \forall t \geq t_0 \Rightarrow w(\psi(t)) = w_x \quad \forall t \geq t_0$$

cioè w è costante lungo l'orbita uscente da z ; ciò è in contraddizione con le ipotesi del teorema.

Teorema 2.36 \square

Esercizio 2.12. Si consideri l'equazione differenziale lineare del secondo ordine che descrive il moto di una palla di massa m sottoposta all'azione di una forza derivante dal potenziale quartico $u(x) = -ax^2 + bx^4$, con $a, b > 0$. Il moto è descritto dall'equazione di Newton:

$$m\ddot{z} + \frac{du}{dz} = 0 \tag{2.32}$$

Si risponda ai seguenti quesiti: 1. si riconduca la (2.32) a un sistema dinamico planare. 2. Si determini una costante del moto. 3. Si determinino i punti di equilibrio e 4. se ne studi la loro stabilità. 5. Si disegnino le curve di livello e si determini l'insieme Π dei dati iniziali che danno luogo a orbite periodiche. 6. Si scriva come integrale definito il periodo dell'orbita con dato iniziale $(\sqrt{a/4b}, 0)$.

Soluzione: 1. L'equazione (2.32) può essere scritta nella forma (2.6) introducendo le due nuove variabili $q = z$ e $p = m\dot{z}$, rispettivamente la posizione e l'impulso della palla. Infatti

$$\begin{cases} q = z \\ p = m\dot{z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{q} = \dot{z} \\ \dot{p} = m\ddot{z} = -\frac{du}{dz} = +2aq - 4bz^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{q} = p/m \\ \dot{p} = +2aq - 4bz^3 \end{cases} \tag{2.33}$$

Il sistema (2.33) è un sistema dinamico nella forma (2.6) con $x = (q, p) \in \mathbb{R}^2$ e campo delle direzioni $f(q, p) = (p/m, 2aq - 4bz^3)$.

2. Si può scrivere direttamente l'energia meccanica del sistema oppure si usano le (2.14) con μ una funzione costante. Per esempio si cerca h soluzione del sistema

$$\frac{\partial h}{\partial q}(q, p) = -f_2(q, p) = -2aq + 4bz^3 \quad \text{e} \quad \frac{\partial h}{\partial p}(q, p) = f_1(q, p) = p/m$$

Dalla prima si ottiene $h(q, p) = -aq^2 + bq^4 + \psi(p)$ con $\psi(p)$ una funzione incognita nella sola variabile p . Sostituendo nella seconda si ha

$$\frac{\partial \psi}{\partial p} = \frac{1}{m}p \Rightarrow \psi(p) = \frac{1}{2m}p^2 + \text{cost}$$

²Questa proprietà è una conseguenza abbastanza semplice del teorema sulla dipendenza continua dal dato iniziale, cui si è fatto cenno nel capitolo 1, che non è viene discusso in queste note.

dove cost è una costante reale arbitraria. Scegliendo $\text{cost} = 0$ si ottiene proprio l'energia meccanica

$$h(q, p) = \frac{1}{2m}p^2 - aq^2 + bq^4 \quad (2.34)$$

3. I punti di equilibrio soddisfano il sistema di equazioni $f(q, p) = 0$, ovvero

$$\begin{cases} f_1(q, p) = 0 \\ f_2(q, p) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p/m = 0 \\ 2aq - 4bq^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow P_1 = (0, 0), P_2 = \left(\sqrt{\frac{a}{2b}}, 0\right) \text{ e } P_3 = \left(-\sqrt{\frac{a}{2b}}, 0\right)$$

sono i tre punti di equilibrio.

4. Si studia la stabilità considerando il sistema linearizzato attorno ai punti critici; la matrice jacobiana nel generico punto fisso $\bar{x} = (\bar{q}, \bar{p})$ è

$$A(\bar{q}, \bar{p}) = \begin{pmatrix} 0 & 1/m \\ 2a - 12b\bar{q}^2 & 0 \end{pmatrix}$$

Si scrive, ora, l'equazione secolare e si determinano gli autovalori della matrice $A(\bar{x})$:

$$\det(A(\bar{x}) - \lambda \mathbb{I}) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1/m \\ 2a - 12b\bar{q}^2 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - \frac{2a - 12b\bar{q}^2}{m} = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2}(\bar{x}) = \pm \sqrt{\frac{2a - 12b\bar{q}^2}{m}}$$

A questo punto si può studiare la stabilità dei tre punti critici P_1, P_2 e P_3 : $\lambda_{1,2}(P_1) = \pm\sqrt{2a/m}$, esiste almeno un autovalore reale e positivo, quindi P_1 è un punto di equilibrio instabile; $\lambda_{1,2}(P_2) = \pm 2i\sqrt{a/m}$, gli autovalori hanno parte reale zero, quindi non si può dire nulla sulla stabilità di P_2 ; $\lambda_{1,2}(P_3) = \pm 2i\sqrt{a/m}$, gli autovalori hanno parte reale zero, quindi non si può dire nulla sulla stabilità di P_3 .

Studio della stabilità sulla base della teoria di Liapunov. I punti P_i , con $i = 1, 2, 3$, sono estremali per la funzione $h(q, p)$; si scrive la matrice hessiana:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial q^2} = -\frac{\partial f_2}{\partial q} = -2a + 12bq^2 \quad \frac{\partial^2 h}{\partial p^2} = \frac{\partial f_1}{\partial p} = \frac{1}{m} \quad \frac{\partial^2 h}{\partial q \partial p} = \frac{\partial^2 h}{\partial p \partial q} = 0$$

e quindi

$$\mathcal{H}(q, p) = \begin{pmatrix} -2a + 12bq^2 & 0 \\ 0 & 1/m \end{pmatrix} \text{ e } \det(\mathcal{H}(q, p)) = \frac{12bq^2 - 2a}{m}$$

Poiché $\det(\mathcal{H}(P_{2,3})) = 4a/m > 0$ e $\mathcal{H}_{1,1}(P_{2,3}) = 4a > 0$, $P_{2,3}$ sono punti di minimo per la funzione $h(q, p)$. Si dimostra che la funzione $w(q, p) = h(q, p) - h(P_{2,3})$ è una funzione di Liapunov per P_2 e per P_3 , quindi usando il Teorema 2.30 si conclude che $P_{2,3}$ sono punti di equilibrio stabile.

5. In primo luogo si osserva che $h(q, p)$ è funzione pari sia in q sia in p , quindi ci si limita a studiarne le curve di livello nel quadrante $q, p \geq 0$ (I quadrante); negli altri quadranti le curve verranno ottenute per simmetria. Si osserva, inoltre, che P_1 è punto di equilibrio instabile e che $h_1 := h(P_1) = 0$: le curve di livello più interessanti sono quelle passanti per i punti critici instabili quindi

- considero la curva di livello $\Gamma_{h_1} := \{(q, p) \in \mathbb{R}^2 : h(q, p) = h_1\}$. Nel quadrante $q, p \geq 0$ l'equazione di tale curva è $p = q\sqrt{2m(a - bq^2)}$. La curva interseca l'asse $p = 0$ in $q = 0$ e $q = \sqrt{a/b}$, non è definita all'esterno dell'intervallo $[0, \sqrt{a/b}]$ e è regolare in $(0, \sqrt{a/b})$ (si veda la figura 2.16). Su Γ_{h_1} giacciono tre orbite: due asintotiche a P_1 e una coincidente con il punto di equilibrio instabile $x(t) = (0, 0)$.
- Osservo che $h(q, p)$ è nulla su Γ_{h_1} e che $h(P_2) = h(P_3) = -a^2/4b < 0$, quindi per la continuità della costante del moto $h(q, p)$ le curve di livello relative a energie negative si troveranno tutte all'interno di Γ_{h_1} , mentre quelle relative a energie positive si troveranno tutte all'esterno.
- Considero $e \in \mathbb{R}$ tale che $-a^2/4b < e < 0$: le regioni contenute all'interno di Γ_{h_1} contengono ciascuna un solo punto di equilibrio stabile, quindi le curve di livello relative a valori negativi dell'energia sono curve chiuse, regolari che ruotano attorno al relativo punto di equilibrio stabile, si veda il Teorema 2.22. Su ciascuna componente connessa di ogni curva di livello giace un'orbita periodica attorno al relativo punto di equilibrio stabile.

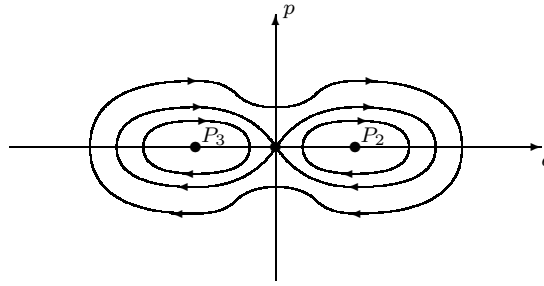


Fig. 2.16. Curve di livello per il potenziale quartico.

- Sia $e > 0$: le curve di livello $h(q, p) = e$ le disegno per continuità.
- I versi sulle curve di livello vengono determinati osservando che $\dot{q} = p/m$ è positivo nel semipiano $p > 0$ e negativo in quello $p < 0$.

Dalla discussione precedente si ha che l'insieme dei dati iniziali che generano orbite periodiche è tutto lo spazio delle fasi a eccezione dei punti di equilibrio e dei punti della curva di livello con energia zero; ovvero $\Pi = \mathbb{R}^2 \setminus (\Gamma_{h_1} \cup \{P_2, P_3\})$.

6. Si consideri l'orbita generata dal dato iniziale $x_0 = (\sqrt{a/4b}, 0)$. Poiché $\sqrt{a/4b} < \sqrt{a/2b} < \sqrt{a/b}$ il punto $x_0 = (\sqrt{a/4b}, 0)$ si trova all'interno della regione delimitata dalla curva di livello passante per l'origine, quindi esso origina un'orbita periodica. Alternativamente si può osservare che $h(x_0) = -3a^2/16b > h(P_2) = -a^2/4b$ implica $x_0 \in \Pi$. Determino i punti di inversione dell'orbita periodica risolvendo l'equazione $h(q, 0) = -3a^2/16b$. Oltre all'ovvia soluzione $q_0 = \sqrt{a/4b}$ si trova $q_1 = \sqrt{3a/4b}$. Pertanto, osservato che $h(q, p) = -3a^2/16b$ implica $p = \sqrt{2m[-bq^4 + aq^2 - 3a^2/16b]}$ si ha

$$\frac{dq}{dt} = \frac{1}{m}p = \sqrt{2m \left[-bq^4 + aq^2 - \frac{3a^2}{16b} \right]} \Rightarrow \int_0^{T/2} dt = \int_{\sqrt{a/4b}}^{\sqrt{3a/4b}} \frac{dq}{\sqrt{2m \left[-bq^4 + aq^2 - \frac{3a^2}{16b} \right]}}$$

e quindi

$$T = 2 \int_{\sqrt{a/4b}}^{\sqrt{3a/4b}} \frac{dq}{\sqrt{2m \left[-bq^4 + aq^2 - \frac{3a^2}{16b} \right]}}$$

Esercizio 2.13. Si consideri il problema di un pendolo di massa $m = 1$ e lunghezza $\ell = 1$ oscillante in un piano vincolato a ruotare con velocità angolare costante $\omega > 0$ attorno a un asse. Il moto è descritto dall'equazione di Newton:

$$\ddot{\theta} = \omega^2 \sin \theta \cos \theta - g \sin \theta \quad (2.35)$$

ove θ è l'angolo tra il pendolo e l'asse di rotazione. Si risponda ai seguenti quesiti: 1. si riconduca la (2.35) a un sistema dinamico planare. 2. Si determini una costante del moto. 3. Si determino i punti di equilibrio e 4. se ne studi la loro stabilità. 5. Si disegnino le curve di livello e si determini l'insieme dei dati iniziali che danno luogo a orbite periodiche. 6. Si studi il caso in cui venga introdotto una forza resistiva $-\alpha\dot{\theta}$ con $\alpha > 0$. In particolare si determinino eventuali punti di equilibrio asintoticamente stabili e se ne stimi il bacino d'attrazione.

Soluzione: studio il problema nell'intervallo $\theta \in [0, \pi]$. Per $\theta < 0$ si ottengono gli stessi risultati perché l'equazione del moto è simmetrica nello scambio $\theta \rightarrow -\theta$.

1. L'equazione (2.35) può essere scritta nella forma (2.6) introducendo le due nuove variabili $q = \theta$ e $p = \dot{\theta}$; infatti

$$\begin{cases} q = \theta \\ p = \dot{\theta} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{q} = \dot{\theta} \\ \dot{p} = \ddot{\theta} = \omega^2 \sin \theta \cos \theta - g \sin \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{q} = p \\ \dot{p} = \omega^2 \sin q \cos q - g \sin q \end{cases} \quad (2.36)$$

Il sistema (2.36) è un sistema dinamico nella forma (2.6) con $x = (q, p) \in \mathbb{R}^2$ e $f(q, p) = (p, \omega^2 \sin q \cos q - g \sin q)$.

2. Si usano le (2.14) con $\mu = 1$, cioè si cerca $h(q, p)$ soluzione del sistema

$$\frac{\partial h}{\partial q}(q, p) = -f_2(q, p) = -\omega^2 \sin q \cos q + g \sin q \quad \text{e} \quad \frac{\partial h}{\partial p}(q, p) = f_1(q, p) = p$$

Dalla prima si ottiene $h(q, p) = -g \cos q + (\omega^2/4) \cos 2q + \psi(p)$ con $\psi(p)$ una funzione incognita nella sola variabile p . Sostituendo nella seconda si ha

$$\frac{\partial \psi}{\partial p} = p \Rightarrow \psi(p) = \frac{1}{2}p^2 + \text{cost}$$

dove cost è una costante reale arbitraria. Scegliendo $\text{cost} = 0$ si ottiene

$$h(q, p) = \frac{1}{2m}p^2 - g \cos q + \frac{\omega^2}{4} \cos 2q \quad (2.37)$$

si noti che $h(q, p)$ è l'energia totale della particella.

3. I punti di equilibrio soddisfano il sistema di equazioni $f(q, p) = 0$, ovvero

$$\begin{cases} f_1(q, p) = 0 \\ f_2(q, p) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = 0 \\ \omega^2 \sin q \cos q - g \sin q = 0 \end{cases}$$

Per risolvere il sistema precedente bisogna distinguere due casi: definisco $\rho := g/\omega^2$ e osservo che nel caso $\rho > 1$ (piccola forza centrifuga) esistono due soli punti di equilibrio: $P_1 = (0, 0)$ e $P_2 = (\pi, 0)$. Nel caso $\rho < 1$ (grande forza centrifuga) esiste un ulteriore punto di equilibrio $P_3 = (\arcsin \rho, 0)$.

4. Si studia la stabilità considerando il sistema linearizzato attorno ai punti critici; la matrice jacobiana nel generico punto fisso $\bar{x} = (\bar{q}, \bar{p})$ è

$$A(\bar{q}, \bar{p}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q}(\bar{q}, \bar{p}) & \frac{\partial f_1}{\partial p}(\bar{q}, \bar{p}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial q}(\bar{q}, \bar{p}) & \frac{\partial f_2}{\partial p}(\bar{q}, \bar{p}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega^2 (\cos 2\bar{q} - \rho \cos \bar{q}) & 0 \end{pmatrix}$$

Si scrive l'equazione secolare e si determinano gli autovalori della matrice $A(\bar{x})$:

$$\det(A(\bar{x}) - \lambda \mathbb{I}) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ \omega^2 (\cos 2\bar{q} - \rho \cos \bar{q}) & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - \omega^2 (\cos 2\bar{q} - \rho \cos \bar{q}) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2}(\bar{x}) = \pm \sqrt{\omega^2 (\cos 2\bar{q} - \rho \cos \bar{q})} = \pm \omega \sqrt{\cos 2\bar{q} - \rho \cos \bar{q}}$$

A questo punto si può studiare la stabilità dei punti critici: in primo luogo

$$\lambda_{1,2}(P_1) = \pm \omega \sqrt{1 - \rho}, \quad \lambda_{1,2}(P_2) = \pm \omega \sqrt{1 + \rho} \quad \text{e} \quad \lambda_{1,2}(P_3) = \pm i\omega \sqrt{1 - \rho^2}$$

con l'ultimo autovalore che ha senso soltanto nel caso $\rho < 1$. Quindi

- se $0 < \rho < 1$ allora P_1 e P_2 sono instabili, mentre su P_3 non si può dire nulla;
- se $\rho \geq 1$ allora P_2 è instabile, mentre su P_1 non si può dire nulla.

Studio della stabilità sulla base della teoria di Liapunov. I punti P_i , con $i = 1, 2, 3$, sono estremali per la funzione $h(q, p)$. Per studiarne le proprietà si scrive la matrice hessiana:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial q^2} = -\frac{\partial f_2}{\partial q} = -\omega^2 (\cos 2q - \rho \cos q) \quad \frac{\partial^2 h}{\partial p^2} = \frac{\partial f_1}{\partial p} = 1 \quad \frac{\partial^2 h}{\partial q \partial p} = \frac{\partial^2 h}{\partial p \partial q} = 0$$

pertanto

$$\mathcal{H}(q, p) = \begin{pmatrix} -\omega^2 (\cos 2q - \rho \cos q) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \det(\mathcal{H}(q, p)) = -\omega^2 (\cos 2q - \rho \cos q)$$

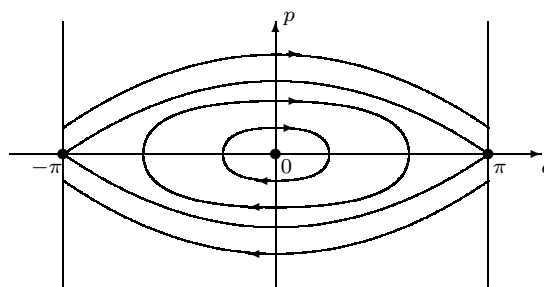


Fig. 2.17. Curve di livello per il pendolo rotante nel caso $\rho \geq 1$. I versi non indicati in figura si ottengono per continuità.

Osservo che nel caso $\rho < 1$ si ha $\det(\mathcal{H}(P_3)) = \mathcal{H}_{1,1}(P_3) = \omega^2(1 - \rho^2) > 0$, allora P_3 è punto di minimo per la funzione $h(q, p)$. Si dimostra che la funzione $w(q, p) = h(q, p) - h(P_3)$ è una funzione di Liapunov per P_3 , quindi usando il Teorema 2.30 si conclude che P_3 è punto di equilibrio stabile nel caso $\rho < 1$. Inoltre osservo che $\det(\mathcal{H}(P_1)) = \mathcal{H}_{1,1}(P_1) = \omega^2(\rho - 1)$, quindi si può concludere che nel caso $\rho > 1$ il punto P_1 è stabile. Nel caso $\rho = 1$ non si può dire nulla perché $\det(\mathcal{H}(P_1)) = \mathcal{H}_{1,1}(P_1) = 0$, ma questo caso può essere discusso in modo diretto, infatti osservo che $h(q, p) = p^2/2 + (\omega^2/4)(2 \cos^2 q - 4 \cos q - 1)$ e $h(P_1) = -3\omega^2/4$. Quindi,

$$h(q, p) - h(P_1) = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\omega^2(2 \cos q - 1)^2 > 0 \quad \forall (q, p) \neq (0, 0)$$

Allora P_1 è un punto di minimo per $h(q, p)$ è quindi è un punto di equilibrio stabile. Si riassumono, infine, i risultati relativi alla stabilità dei punti fissi:

- $\rho < 1$: P_1 e P_2 instabili, P_3 stabile.
- $\rho \geq 1$: P_1 stabile, P_2 instabile.

5. Studio delle curve di livello nel caso $\rho = 1$. Nel caso $\rho > 1$ si ottengono risultati analoghi. Il punto P_2 è punto di equilibrio instabile e $h_2 := h(P_2) = 5\omega^2/4$: le curve di livello più interessanti sono quelle passanti per i punti critici instabili.

- Si considera la separatrice $\Gamma_{h_2} := \{(q, p) \in [-\pi, \pi] \times \mathbb{R} : h(q, p) = h_2\}$. Nel semipiano $p > 0$ l'equazione di tale curva è $p = \omega \sqrt{4 - (\cos q - 1)^2}$. Per disegnare la curva è sufficiente osservare che in $[0, \pi]$ la funzione $4 - (\cos q - 1)^2$ decresce da 4 a 0: risulta, quindi, il grafico in figura 2.17 con le intersezioni con l'asse $q = 0$ nei punti $\pm 2\omega$. Su Γ_{h_2} giacciono tre orbite: due asintotiche a $P_2 \equiv -P_2$ e una coincidente con il punto di equilibrio instabile $P_2 \equiv -P_2$.
- Osservo che $h(P_2) = 5\omega^2/4 > h(P_1) = -3\omega^2/4 =: h_1$; quindi per la continuità della costante del moto $h(q, p)$ le curve di livello relative a energie comprese tra h_1 e h_2 si troveranno tutte all'interno di Γ_{h_2} , mentre quelle relative a energie maggiori di h_2 si troveranno tutte all'esterno.
- Considero un'energia $h_1 < e < h_2$: la regione contenuta all'interno di Γ_{h_2} contiene un solo punto di equilibrio stabile P_1 , quindi le curve di livello sono curve chiuse e regolari che ruotano attorno a P_1 , si veda il Teorema 2.22. Su ciascuna curva di livello giace un'orbita periodica attorno al punto di equilibrio stabile.
- Sia $e > h_2$: le curve di livello $h(q, p) = e$ le disegno per continuità.
- I versi sulle curve di livello vengono determinati osservando che $\dot{q} = p/m$ è positivo nel semipiano $p > 0$ e negativo in quello $p < 0$.

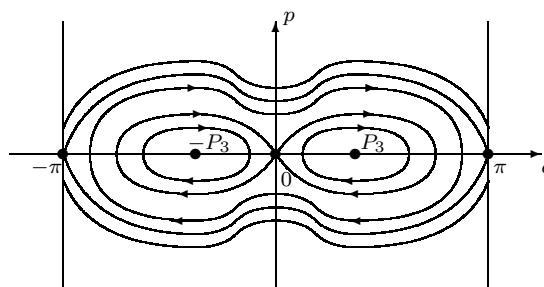


Fig. 2.18. Curve di livello per il pendolo rotante nel caso $\rho < 1$. I versi non indicati in figura si ottengono per continuità.

Dalla discussione precedente si ha che l'insieme dei dati iniziali che generano orbite periodiche è tutto lo spazio delle fasi a eccezione dei punti di equilibrio e dei punti della curva di livello con energia h_2 ; ovvero $\Pi = [-\pi, \pi] \times \mathbb{R} \setminus (\Gamma_{h_2} \cup \{P_1, P_2\})$.

Nel caso $\rho < 1$ lo studio delle curve di livello procede in modo analogo. Una maggiore complicazione nei calcoli è dovuta al fatto che ci sono due punti di equilibrio instabili con energia diversa, infatti $h(P_1) = \omega^2(1/4 - \rho) < \omega^2(1/4 + \rho) = h(P_2)$. Quindi in questo caso è necessario disegnare due diverse curve separatrici. I risultati sono in figura 2.18. Dalla figura 2.18 si evince che l'insieme dei dati iniziali che generano orbite periodiche è tutto lo spazio delle fasi a eccezione dei punti di equilibrio e dei punti delle due separatrici, ovvero $\Pi = [-\pi, \pi] \times \mathbb{R} \setminus (\Gamma_{h_1} \cup \Gamma_{h_2})$.

6. Con l'introduzione del termine dissipativo l'equazione del moto diventa $\ddot{\theta} = \omega^2 \sin \theta \cos \theta - g \sin \theta - \alpha \dot{\theta}$ con $\alpha > 0$. Con la stessa sostituzione introdotta al punto 1 si ottiene il sistema dinamico

$$\begin{cases} \dot{q} = p \\ \dot{p} = \omega^2 \sin q \cos q - g \sin q - \alpha p \end{cases}$$

Il sistema dinamico è nella forma $(\dot{q}, \dot{p}) = f'(q, p)$ con $f'(q, p) = f(q, p) + (0, -\alpha p)$. Voglio studiare la stabilità dei punti critici di questo nuovo sistema nel caso $\rho < 1$: in primo luogo osservo che la funzione $h(q, p)$ non è una costante del moto per il nuovo problema:

$$L_f h(q, p) = \frac{\partial h}{\partial q}(q, p) f'_1(q, p) + \frac{\partial h}{\partial p}(q, p) f'_2(q, p) = -\alpha p^2$$

che non è identicamente uguale a zero. Si vede facilmente che i punti critici sono P_1, P_2 e P_3 e linearizzando attorno a P_1 e P_2 si vede che si tratta di punti instabili. Si discute, ora, in dettaglio il punto P_3 : la matrice di linearizzazione si scrive

$$A'(P_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega^2(\rho^2 - 1) & -\alpha \end{pmatrix}$$

Gli autovalori λ sono le soluzioni dell'equazione secolare $\lambda^2 + \alpha\lambda + \omega^2(1 - \rho^2) = 0$. Si ottiene, quindi, $\lambda_{1,2} = [-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4\omega^2(1 - \rho^2)}]/2$; si verifica facilmente che $\text{Re}(\lambda_1), \text{Re}(\lambda_2) < 0$, quindi il punto P_3 è asintoticamente stabile.

Stima del bacino d'attrazione di P_3 : lo scopo è determinare un dominio chiuso $D \subset [-\pi, \pi] \times \mathbb{R}$ tale che per ogni $x_0 \in D$ la traiettoria $\varphi(t)$ con dato iniziale $\varphi(0) = x_0$ tenda asintoticamente a P_3 , ovvero $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = P_3$. Volendo studiare l'asintotica stabilità con la teoria di Liapunov una candidata naturale per la funzione di Liapunov sarebbe

$$w(q, p) := h(q, p) - h(P_3) = \frac{1}{2}p^2 + \omega^2 \left[\frac{1}{2}(\cos^2 q + \rho^2) - \rho \cos q \right]$$

Il punto P_3 è un minimo per la funzione $w(q, p)$ e $w(P_3) = 0$, quindi è possibile trovare un $\varepsilon > 0$ abbastanza piccolo tale che la prima ipotesi del Teorema 2.30 è soddisfatta. Anche la seconda ipotesi

è soddisfatta, perché $L_{f'}w(q, p) = -\alpha p^2 \leq 0$ in $B_{P_3}(\varepsilon)$; ma sulla terza ipotesi la funzione scelta fallisce perché sul segmento ottenuto intersecando la palla aperta $B_{P_3}(\varepsilon)$ con l'asse $p = 0$ si ha che $L_{f'}w(q, p)$ si annulla. Più precisamente, $L_{f'}w(x) = 0$ per ogni $x \in I_{P_3}(\varepsilon) := \{(q, p) \in [-\pi, \pi] \times \mathbb{R} : p = 0\}$.

È abbastanza naturale osservare che l'insieme su cui la funzione w fallisce non è un insieme "molto interessante" per il moto del nostro sistema, nel senso che non è possibile trovare delle traiettorie costituite unicamente da punti di $I_{P_3}(\varepsilon)$. Infatti, per assurdo sia $(q(t), p(t))$ una traiettoria che giace interamente su $I_{P_3}(\varepsilon)$, allora $p(t) = 0$ per ogni t e quindi

$$\dot{p}(t) = 0 \Rightarrow 0 = f'_2(q(t), p(t)) = f'_2(q(t), 0) = f_2(q(t), 0) \Rightarrow q(t) = \arcsin \rho$$

Allora l'unica traiettoria tutta contenuta in $I_{P_3}(\varepsilon)$ è il punto di equilibrio P_3 . A questo punto è ovvio che per stimare il bacino d'attrazione si può usare il teorema di Barbasin, si veda il Teorema 2.36.

Si è già visto che la funzione $w(q, p)$ soddisfa le prime due ipotesi del Teorema 2.30 di Liapunov. Definisco D come l'insieme compatto costituito da tutti i punti di $[0, \pi] \times \mathbb{R}$ (seleziono il semipiano $q \geq 0$) contenuti all'interno di una curva di livello con energia $h = h(P_1) - \delta$ e $\delta > 0$ piccolo, nel senso che $\delta < h(P_0) - h(P_3) = \omega^2(1 - \rho)^2/2$. Il dominio D contiene il punto di equilibrio e in esso, come si è appena visto, non vi sono traiettorie su cui w è costante. Quindi resta da dimostrare che D è positivamente invariante: per fare ciò è sufficiente osservare che sui punti della frontiera di D , ovvero sui punti di Γ_h il campo f' punta verso l'interno, ovvero $f' \cdot \hat{n} < 0$, con \hat{n} il versore normale a Γ_h in un suo punto. È ovviamente possibile calcolare in modo esplicito il prodotto scalare $f' \cdot \hat{n}$, ma è anche sufficiente osservare che f è tangente a Γ_h , perché h è una costante del moto per il sistema (2.36), e quindi f' punta verso l'interno di D perché $f' = f + (0, -\alpha p)$ e $-\alpha p$ è positivo per $p < 0$ e negativo per $p > 0$.

Esercizio 2.14. Si consideri il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y - (x^2 - 1)^2 - 1 \\ \dot{y} = 4x(x^2 - 1)(y - 1) \end{cases} \quad (2.38)$$

Si risponda ai seguenti quesiti: 1. si determini una costante del moto. 2. Si determinino i punti di equilibrio e 3. se ne studi la loro stabilità. 4. Si disegnino le curve di livello e si determini l'insieme Π dei dati iniziali che danno luogo a orbite periodiche. 5. Si dimostri che l'orbita generata dal dato iniziale $(x_0, y_0) = (1, 3/4)$ è periodica e se ne scriva il periodo in forma di integrale definito. 6. Si trovi esplicitamente la soluzione con dato iniziale $(x_0, y_0) = (1, 1)$ e se ne discuta il comportamento asintotico.

Soluzione: 1. Cerco una funzione μ che renda integrabile il seguente sistema

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = -4\mu(x, y)x(x^2 - 1)(y - 1) \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = \mu(x, y)[2y - (x^2 - 1)^2 - 1]$$

Affinché il sistema abbia una soluzione la funzione μ deve essere tale che

$$\frac{\partial}{\partial y}[-4\mu x(x^2 - 1)(y - 1)] = \frac{\partial}{\partial x}[\mu(2y - (x^2 - 1)^2 - 1)] \Rightarrow -4x(x^2 - 1) = -4x(x^2 - 1)$$

dove si è scelto $\mu(x, y) = 1$. Integrando rispetto a y la seconda delle equazioni che definiscono u si ha $u(x, y) = y^2 - [(x^2 - 1)^2 + 1]y + \phi(x)$ con $\phi(x)$ una funzione incognita nella sola variabile x . Sostituendo nella prima si ha

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 4x(x^2 - 1)(y - y + 1) = 4x^3 - 4x \Rightarrow \psi(x) = x^4 - 2x^2 + \text{costante}$$

Scegliendo uguale a zero la costante arbitraria si ha $u(x, y) = y^2 - [(x^2 - 1)^2 + 1]y + x^2(x^2 - 2)$.

2. Per determinare i punti di equilibrio si deve risolvere il sistema di equazioni algebriche $f(x, y) = 0$; si procede nel modo seguente:

$$f(x, y) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2y - (x^2 - 1)^2 - 1 = 0 \\ 4x(x^2 - 1)(y - 1) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow P_1 = (0, 1), P_2 = (1, 1/2), P_3 = (-1, 1/2), P_4 = (\sqrt{2}, 1), P_5 = (-\sqrt{2}, 1)$$

3. Linearizzazione attorno ai punti critici: si considera la matrice jacobiana calcolata nel generico punto fisso (\bar{x}, \bar{y}) , si ha

$$A(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4(\bar{x}^2 - 1)\bar{x} & 2 \\ 4(\bar{y} - 1)(3\bar{x}^2 - 1) & 4\bar{x}(\bar{x}^2 - 1) \end{pmatrix}$$

Scrivo l'equazione secolare e determino gli autovalori della matrice $A(\hat{z})$:

$$\det[A(\bar{x}, \bar{y}) - \lambda \mathbb{I}] = -16\bar{x}^2(\bar{x}^2 - 1)^2 + \lambda^2 - 8(\bar{y} - 1)(3\bar{x}^2 - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2}(\bar{x}, \bar{y}) = \pm \sqrt{16\bar{x}^2(\bar{x}^2 - 1)^2 + 8(\bar{y} - 1)(3\bar{x}^2 - 1)}$$

A questo punto è possibile studiare la stabilità dei punti critici: $\lambda_{1,2}(P_1) = 0$, gli autovalori sono nulli, quindi non si può dire nulla sulla stabilità di P_1 ; $\lambda_{1,2}(P_{2,3}) = \pm 2i\sqrt{2}$, gli autovalori hanno parte reale zero, quindi non si può dire nulla sulla stabilità di P_2 e di P_3 ; $\lambda_{1,2}(P_{4,5}) = \pm 4\sqrt{2}$, gli autovalori sono reali e distinti; ne esiste uno positivo, quindi P_4 e P_5 sono punti di equilibrio instabile.

Metodo di Liapunov: i punti P_i , con $i = 1, \dots, 5$, sono estremali per la funzione $u(x, y)$. Per studiarne le proprietà è necessario scrivere la matrice hessiana $\mathcal{H}(x, y)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial f_2}{\partial x} = -4(y-1)(3x^2-1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial f_1}{\partial y} = 2 \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = -4x(x^2-1)$$

e quindi

$$\mathcal{H}(x, y) = \begin{pmatrix} -4(y-1)(3x^2-1) & -4x(x^2-1) \\ -4x(x^2-1) & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \det(\mathcal{H}(x, y)) = -8(y-1)(3x^2-1) - 16x^2(x^2-1)^2$$

Poiché $\det(\mathcal{H}(P_{2,3})) = 8 > 0$ e $\mathcal{H}_{1,1}(P_{2,3}) = 4 > 0$ si ha che i punti P_2 e P_3 sono di minimo relativo proprio per la funzione $u(x, y)$. Segue che la funzione $w(x, y) := u(x, y) - u(P_2) = u(x, y) - u(P_3)$ è una funzione di Liapunov per P_2 e per P_3 , quindi in virtù del Teorema 2.30 si conclude che i punti fissi P_2 e P_3 sono punti di equilibrio stabile. Sul punto P_1 non si può, invece, dire nulla perché $\det(\mathcal{H}(P_1)) = 0$, ma dallo studio delle curve di livello emergerà che si tratta di un punto di equilibrio instabile.

4. Si considerano le curve di livello $u(x, y) = a$, con $a \in \mathbb{R}$. In primo luogo si osserva che $u(x, y)$ è una funzione pari nella variabile x , quindi le curve di livello avranno l'asse y per asse di simmetria. Inoltre $u(P_1) = u(P_4) = u(P_5) = -1$, P_4 e P_5 sono punti instabili, le curve di livello più interessanti sono proprio le separatrici, cioè quelle passanti per i punti critici instabili. Si studia, ora, la struttura delle curve di livello al variare del parametro a :

– per $a = -1$, la forma implicita dell'equazione algebrica della curva di livello è

$$y^2 - [(x^2 - 1)^2 + 1]y + x^2(x^2 - 2) + 1 = 0 \Rightarrow y^2 - y - (x^2 - 1)^2y + (x^2 - 1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow y(y - 1) - (y - 1)(x^2 - 1)^2 = 0 \Rightarrow (y - 1)[y - (x^2 - 1)^2] = 0$$

quindi la separatrice è costituita dalle due curve di equazione $y = 1$ e $y = (x^2 - 1)^2$, si veda la figura 2.19. Su tale curva di livello giacciono undici orbite: otto orbite asintotiche ai punti di equilibrio instabili e tre punti di equilibrio instabili.

Si osserva che la separatrice divide lo spazio delle fasi in sette regioni connesse; per capire dove si collocheranno le curve di livello al variare del parametro a è sufficiente calcolare il valore di u in un solo punto di ciascuna di queste regioni e poi usare la continuità della funzione u . Si ha $u(P_2) = u(P_3) = -5/2 < -1$, $u(0, 2) = 0$, $u(2, 2) = -8$ e $u(0, 0) = 0$. Quindi le curve di livello giacenti nelle due regioni interne alla separatrice corrispondono a valori di a nell'intervallo $-5/2 < a < -1$; quelle sovrastanti e sottostanti la separatrice corrispondono ad $a > -1$; quelle nelle due regioni restanti corrispondono ad $a < -5/2$.

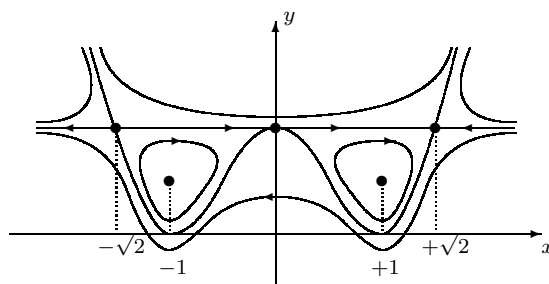


Fig. 2.19. Curve di livello per il sistema dinamico (2.38). I versi non indicati si deducono per continuità.

- Per $-5/2 < a < -1$, le curve di livello sono costituite da quattro componenti connesse, giacenti rispettivamente nelle regioni $A_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < \sqrt{2}, (x^2 - 1)^2 < y < 1\}$, $A_3 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -\sqrt{2} < x < 0, (x^2 - 1)^2 < y < 1\}$, $A_4 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < -\sqrt{2}, 1 < y < (x^2 - 1)^2\}$ e $A_5 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > +\sqrt{2}, 1 < y < (x^2 - 1)^2\}$. I due insiemi A_2 e A_3 contengono ciascuno un solo punto di equilibrio stabile, quindi le curve di livello ivi giacenti sono curve chiuse, regolari che ruotano attorno al relativo punto di equilibrio stabile, si veda il Teorema 2.22. Su ciascuna componente connessa di ogni curva di livello giace un'orbita, le orbite con dato iniziale nelle regioni A_2 e A_3 sono periodiche attorno al relativo punto di equilibrio stabile, si veda la figura 2.19.
- Per $a > -1$ le curve di livello $u(x, y) = a$ sono quelle disegnate per continuità in figura e giacciono rispettivamente in $A_{1,-} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < -\sqrt{2} \text{ e } y < 1, -\sqrt{2} < x < \sqrt{2} \text{ e } y < (x^2 - 1)^2, x > +\sqrt{2} \text{ e } y < 1\}$ e $A_{1,+} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < -\sqrt{2} \text{ e } y > (x^2 - 1)^2, -\sqrt{2} < x < \sqrt{2} \text{ e } y > 1, x > +\sqrt{2} \text{ e } y > (x^2 - 1)^2\}$. Ogni curva è costituita da due componenti connesse aperte su ciascuna delle quali giace una sola linea di fase.
- Per $a < -5/2$ le curve di livello $u(x, y) = a$ sono quelle disegnate per continuità in figura e giacciono rispettivamente in A_4 e A_5 . Ogni curva è costituita da due componenti connesse aperte su ciascuna delle quali giace una sola linea di fase.

I versi sulla separatrice vengono determinati ricordando che su un tratto di curva di livello che non interseca alcun punto di equilibrio il verso non cambia e osservando che $f_1(1, 1) = 1 > 0$, $f_1(1, 0) = -1 < 0$, $f_1(2, 1) = -8 < 0$ e $f_1(2, 9) = 7 > 0$. Sulle altre curve di livello i versi possono essere trovati per continuità. Dalla discussione precedente si ha che l'insieme dei dati iniziali che generano orbite periodiche è $\Pi = D_2 \cup D_3$.

5. Si consideri l'orbita generata dal dato iniziale $(x_0, y_0) = (1, 3/4)$. Poiché $(x_0, y_0) \in D_2$ si ha che l'orbita uscente è periodica. Per poter scrivere il periodo dell'orbita è necessario scrivere l'equazione della curva di livello in forma esplicita, cioè si deve ricavare y in funzione di x o viceversa; ponendo $u(x, y) = u(x_0, y_0)$ si trova

$$y^2 - [(x^2 - 1)^2 + 1]y + x^2(x^2 - 1) = -\frac{19}{16} \Rightarrow y^2 - [(x^2 - 1)^2 + 1]y + x^2(x^2 - 1) + 1 = -\frac{3}{16} \Rightarrow$$

$$(y - 1) \left[y - (x^2 - 1)^2 \right] = -\frac{3}{16} \Rightarrow (x^2 - 1)^2 = y + \frac{3}{16(y - 1)}$$

Dalla precedente si può ricavare la variabile x in funzione della variabile y semplicemente eseguendo delle radici quadrate. Bisogna, però controllare che i radicandi siano positivi: il secondo membro è positivo se e solo se $16y^2 - 16y + 3 \leq 0$, ovvero se $1/4 \leq y \leq 3/4$. Da questa osservazione si deduce che l'orbita è compresa tra le due rette $y = 1/4$ e $y = 3/4$ e le tocca nei punti $(x_0, y_0) = (1, 3/4)$ e $(x_1, y_1) = (1, 1/4)$. Quindi per i valori di y permessi si ha:

$$x^2 - 1 = \pm \sqrt{y + \frac{3}{16(y - 1)}}$$

La scelta del segno va fatta osservando che x può essere maggiore o minore di 1. Nel primo caso va scelto il segno $+$ mentre nel secondo va scelto il segno $-$, perché il primo membro è rispettivamente positivo e negativo nei due casi. Quindi l'equazione della traiettoria diventa:

$$x^2 = \begin{cases} 1 + \sqrt{y + \frac{3}{16(y-1)}} & \text{se } x > 1 \\ 1 - \sqrt{y + \frac{3}{16(y-1)}} & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

Infine, dopo aver osservato che nelle due espressioni precedenti il membro di destra è positivo e che l'orbita giace nel semipiano $x > 0$, si può scrivere l'equazione dell'orbita in forma esplicita:

$$x(y) = \begin{cases} \sqrt{1 + \sqrt{y + \frac{3}{16(y-1)}}} & \text{se } x > 1 \\ \sqrt{1 - \sqrt{y + \frac{3}{16(y-1)}}} & \text{se } x < 1 \end{cases} \quad (2.39)$$

Il periodo dell'orbita può essere calcolato osservando che dalle equazioni (2.38) si ha

$$\frac{dy}{dt} = f_2(x, y) \Rightarrow \frac{dy}{4x(y)(x^2(y) - 1)(y - 1)} = dt$$

ove $x = x(y)$ è l'equazione (2.39). Per integrare la precedente si definisce t_1 l'istante in cui l'orbita raggiunge (x_1, y_1) e si osserva che in t_1 l'espressione esplicita della funzione $x(y)$ cambia. Quindi

$$\begin{aligned} T &= \int_0^T dt = \int_0^{t_1} dt + \int_{t_1}^T dt = \int_{3/4}^{1/4} \frac{dy}{4x(y)(x^2(y) - 1)(y - 1)} + \int_{1/4}^{3/4} \frac{dy}{4x(y)(x^2(y) - 1)(y - 1)} \\ \Rightarrow T &= \int_{3/4}^{1/4} \frac{dy}{4\sqrt{1 + \sqrt{y + \frac{3}{16(y-1)}}}\sqrt{y + \frac{3}{16(y-1)}}(y - 1)} - \int_{1/4}^{3/4} \frac{dy}{4\sqrt{1 - \sqrt{y + \frac{3}{16(y-1)}}}\sqrt{y + \frac{3}{16(y-1)}}(y - 1)} \end{aligned}$$

6. Il punto $(x_0, y_0) = (1, 1)$ si trova sul tratto $y = 1$ della separatrice, allora l'orbita sarà tale che $y(t) = 1$. Sostituendo nel sistema dinamico di partenza si ottiene $\dot{x} = 1 - (x^2 - 1)^2$ che può essere integrata e fornisce la legge oraria. Infatti

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 1 - (x^2 - 1)^2 \Rightarrow dt = \frac{dx}{x^2(\sqrt{2} - x)(\sqrt{2} + x)} \Rightarrow \int_0^t dt' = \int_1^{x(t)} \frac{dx}{x^2(\sqrt{2} - x)(\sqrt{2} + x)} \\ \Rightarrow t &= \int_1^{x(t)} dx \left\{ \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{4\sqrt{2}(\sqrt{2} - x)} + \frac{1}{4\sqrt{2}(\sqrt{2} + x)} \right\} \\ \Rightarrow t &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \log \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} - \frac{1}{2x(t)} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \log \frac{\sqrt{2} + x(t)}{\sqrt{2} - x(t)} \end{aligned}$$

Pur non sapendo invertire la legge oraria è possibile controllare il comportamento all'infinito: basta osservare che per $x \rightarrow \sqrt{2}$ il tempo t tende a $+\infty$, mentre per $x \rightarrow 0$ si ha $t \rightarrow -\infty$.

Esercizio 2.15. Per i seguenti sistemi dinamici planari si determinino i punti fissi e se ne studi la stabilità, si determini un integrale primo e si disegni il ritratto di fase:

$$(a) \begin{cases} \dot{x} = 2y(x^2 - 1) \\ \dot{y} = 2x(2x^2 - y^2) \end{cases} \quad (b) \begin{cases} \dot{x} = -2x - y^2 \\ \dot{y} = -y - x^2 \end{cases} \quad (c) \begin{cases} \dot{x} = 2xy \\ \dot{y} = -y^2 - 3x^2 + 1 \end{cases}$$

Sistema (c): si determinino i dati iniziali che danno origine a orbite periodiche e si esprima come integrale definito il periodo dell'orbita con dato iniziale $(1/2, 0)$.

Esercizio 2.16. Per i seguenti sistemi dinamici planari si determinino i punti fissi e se ne studi la stabilità, si determini un integrale primo e si disegni il ritratto di fase:

$$(a) \begin{cases} \dot{x} = 4y(y^2 - 1) \\ \dot{y} = 4x(x^2 - 1) \end{cases} \quad (b) \begin{cases} \dot{x} = 4y(1 - y^2) \\ \dot{y} = -2x \end{cases} \quad (c) \begin{cases} \dot{x} = x^2 - 1 + 4y^3 \\ \dot{y} = -2xy \end{cases}$$

Sistema (a): si determinino i dati iniziali che danno origine a orbite periodiche; si aggiunga al campo delle direzioni il termine $(-\alpha x, -\alpha y)$ e si determini il valore minimo di α per cui l'origine è un punto fisso asintoticamente stabile. Sistema (b): si determini esplicitamente la traiettoria con dato iniziale $(3, 2)$.

Esercizio 2.17. Per i seguenti sistemi dinamici planari si determinino i punti fissi e se ne studi la stabilità, si determini un integrale primo e si disegni il ritratto di fase:

$$(a) \begin{cases} \dot{x} = 2y - \sin x \\ \dot{y} = y \cos x \end{cases} \quad (b) \begin{cases} \dot{x} = 4y - 4y^3 \\ \dot{y} = 10x - 4x^3 \end{cases} \quad (c) \begin{cases} \dot{x} = 2y - 2x(x^2 - 1) \\ \dot{y} = 2y(3x^2 - 1) \end{cases}$$

Sistema (a): dimostrare che l'orbita uscente da $(\pi/2, 1/3)$ è periodica. Sistema (b): determinare l'insieme dei dati iniziali che danno luogo a orbite periodiche. Sistema (c): determinare esplicitamente la soluzione con dato iniziale $(\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ e studiarne il comportamento asintotico.

Esercizio 2.18. Si consideri il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y(x^2 - 2) \\ \dot{y} = -2x(y^2 - 2) \end{cases}$$

e si risponda alle seguenti domande: si mostri che la funzione $u(x, y) = x^2y^2 - 2x^2 - 2y^2 + 4$ è un integrale primo; si determinino i punti critici e se ne studi la stabilità; si disegni e si discuta il ritratto di fase, in particolare si determini l'insieme dei dati iniziali che danno origine a orbite periodiche; si stabilisca il comportamento asintotico, cioè il limite per $t \rightarrow \pm\infty$, delle linee di fase emergenti dai punti iniziali $(0, \sqrt{2})$, $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ e $(\sqrt{2}, 2)$, in particolare si determini esplicitamente la linea di fase con dato iniziale $(0, \sqrt{2})$.

Esercizio 2.19. Si consideri il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = 4y^3 + 2x^2y - 10y \\ \dot{y} = 2x - 2xy^2 \end{cases}$$

e si risponda alle seguenti domande: si mostri che la funzione $u(x, y) = y^4 + x^2y^2 - x^2 - 5y^2 + 4$ è un integrale primo; si determinino i punti critici e se ne studi la stabilità; si disegni e si discuta il ritratto di fase descrivendo il comportamento delle orbite per valori fissati dell'integrale primo, in particolare si determini l'insieme dei dati iniziali che danno origine a orbite periodiche; si descrivano qualitativamente le linee di fase con dati iniziali $(0, 1)$, $(0, 2)$, $(0, 3)$ e $(0, \sqrt{5/2})$ e si determini esplicitamente la linea di fase con dato iniziale $(0, 1)$.

2.6. Moti alla Poincaré: stabilità delle rotazioni permanenti

Si supponga di lanciare in aria un solido a forma di parallelepipedo a base rettangolare con i tre spigoli disuguali, si pensi a un libro legato con un elastico o a un contenitore di un disco DVD, ponendolo in rotazione attorno a uno dei suoi lati. Se il corpo viene posto in rotazione attorno al lato più corto o attorno a quello più lungo, durante il volo l'asse di rotazione devierà impercettibilmente; se invece il lato prescelto è quello di lunghezza intermedia, si osserverà che indipendentemente da quanta accortezza si usi al momento

del lancio, il moto risultante sarà comunque diverso dalla sperata rotazione. In questo paragrafo questo fenomeno viene spiegato sulla base del concetto di stabilità dei punti fissi di un sistema dinamico.

Uno dei risultati più eleganti della meccanica razionale è costituito dalle equazioni di Eulero per lo studio del moto di un corpo rigido con un punto fisso. Le stesse equazioni regolano anche il cosiddetto moto relativo al centro di massa di un corpo rigido libero, cioè regolano il moto rispetto a una terna con origine nel centro di massa del corpo rigido e assi paralleli agli assi del riferimento fisso rispetto al quale si studia il moto. Per avere un'idea di ciò che si sta studiando si immagini di lanciare in aria un corpo rigido e di voler descrivere il moto che esso compie rispetto a un osservatore seduto sul baricentro ma con assi costantemente orientati come quelli del riferimento fisso (le pareti del laboratorio). Detta ω la velocità angolare di questo moto, si indicano con Ω_1 , Ω_2 e Ω_3 le sue componenti rispetto alla base ε_1 , ε_2 , ε_3 , individuata dagli assi centrali d'inerzia del corpo rigido e quindi solidale al corpo. Proiettando la seconda equazione cardinale dei moti rigidi sulla terna centrale d'inerzia si ottengono le **equazioni di Eulero**

$$\begin{cases} I_1 \dot{\Omega}_1 - (I_2 - I_3) \Omega_2 \Omega_3 = M_1 \\ I_2 \dot{\Omega}_2 - (I_3 - I_1) \Omega_3 \Omega_1 = M_2 \\ I_3 \dot{\Omega}_3 - (I_1 - I_2) \Omega_1 \Omega_2 = M_3 \end{cases} \quad (2.40)$$

dove $I_3 > I_2 > I_1 > 0$ sono i momenti centrali d'inerzia e M_1 , M_2 e M_3 sono le tre componenti rispetto alla base centrale d'inerzia del momento totale della sollecitazione agente sul corpo calcolato rispetto al baricentro. Se il momento totale della sollecitazione agente sul corpo rigido rispetto al baricentro è nullo, allora il moto è detto **alla Poincot** e le equazioni di Eulero si riducono al sistema

$$\dot{\Omega}_1 = \frac{I_2 - I_3}{I_1} \Omega_2 \Omega_3, \quad \dot{\Omega}_2 = \frac{I_3 - I_1}{I_2} \Omega_3 \Omega_1, \quad \dot{\Omega}_3 = \frac{I_1 - I_2}{I_3} \Omega_1 \Omega_2 \quad (2.41)$$

si ricorda che si sta studiando il caso $I_i \neq 0$ per ogni $i = 1, 2, 3$.

Il sistema di equazioni differenziali (2.41) è un sistema dinamico tridimensionale non lineare, quindi il suo comportamento può essere studiato con i metodi discussi nei paragrafi precedenti; è anche possibile ricondurre la soluzione del sistema (2.41) al calcolo di integrali ellittici, si veda [11, Capitolo VI, § 37]. Lo spazio delle fasi è \mathbb{R}^3 e sui suoi assi sono riportati i valori delle componenti Ω_i della velocità angolare. In particolare è interessante individuarne i punti fissi e studiarne la stabilità. Il campo delle direzioni è la funzione $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita come

$$f(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3) := \left(\frac{I_2 - I_3}{I_1} \Omega_2 \Omega_3, \frac{I_3 - I_1}{I_2} \Omega_3 \Omega_1, \frac{I_1 - I_2}{I_3} \Omega_1 \Omega_2 \right)$$

per ogni $(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3) \in \mathbb{R}^3$. Il sistema algebrico $f(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3) = 0$ che definisce i punti fissi ha infinito alla tre soluzioni costituite da tutte le terne in cui almeno due delle tre componenti sono uguali a zero, cioè i punti fissi sono nella forma $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$ e $(0, 0, c)$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$ arbitrario; in altre parole i punti fissi sono tutti e soli i punti

degli assi cartesiani dello spazio delle fasi. Dal punto di vista fisico ciascun punto fisso è una *rotazione permanente*, cioè una rotazione del corpo rigido attorno a uno dei suoi assi centrali.

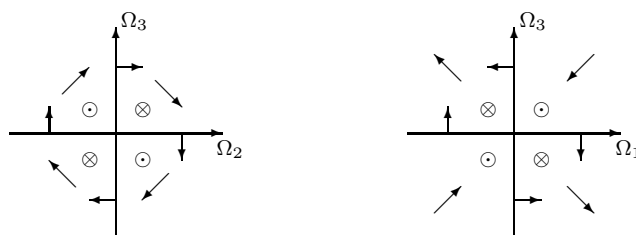


Fig. 2.20. A sinistra: il campo delle direzioni delle equazioni di Eulero (2.41) su un piano che interseca ortogonalmente l'asse Ω_1 in un punto in cui $\Omega_1 > 0$; i simboli \odot e \otimes indicano rispettivamente campo uscente ed entrante. A destra: il campo delle direzioni delle equazioni di Eulero (2.41) su un piano che interseca ortogonalmente l'asse Ω_2 in un punto in cui $\Omega_2 > 0$.

Al fine di studiare la stabilità dei punti fissi è utile tracciare il campo delle direzioni in un intorno dei punti fissi. Nel grafico a sinistra in figura 2.20 è disegnato il campo nei punti che giacciono in un piano che interseca ortogonalmente l'asse Ω_1 in un punto in cui $\Omega_1 > 0$. La struttura del campo delle direzioni suggerisce che i punti fissi giacenti sull'asse Ω_1 siano stabili; risultati analoghi si ottengono se si studia il campo f in un intorno dei punti fissi giacenti sull'asse Ω_3 . Nel grafico a destra è riportato il campo delle direzioni in punti di un piano che interseca ortogonalmente l'asse Ω_2 in un punto in cui $\Omega_2 > 0$. La struttura del campo delle direzioni suggerisce che i punti fissi giacenti sull'asse Ω_2 siano instabili. In conclusione queste prime osservazioni suggeriscono che le rotazioni permanenti attorno all'asse principale con momento d'inerzia intermedio sono instabili, mentre le altre sono stabili.

Per ottenere risultati rigorosi si prova a usare il metodo della linearizzazione. Si devono calcolare le derivate parziali delle componenti del campo delle direzioni rispetto alle componenti della velocità angolare; così facendo nel generico punto $(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$ si ottiene la matrice jacobiana

$$A(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3) = \begin{pmatrix} 0 & \Omega_3(I_2 - I_3)/I_1 & \Omega_2(I_2 - I_3)/I_1 \\ \Omega_3(I_3 - I_1)/I_2 & 0 & \Omega_1(I_3 - I_1)/I_2 \\ \Omega_2(I_1 - I_2)/I_3 & \Omega_1(I_1 - I_2)/I_3 & 0 \end{pmatrix}$$

Rotazione permanente attorno all'asse ε_1 : determino gli autovalori della matrice associata al sistema linearizzato in un intorno del punto fisso

$$A(a, 0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a(I_3 - I_1)/I_2 \\ 0 & a(I_1 - I_2)/I_3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda \left[\lambda^2 - a^2 \frac{I_1 - I_2}{I_3} \frac{I_3 - I_1}{I_2} \right] = 0$$

Dal momento che $I_1 - I_2 < 0$ e $I_3 - I_1 > 0$ si ha che i tre autovalori hanno tutti parte reale nulla e quindi non si può concludere nulla sulla stabilità del punto fisso sulla base

del principio di stabilità lineare. In altri termini il sistema linearizzato non permette di capire la stabilità della rotazione permanente relativa all'asse centrale con momento d'inerzia minimo. Un risultato analogo si trova anche per le rotazioni permanenti attorno all'asse ε_3 corrispondente al momento centrale d'inerzia massimo.

Rotazione permanente attorno all'asse ε_2 : determino gli autovalori della matrice associata al sistema linearizzato in un intorno del punto fisso

$$A(0, b, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b(I_2 - I_3)/I_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ b(I_1 - I_2)/I_3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda \left[\lambda^2 - b^2 \frac{I_1 - I_2}{I_3} \frac{I_2 - I_3}{I_1} \right] = 0$$

Dal momento che $I_1 - I_2 < 0$ e $I_2 - I_3 < 0$ si ha che esiste un autovalore con parte reale positiva e quindi, in virtù del Teorema 2.23, il punto fisso è instabile. In altri termini il sistema linearizzato permette di stabilire che la rotazione permanente relativa all'asse centrale con momento d'inerzia intermedio è instabile.

In conclusione usando il teorema sulla stabilità lineare è stato possibile dimostrare che le rotazioni permanenti attorno all'asse con momento d'inerzia intermedio sono instabili. Per dimostrare la stabilità delle rotazioni attorno agli assi principali ε_1 e ε_3 si deve ricorrere a uno studio più dettagliato; si segue l'argomento sviluppato in [10]. Dalle proprietà fisiche del moto si ha che sussistono le leggi di conservazione dell'energia cinetica e del modulo quadro del momento della quantità di moto, più precisamente sono integrali primi³ del moto le due funzioni

$$v(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3) := I_1^2 \Omega_1^2 + I_2^2 \Omega_2^2 + I_3^2 \Omega_3^2 \quad \text{e} \quad u(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3) := I_1 \Omega_1^2 + I_2 \Omega_2^2 + I_3 \Omega_3^2 \quad (2.42)$$

Questa affermazione può essere verificata facilmente calcolando la derivata di Lie rispetto al campo delle direzioni, infatti

$$L_f u = 2I_1 \Omega_1 (I_2 - I_3) \Omega_2 \Omega_3 + 2I_2 \Omega_2 (I_3 - I_1) \Omega_3 \Omega_1 + 2I_3 \Omega_3 (I_1 - I_2) \Omega_1 \Omega_2 = 0$$

e analogamente per la funzione v . Le due leggi di conservazione associate ai due integrali primi si scrivono

$$v(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3) = K^2 \quad \text{e} \quad u(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3) = 2T \quad (2.43)$$

dove K^2 è il modulo quadro del momento totale della quantità di moto e T è l'energia cinetica.

Si considera, ora, il moto associato al punto fisso $(a, 0, 0)$; per tale moto si ha $K^2 = I_1^2 a^2$ e $2T = I_1 a^2$. Un moto associato a condizioni iniziali molto vicine avrà momento totale della quantità di moto $K^2 = I_1^2 a^2 + \mu$ ed energia cinetica $2T = I_1 a^2 + \nu$, con $\mu, \nu \in \mathbb{R}$ molto piccoli. Eliminando Ω_1 dalle due leggi di conservazione (2.43) si ottiene

$$I_2(I_2 - I_1)\Omega_2^2 + I_3(I_3 - I_1)\Omega_3^2 = I_1^2 a^2 + \mu - (I_1^2 a^2 + I_1 \nu) = \mu - I_1 \nu$$

³È possibile ricavare direttamente gli integrali primi a partire dalle equazioni differenziali (2.41) senza far ricorso alle citate proprietà fisiche. Moltiplicando le tre equazioni rispettivamente per $I_1 \Omega_1$, $I_2 \Omega_2$ e $I_3 \Omega_3$ e integrando si ottiene l'integrale primo dell'energia cinetica, mentre moltiplicando le tre equazioni rispettivamente per $I_1^2 \Omega_1$, $I_2^2 \Omega_2$ e $I_3^2 \Omega_3$ e integrando si ottiene l'integrale primo del quadrato del modulo della quantità di moto totale.

Dal momento che $I_1 < I_2 < I_3$ si ha anche $\mu - I_1\nu > 0$; quindi l'equazione precedente definisce un'ellisse i cui semiassi sono molto piccoli. In definitiva durante il moto le coordinate $\Omega_2(t)$ e $\Omega_3(t)$ si mantengono molto piccole. Usando, infine, una delle due leggi di conservazione, per esempio quella dell'energia cinetica, per esprimere Ω_1 in funzione di Ω_2 e di Ω_3 si ha

$$\Omega_1^2 = a^2 + \nu/I_1 - (I_2\Omega_2^2 + I_3\Omega_3^2)/I_1$$

Essendo ν piccolo, Ω_2 e Ω_3 vicini a zero durante tutto il moto si ha che Ω_1 si mantiene prossimo ad a . Si può quindi concludere che il punto fisso $(a, 0, 0)$ è stabile. In modo del tutto analogo si può riconoscere anche la stabilità dei punti fissi $(0, 0, c)$, con $c \in \mathbb{R}$, giacenti sull'asse Ω_3 .

Lo studio precedente è stato condotto sotto l'ipotesi di non degenerazione dei momenti d'inerzia, cioè $I_1 < I_2 < I_3$; si studiano, ora, le rotazioni permanenti in presenza di degenerazione. Il caso a simmetria sferica, cioè il caso in cui i tre momenti sono tutti uguali, è molto semplice: il campo delle direzioni è uniformemente nullo e quindi tutti i punti dello spazio delle fasi sono di equilibrio e, di conseguenza, sono tutti di equilibrio stabile. Dal punto di vista fisico ciò significa che le rotazioni sono permanenti e stabili attorno a tutti gli assi passanti per il punto fisso. Se la degenerazione è di tipo cilindrico, cioè se esistono due soli momenti d'inerzia coincidenti, per esempio $I_1 = I_2 \neq I_3$, il corpo rigido è detto **giroscopio**. In questo caso le equazioni di Eulero si semplificano notevolmente:

$$\dot{\Omega}_1 = (1 - \alpha)\Omega_2\Omega_3, \quad \dot{\Omega}_2 = (\alpha - 1)\Omega_3\Omega_1, \quad \dot{\Omega}_3 = 0 \quad (2.44)$$

ove si è posto $\alpha := I_3/I$. Il campo delle direzioni è allora dato dalla funzione vettoriale $f(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3) := ((1 - \alpha)\Omega_2\Omega_3, (\alpha - 1)\Omega_3\Omega_1, 0)$. Risolvendo il sistema algebrico $f(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3) = 0$ si trova che i punti fissi sono tutti e soli i punti del piano $\Omega_1\Omega_2$ e dell'asse Ω_3 , ovvero i punti del piano delle fasi del tipo $(a, b, 0)$ e $(0, 0, c)$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$. In altri termini il solido esibisce una rotazione permanente se viene posto in rotazione attorno all'asse principale con momento d'inerzia non degenerare oppure attorno a un qualsiasi asse passante per il punto fisso e giacente nel piano individuato dai due assi principali con momenti d'inerzia degeneri, detto *piano equatoriale*.

Dal momento che la terza componente del campo delle direzioni è nulla segue che tutte le linee di fase giacciono in piani ortogonali all'asse Ω_3 , in altri termini lungo tutte le linee di fase la variabile Ω_3 si mantiene costante. L'equazione che esprime la conservazione dell'energia in questo caso diventa

$$I_1\Omega_1^2 + I_2\Omega_2^2 + I_3\Omega_3^2 = 2T \Rightarrow \Omega_1^2 + \Omega_2^2 = 2T/I_1 - \alpha\bar{\Omega}_3^2$$

dove $\bar{\Omega}_3$ è il valore costante della variabile Ω_3 lungo il moto preso in considerazione e, si ricorda, T è l'energia cinetica del solido. In conclusione le linee di fase appartengono a circonferenze giacenti su piani ortogonali all'asse Ω_3 e con centro sul medesimo asse. Usando questa osservazione, e procedendo come si è fatto nel caso non degenerare, si vede subito che i punti fissi del tipo $(0, 0, c)$ sono stabili.

La discussione delle proprietà di stabilità dei punti fissi $(a, b, 0)$ del piano $\Omega_1\Omega_2$ è un po' più complicata. Si vede subito che lo studio del sistema linearizzato non permette di concludere alcunché perché gli autovalori della matrice associata al sistema linearizzato risultano tutti con parte reale nulla. Ciò accade perché la natura del campo delle direzioni è abbastanza peculiare: il campo è nullo sul piano $\Omega_1\Omega_2$, mentre in qualsiasi altro piano ortogonale all'asse Ω_3 è circolare attorno all'asse Ω_3 . Ciò lascia intuire che i punti fissi del tipo $(a, b, 0)$ sono instabili: se si perturba di poco il punto fisso $(a, b, 0)$ restando nel piano $\Omega_1\Omega_2$ si ottiene ancora un punto fisso, quindi il moto risultante resta vicino a quello non perturbato; ma se si perturba di poco il punto fisso introducendo una piccola componente lungo l'asse Ω_3 , cioè se si considera un dato iniziale del tipo (a, b, μ) con $\mu \in \mathbb{R}$ piccolo quanto si voglia, il sistema dinamico, sospinto dal campo circolare, effettuerà un moto circolare attorno all'asse Ω_3 lungo la curva di livello dell'integrale primo dell'energia. Ciò lascia intuire che i punti fissi del tipo $(a, b, 0)$ sono instabili. Questo argomento, però, pur essendo estremamente convincente, non costituisce una dimostrazione rigorosa dell'instabilità dei punti fissi del piano equatoriale perché, essendo il problema tridimensionale, non è possibile usare il Teorema 2.22, e quindi non si può affermare con certezza come si evolve il moto lungo la linea di livello dell'integrale primo dell'energia.

Tutti i dubbi restanti possono essere spazzati via risolvendo in modo esplicito il sistema dinamico. Si osserva, infatti, che nel caso giroscopico non è difficile risolvere le equazioni di Eulero, si veda [12, Capitolo XII] per i dettagli, con dato iniziale $\Omega_1(0) = \bar{\Omega}_1$, $\Omega_2(0) = \bar{\Omega}_2$ e $\Omega_3(0) = \bar{\Omega}_3$. Osservato che la funzione $\Omega_3(t) = \bar{\Omega}_3$ soddisfa alla terza equazione (2.44) e al dato iniziale, si ha che le ulteriori due equazioni si riducono a

$$\dot{\Omega}_1 = (1 - \alpha) \Omega_2 \bar{\Omega}_3 \quad \text{e} \quad \dot{\Omega}_2 = (\alpha - 1) \bar{\Omega}_3 \Omega_1$$

Derivando la prima delle equazioni precedenti e sostituendo la seconda nell'equazione così ottenuta si ottiene l'equazione del moto armonico semplice $\ddot{\Omega}_1 + (1 - \alpha)^2 \bar{\Omega}_3^2 \Omega_1 = 0$. Con semplici passaggi si perviene, nel caso $\alpha < 1$, alla soluzione

$$\Omega_1(t) = \sqrt{\bar{\Omega}_1^2 + \bar{\Omega}_2^2} \sin((1 - \alpha)\bar{\Omega}_3 t + \psi) \quad \text{e} \quad \Omega_2(t) = \sqrt{\bar{\Omega}_1^2 + \bar{\Omega}_2^2} \cos((1 - \alpha)\bar{\Omega}_3 t + \psi)$$

dove ψ è tale che $\sin \psi = \bar{\Omega}_1 / \sqrt{\bar{\Omega}_1^2 + \bar{\Omega}_2^2}$ e $\cos \psi = \bar{\Omega}_2 / \sqrt{\bar{\Omega}_1^2 + \bar{\Omega}_2^2}$; è interessante osservare che per $\bar{\Omega}_3 = 0$ la soluzione si riduce al punto fisso, cioè alla rotazione permanente. La soluzione esplicita conferma in modo puntuale i risultati relativi alla stabilità dei punti fissi ottenuti sulla base dello studio dell'integrale primo dell'energia.

3. Sistemi meccanici conservativi unidimensionali

Si consideri un sistema meccanico unidimensionale costituito da una palla di massa unitaria sottoposta all'azione della forza $g(x)$ di classe C^1 su \mathbb{R} , con x la posizione della particella. Il moto è descritto dall'equazione di Newton

$$\ddot{x} = g(x) \tag{3.1}$$

Il problema (3.1) può essere ricondotto allo studio di un sistema dinamico (2.6) per mezzo delle nuove variabili $q = x$ e $p = \dot{x}$, si veda l'Esempio 2.1, e studiato in modo grafico con i metodi visti nei paragrafi precedenti, si vedano gli Esempi 2.34 e 2.35. Lo studio qualitativo diventa particolarmente completo nel caso in cui il sistema meccanico è **conservativo**, cioè se esiste una funzione $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^2 su \mathbb{R} , detta **energia potenziale**, tale che $g = -du/dx$. In questo caso, si veda l'Esempio 2.16, la funzione $h : (q, p) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow h(q, p) := p^2/2 + u(q) \in \mathbb{R}$, detta **energia meccanica**, è un integrale primo del sistema dinamico, ovvero una costante del moto.

Nel corso di questo capitolo verranno dapprima discussi i teoremi relativi alla stabilità dei punti di equilibrio, si veda il paragrafo 3.1, e in secondo luogo verrà mostrato come possa essere condotto uno studio grafico molto dettagliato dei moti dei sistema meccanici conservativi unidimensionali, si veda il paragrafo 3.2. Il paragrafo 3.5 è dedicato all'applicazione dei metodi grafici allo studio dei moti centrali.

3.1. Teoremi di stabilità

Sulla base dei risultati dimostrati nel paragrafo 2.5 a proposito della stabilità dei punti fissi dei sistemi dinamici, è possibile ricavare risultati molto significativi relativi alla stabilità dei punti di equilibrio di un sistema meccanico conservativo. In primo luogo si ricorda che un punto $x_e \in \mathbb{R}$ è di equilibrio per il sistema meccanico (3.1) se e solo se $g(x_e) = 0$, cioè se e solo se la forza che agisce sulla particelle in quel punto è nulla. È immediato verificare che il punto x_e è di equilibrio per il sistema meccanico (3.1) se e solo se il punto dello spazio delle fasi $(x_e, 0)$ è di equilibrio per il sistema dinamico $\dot{q} = p$ e $\dot{p} = g(q)$, dove $q = x$ e $p = \dot{x}$, equivalente al sistema meccanico considerato.

Si ricorda, inoltre, che il punto di equilibrio x_e del sistema meccanico (3.1) è di equilibrio stabile se e solo se comunque si prendano $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ esistono $\delta_1, \delta_2 > 0$ tali che per ogni $x_0, v_0 \in \mathbb{R}$ si ha che se $|x_0 - x_e| \leq \delta_1$ e $|v_0| \leq \delta_2$ allora l'unico moto con dato iniziale $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = v_0$ è tale che $|x(t) - x_e| \leq \varepsilon_1$ e $|\dot{x}(t)| \leq \varepsilon_2$ per ogni $t \geq 0$. È immediato verificare che il punto x_e è di equilibrio stabile per il sistema meccanico (3.1) se e solo se il punto dello spazio delle fasi $(x_e, 0)$ è di equilibrio stabile per il sistema dinamico equivalente.

Teorema 3.1 (Dirichelet) *Si consideri il sistema meccanico unidimensionale (3.1); si supponga che il sistema sia conservativo e che la sua energia potenziale sia $u \in C^1(\mathbb{R})$. Sia $x_e \in \mathbb{R}$; se x_e è un punto di minimo relativo proprio per la funzione energia potenziale u , allora x_e è un punto di equilibrio stabile.*

Dimostrazione. Essendo x_e un minimo relativo proprio di u ed essendo u di classe C^1 su \mathbb{R} , si ha che $u'(x_e) = 0$, allora $g(x_e) = 0$ e quindi x_e è di equilibrio per il sistema meccanico (3.1) e quindi $(x_e, 0)$ lo è per il sistema dinamico equivalente $\dot{q} = p$ e $\dot{p} = g(q)$ ottenuto ponendo $q = x$ e $p = \dot{x}$.

Si considera, ora, la funzione $w(q, p) = p^2/2 + u(q) - u(x_e)$ e si osserva che $w(x_e, 0) = 0$; inoltre, essendo x_e di minimo relativo proprio per u , esiste un aperto $I \subset \mathbb{R}^2$ tale che

$u(q, p) > 0$ per ogni $(q, p) \in I \setminus \{(x_e, 0)\}$. Considerato, infine, il campo delle direzioni $f(q, p) = (p, g(q))$, si ha che $L_f w(q, p) = u'p + pg = -gp + pg = 0$, come è ovvio perché h è un integrale primo del sistema dinamico equivalente. In conclusione la funzione h è di Liapunov per il punto fisso $(x_e, 0)$; di conseguenza, in virtù del Teorema 2.30, il punto $(x_e, 0)$ è stabile per il sistema dinamico e quindi il punto x_e è di equilibrio stabile per il sistema meccanico (3.1).

Teorema 3.1 \square

Dalla dimostrazione emerge che il Teorema 3.1 di Dirichelet, relativo ai sistemi meccanici conservativi, è una conseguenza immediata del Teorema di stabilità di Liapunov per i sistemi dinamici. Dallo studio dei corsi di fisica elementare è noto anche un enunciato complementare a quello di Dirichelet: *ciascun punto di massimo per l'energia potenziale è di equilibrio instabile*. Questa formulazione è troppo semplicistica; d'altro canto è vero che un teorema di questo tipo può essere enunciato sotto ipotesi un po' più forti e dimostrato sulla base del Teorema 2.23 di stabilità lineare studiato a proposito dei sistemi dinamici.

Teorema 3.2 *Si consideri il sistema meccanico unidimensionale (3.1); si supponga che il sistema sia conservativo e che la sua energia potenziale sia $u \in C^2(\mathbb{R})$. Sia $x_e \in \mathbb{R}$; se x_e è un punto di massimo relativo proprio per la funzione energia potenziale u e inoltre $u''(x_e) < 0$, allora x_e è un punto di equilibrio instabile.*

Dimostrazione. Procedendo come nella dimostrazione del Teorema 3.1 si mostra che x_e è di equilibrio per il sistema meccanico (3.1) e quindi $(x_e, 0)$ lo è per il sistema dinamico equivalente $\dot{q} = p$ e $\dot{p} = g(q)$ ottenuto ponendo $q = x$ e $p = \dot{x}$.

Si considera, ora, la matrice A del sistema dinamico ottenuto linearizzando il sistema equivalente in un intorno del punto di equilibrio $(x_e, 0)$ e se ne determinano gli autovalori:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -u''(x_e) & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A - \lambda \mathbb{I}) = \lambda^2 + u''(x_e) = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm \sqrt{-u''(x_e)}$$

dove si è usato che per ipotesi $u''(x_e) < 0$. Un autovalore è reale e positivo, allora il punto fisso è instabile per il sistema dinamico equivalente al sistema meccanico (3.1) e di conseguenza il punto x_e è di equilibrio instabile per il sistema meccanico (3.1).

Teorema 3.2 \square

3.2. Analisi grafica: ritratto di fase

È possibile studiare in modo generale le proprietà del moto sulla base di opportune ipotesi di regolarità sull'energia potenziale; in questo paragrafo si preferisce studiare in dettaglio un esempio significativi che permette di descrivere i diversi problemi che emergono nello studio dei sistemi meccanici unidimensionale conservativi.

I calcoli e gli argomenti verranno svolti, quando possibile, senza usare l'espressione esplicita della funzione energia potenziale considerata, in modo da essere delle vere e proprie dimostrazioni generali; però per chiarezza si preferisce discutere i diversi aspetti

dell'analisi avendo come riferimento un modello concreto. Si considera il sistema meccanico unidimensionale

$$\ddot{x} + \frac{du}{dx}(x) = 0 \quad (3.2)$$

con $x \in \mathbb{R}$ e l'energia potenziale data da $u(x) = (x^2 - 1)(x + 2)^2$, che descrive il moto di una palla di massa $m = 1$ sottoposta all'azione della forza $g(x) = -du(x)/dx = -2(x + 2)(2x^2 + 2x - 1)$. Si considera il sistema dinamico planare equivalente, $\dot{q} = p$ e $\dot{p} = -u'(q)$, ottenuto introducendo le variabili $q = x$ e $p = \dot{x}$. Il problema viene affrontato dal punto di vista dell'analisi grafica il cui obiettivo principe è la determinazione del ritratto di fase.

Dalla conservazione dell'energia meccanica si ha che la funzione $h(q, p) := p^2/2 + u(q) = p^2/2 + (q^2 - 1)(q + 2)^2$ è un integrale primo, cioè una costante del moto. Nell'analisi grafica dei moti dei sistemi meccanici conservativi unidimensionali un ruolo chiave viene giocato dalle curve di livello dell'energia nello spazio delle fasi qp , cioè dalle curve $\Gamma_e := \{(q, p) \in \mathbb{R}^2 : h(q, p) = e\}$, ove $e \in \mathbb{R}$ è un valore fissato dell'energia. In particolare, in virtù della forma particolare, dell'integrale primo dell'energia si ha che a fissato e i punti accessibili al moto sono tutti e soli i punti nell'insieme $\mathcal{I}_e := \{q \in \mathbb{R} : e - u(q) \geq 0\}$.

In primo luogo è utile studiare la funzione energia potenziale in modo da determinare i punti di equilibrio e da stabilirne le loro proprietà di stabilità. Insieme di definizione: la funzione $u(q)$ è definita su tutto \mathbb{R} . Zeri della funzione: $q_1 = -2$, $q_2 = -1$ e $q_3 = +1$. Segno della funzione: $u(q) \geq 0$ se e solo se $q \leq q_2$ e $q \geq q_3$. Derivata: $u'(q) = 2(q+2)(2q^2+2q-1)$. Punti estremali: $q_1 = -2$, $q_4 = -(1 + \sqrt{3})/2$ e $q_5 = -(1 - \sqrt{3})/2$; q_1 e q_5 sono punti di minimo, mentre q_4 è un punto di massimo. Si osserva che $q_1 < q_4 < q_2 < q_5 < q_3$. Valore assunto dalla funzione negli estremali:

$$u(q_1) = 0 \quad u_4 := u(q_4) = \frac{\sqrt{3}}{8}(3 - \sqrt{3})^2 \quad u_5 := u(q_5) = -\frac{\sqrt{3}}{8}(3 + \sqrt{3})^2$$

Infine osservo che la funzione diverge positivamente quando $q \rightarrow \pm\infty$. Si ottiene quindi il grafico in figura 3.21. Si osserva che q_1 e q_5 sono punti di equilibrio stabile, mentre q_4 è un punto di equilibrio instabile.

È ora possibile discutere qualitativamente le soluzioni della (3.2) al variare dell'energia del sistema. Si considerano i seguenti intervalli di energia:

- $e < u_5$: u_5 è il minimo assoluto della funzione $u(q)$, quindi per ogni $q \in \mathbb{R}$ si ha $e - u(q) < 0$. Non esiste moto, $\mathcal{I}_e = \emptyset$.
- $e = u_5$: il punto q_5 è l'unico punto tale che $e - u(q) \geq 0$, allora $\mathcal{I}_e = \{q_5\}$. La curva di livello è costituita da un solo punto: $\Gamma_e = \{(q, p) \in \mathbb{R}^2 : q = (-1 + \sqrt{3})/2, p = 0\}$. L'unica possibile soluzione di (3.2) è il punto di equilibrio stabile $q(t) = q_5$.
- $u_5 < e < 0$: denoto con $q_1^e < q_2^e$ le due soluzioni dell'equazione $e - u(q) = 0$. L'insieme dei punti accessibili al moto è l'intervallo $\mathcal{I}_e = [q_1^e, q_2^e]$. La curva di livello $\Gamma_e = \{(q, p) \in \mathbb{R}^2 : q_1^e \leq q \leq q_2^e, p = \pm\sqrt{2(e - u(q))}\}$ è una curva chiusa e regolare attorno a $(q_5, 0)$. Poiché la curva di livello non passa per nessun punto di equilibrio,

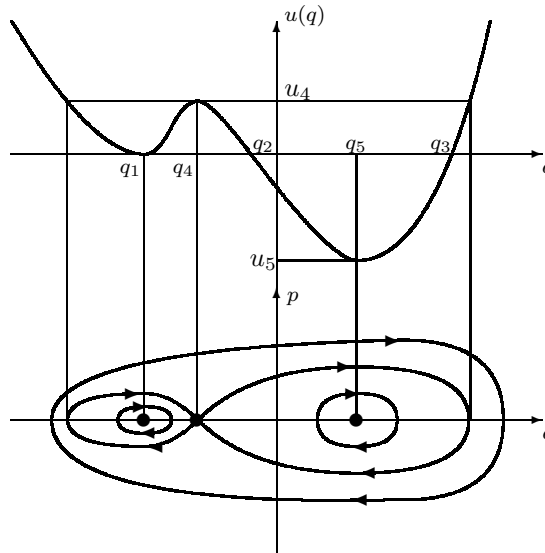


Fig. 3.21. Grafico dell'energia potenziale e curve di livello.

allora esiste una sola orbita periodica coincidente con la curva di livello stessa. I punti q_1^e e q_2^e sono i punti di inversione del moto periodico. Dalla struttura del campo delle direzioni, si ricorda che $f(q, p) = (p, -u'(q))$, segue che la linea di fase interseca l'asse orizzontale perpendicolarmente; per esempio nell'estremo sinistro dell'intervallo $f(q_1^e, 0) = (0, -u'(q_1^e))$ con la seconda componente che è non nulla perché la derivata dell'energia potenziale non si annulla in q_1^e . In modo alternativo si considera il ramo positivo $p = \sqrt{2(e - u(q))}$ della curva di livello e, calcolandone la derivata prima, si trova

$$\frac{dp}{dq} = \frac{1}{\sqrt{2(e - u(q))}}(-2u'(q)) = -\frac{u'(q)}{\sqrt{2(e - u(q))}}$$

Osservato che per ogni valore di e nell'intervallo considerato i punti di inversione q_1^e e q_2^e non sono estremali di u , cioè $u'(q_1^e) \neq 0$ e $u'(q_2^e) \neq 0$, e per definizione $u(q_1^e) = u(q_2^e) = e$, si ha che la derivata diverge quando q tende agli estremi q_1^e e q_2^e dell'intervallo.

- $e = 0$: le soluzioni dell'equazione $e - u(q) = 0$, ovvero $u(q) = 0$ sono i tre punti q_1 , q_2 e q_3 . L'insieme dei punti accessibili al moto è $\mathcal{I}_e = [q_2, q_3] \cup \{q_1\}$. La curva di livello, $\Gamma_e = \{(q, p) \in \mathbb{R}^2 : q_2 \leq q \leq q_3, p = \pm\sqrt{2(e - u(q))}\} \cup \{(q_1, 0)\}$, consta di due parti: una curva chiusa e regolare attorno a $(q_5, 0)$ e il punto isolato $(q_1, 0)$. Sulla curva Γ_e giacciono due orbite: il punto fisso stabile $q(t) = q_1$ e un moto periodico con punti di inversione q_2 e q_3 .
- $0 < e < u_4$: denoto con $q_1^e < q_2^e < q_3^e < q_4^e$ le quattro soluzioni dell'equazione $e - u(q) = 0$; si ha $q_1^e < q_1 < q_2^e < q_3^e < q_5 < q_4^e$. L'insieme dei punti accessibili al moto è l'unione di due intervalli disgiunti: $\mathcal{I}_e = [q_1^e, q_2^e] \cup [q_3^e, q_4^e]$. La curva di livello,

$\Gamma_e = \{(q, p) \in \mathbb{R}^2 : q_1^e \leq q \leq q_2^e, p = \pm\sqrt{2(e - u(q))}\} \cup \{(q, p) \in \mathbb{R}^2 : q_3^e \leq q \leq q_4^e, p = \pm\sqrt{2(e - u(q))}\}$, consta di due curve chiuse e regolari, disgiunte e contenenti nel loro interno rispettivamente i punti $(q_1, 0)$ e $(q_5, 0)$. Su ognuna delle componenti connesse di Γ_e giace un'orbita periodica. L'orbita che ruota attorno a $(q_1, 0)$ ha q_1^e e q_2^e come punti di inversione. L'orbita che ruota attorno a $(q_5, 0)$ ha q_3^e e q_4^e come punti di inversione.

- $e = u_4$: denoto con $q_1^e < q_4 < q_2^e$ le tre soluzioni dell'equazione $e - u(q) = 0$ ($u(q) = u_4$). L'insieme dei punti accessibili al moto è l'intervallo: $\mathcal{I}_e = [q_1^e, q_2^e]$. Il punto q_4 è un minimo del potenziale, quindi è un punto di equilibrio instabile. La curva di livello è la separatrice e consta di tre parti: $\Gamma_e = \Gamma_e^1 \cup \Gamma_e^2 \cup \Gamma_e^3$ ove $\Gamma_e^1 = \{(q, p) \in \mathbb{R}^2 : q_1^e \leq q < q_4, p = \pm\sqrt{2(e - u(q))}\}$, $\Gamma_e^2 = \{(q_4, 0)\}$ e $\Gamma_e^3 = \{(q, p) \in \mathbb{R}^2 : q_4 < q \leq q_2^e, p = \pm\sqrt{2(e - u(q))}\}$. Su Γ_e^1 e Γ_e^3 giacciono due orbite asintotiche omocline, mentre su Γ_e^2 giace l'orbita corrispondente al punto di equilibrio instabile $q(t) = q_4$. È interessante studiare il comportamento asintotico della separatrice attorno al punto di equilibrio instabile q_4 , si veda anche l'Esercizio 3.3 per uno studio più generale; in questo caso il campo delle direzioni f non permette di stabilire la pendenza della tangente in $(q_4, 0)$ perché tale punto è fisso e quindi $f(q_4, 0) = (0, 0)$. Considero, allora, l'arco di equazione $p = \sqrt{2[u_4 - u(q)]}$, con $q \geq q_4$, pongo $P(q) := u_4 - u(q) = u_4 - (q^2 - 1)(q + 2)^2$ e sviluppo in serie di Taylor in un intorno di q_4 . Dal momento che $P(q_4) = u_4 - u(q_4) = 0$, $P'(q_4) = -u'(q_4) = 0$ e $P''(q_4) = -6(2q_4^2 + 4q_4 + 1) = 6(\sqrt{3} - 1)$, si ha

$$P(q) = \frac{1}{2!}6(\sqrt{3} - 1)(q - q_4)^2 + O((q - q_4)^3) = 3(\sqrt{3} - 1)(q - q_4)^2 + O((q - q_4)^3)$$

L'equazione dell'arco di separatrice diventa

$$\begin{aligned} p &= \sqrt{6(\sqrt{3} - 1)(q - q_4)^2 \left[1 + \frac{O((q - q_4)^3)}{3(\sqrt{3} - 1)(q - q_4)^2}\right]} \\ &= \sqrt{6(\sqrt{3} - 1)(q - q_4)}\sqrt{1 + O(q - q_4)} = \sqrt{6(\sqrt{3} - 1)(q - q_4)}[1 + O(q - q_4)] \end{aligned}$$

dove nell'ultima uguaglianza si è usato $q \geq q_4$; il termine dominante è lineare e ha pendenza $\sqrt{6(\sqrt{3} - 1)}$.

- $e > u_4$: denoto con $q_1^e < q_2^e$ le due soluzioni dell'equazione $e - u(q) = 0$. L'insieme dei punti accessibili al moto è l'intervallo $\mathcal{I}_e = [q_1^e, q_2^e]$. La curva di livello $\Gamma_e = \{(q, p) \in \mathbb{R}^2 : q_1^e \leq q \leq q_2^e, p = \pm\sqrt{2(e - u(q))}\}$ è una curva chiusa e regolare attorno a $(q_1, 0)$ e $(q_5, 0)$. Poiché la curva di livello non passa per nessun punto di equilibrio, allora esiste una sola orbita periodica coincidente con la curva di livello stessa. I punti q_1^e e q_2^e sono i punti di inversione del moto periodico.

L'analisi precedente permette di stabilire quale sia l'insieme dei dati iniziali che generano orbite periodiche: si vede immediatamente che tale insieme è costituito dal sottoinsieme del piano delle fasi $\Pi = \mathbb{R}^2 \setminus (\Gamma_{u_4} \cup \{(q_5, 0)\})$.

3.3. Analisi grafica: tempi di percorrenza

Il ritratto di fase non fornisce, a prima vista, informazioni sull'andamento temporale delle orbite, ma in alcuni casi è possibile scoprire qualcosa. Per esempio si può dimostrare che lungo la separatrice il moto è asintotico al punto di equilibrio instabile. Considero l'arco di traiettoria su $\Gamma_{u_4}^1$ con punto iniziale $q_1^{u_4}$. L'equazione della curva di livello è $p = \sqrt{2(u_4 - u(q))}$, quindi il tempo impiegato a raggiungere il punto di ascissa $q_4 - \varepsilon$, con $\varepsilon > 0$ piccolo, è

$$T_{q_4 - \varepsilon} = \int_{q_1^{u_4}}^{q_4 - \varepsilon} \frac{dq}{\sqrt{2(u_4 - u(q))}}$$

Il punto q_4 è uno zero almeno doppio del polinomio $P(q) := u_4 - u(q)$, poiché $P(q_4) = 0$ e $u'(q_4) = 0$. Pertanto posso scrivere $u_4 - u(q) = (q - q_4)^2(aq^2 + bq + c)$ con opportuni $a, b, c \in \mathbb{R}$. Si ha $aq^2 + bq + c \geq 0$ per $q \in [q_1^{u_4}, q_4]$ e inoltre è, ovviamente, limitato nello stesso intervallo chiuso e limitato; quindi esiste un numero reale e positivo k tale che $aq^2 + bq + c \leq k$ per $q \in [q_1^{u_4}, q_4]$. In conclusione

$$T_{q_4 - \varepsilon} = \int_{q_1^{u_4}}^{q_4 - \varepsilon} \frac{dq}{\sqrt{2(u_4 - u(q))}} \geq \int_{q_1^{u_4}}^{q_4 - \varepsilon} \frac{dq}{\sqrt{k(q - q_4)^2}}$$

e quindi

$$T_{q_4 - \varepsilon} \geq \int_{q_1^{u_4}}^{q_4 - \varepsilon} \frac{dq}{\sqrt{k}|q - q_4|} = \int_{q_1^{u_4}}^{q_4 - \varepsilon} \frac{dq}{\sqrt{k}(q_4 - q)}$$

da cui si ha $T_{q_4 - \varepsilon} \rightarrow \infty$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$; da cui si ha $T_{q_4 - \varepsilon} \rightarrow \infty$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$; dunque il moto su $\Gamma_{u_4}^1$ è asintotico. Nella stima precedente è stata usata la forma polinomiale della funzione energia potenziale u ; lo stesso risultato può essere ottenuto in modo più generale usando soltanto il fatto che $u''(q_4) < 0$. Infatti, ricordando che $P(q_4) = P'(q_4) = 0$ e $P''(q_4) = -u''(q_4) > 0$, preso $\delta > 0$ piccolo si ha che la funzione P può essere scritta mediante la seguente formula di Taylor arrestata al secondo ordine: per ogni $q \in [q_4 - \delta, q_4]$

$$P(q) = -\frac{1}{2}u''(q_4)(q - q_4)^2 + \omega(q) = -\frac{1}{2}u''(q_4)(q - q_4)^2 \left[1 + \frac{\omega(q)}{-u''(q_4)(q - q_4)^2/2} \right]$$

con $\lim_{q \rightarrow q_4} \omega(q)/(q - q_4)^2 = 0$. La formula precedente permette di stimare dall'alto la funzione P , infatti si può scegliere δ così piccolo che per ogni $q \in [q_4 - \delta, q_4]$ si abbia $\omega(q)/(-u''(q_4)(q - q_4)^2/2) < 1/2$, allora $P(q) < -(3/4)u''(q_4)(q - q_4)^2$. Usando questa stima si può, infine, dimostrare che il moto lungo la separatrice è asintotico: detto T_{q_4} il tempo impiegato dal sistema dinamico per giungere in q_4 a partire da $q_4^{u_4}$ si ha

$$T_{q_4} \geq \int_{q_4 - \delta}^{q_4} \frac{dq}{\sqrt{2P(q)}} > \int_{q_4 - \delta}^{q_4} \frac{dq}{\sqrt{-(3/4)u''(q_4)(q - q_4)^2}} = \int_{q_4 - \delta}^{q_4} \frac{2 dq}{\sqrt{-3u''(q_4)(q_4 - q)}} = +\infty$$

Si considera, ora, l'orbita con energia $e = 0$, in particolare si dimostra che esiste un moto periodico, se ne stima il periodo e lo si calcola esattamente. In corrispondenza di $e = 0$ esiste un'orbita periodica con punti di inversione $q_2 = -1$ e $q_3 = +1$, giacente sulla curva di livello di equazione $p = \pm \sqrt{2[0 - u(q)]} = \pm \sqrt{2(1 - q^2)(q + 2)^2} = \pm(q + 2)\sqrt{2(1 - q^2)}$.

Osservato che dall'equazione della curva di livello si ha $dt = dq/[(q+2)\sqrt{2(1-q^2)}]$, il periodo T dell'orbita è dato dal seguente integrale definito:

$$\int_0^{T/2} dt = \int_{-1}^{+1} \frac{dq}{(q+2)\sqrt{2(1-q^2)}} \Rightarrow T = \sqrt{2} \int_{-1}^{+1} \frac{dq}{(q+2)\sqrt{1-q^2}} \quad (3.3)$$

L'integrale (3.3) può essere calcolato esattamente per mezzo di una delle due sostituzioni $q = \sin \varphi$ oppure $\sqrt{1-q^2} = (1-q)y$. Si ottiene $T = \pi\sqrt{6}/3 \simeq 0.81\pi$. Alternativamente al calcolo diretto, è possibile dare una stima di T riconducendo il calcolo a integrali semplici. Osservo che nell'intervallo $[-1, +1]$ si ha $1 \leq q+2 \leq 3$, allora

$$\sqrt{1-q^2} \leq (q+2)\sqrt{1-q^2} \leq 3\sqrt{1-q^2} \Rightarrow \frac{1}{3\sqrt{1-q^2}} \leq \frac{1}{(q+2)\sqrt{1-q^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{1-q^2}}$$

e quindi

$$T_- := \sqrt{2} \int_{-1}^{+1} \frac{dq}{3\sqrt{1-q^2}} \leq T \leq \sqrt{2} \int_{-1}^{+1} \frac{dq}{\sqrt{1-q^2}} =: T_+$$

In modo elementare, sfruttando le proprietà della funzione arcsin, si ha che

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dq}{\sqrt{1-q^2}} = \pi$$

pertanto $T_- = \sqrt{2}\pi/3 \simeq 0.47\pi$ e $T_+ = \sqrt{2}\pi \simeq 1.41\pi$. È possibile migliorare notevolmente le stime suddividendo l'integrale e stimando meglio in ogni intervallo la funzione integranda. Per esempio posto $g(q) := (q+2)\sqrt{1-q^2}$ si può spezzare l'integrale come

$$\frac{T}{\sqrt{2}} = \left(\int_{-1}^{-\sqrt{3}/2} + \int_{-\sqrt{3}/2}^{-\sqrt{2}/2} + \int_{-\sqrt{2}/2}^{-1/2} + \int_{-1/2}^0 + \int_0^{1/2} + \int_{1/2}^{\sqrt{2}/2} + \int_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{3}/2} + \int_{\sqrt{3}/2}^{+1} \right) \frac{dq}{g(q)}$$

A questo punto si osserva che $q+2 \leq 2 - \sqrt{3}/2$ se $-1 \leq q \leq -\sqrt{3}/2$, $q+2 \leq 2 - \sqrt{2}/2$ se $-\sqrt{3}/2 \leq q \leq -\sqrt{2}/2$, $q+2 \leq 2 - 1/2$ se $-\sqrt{2}/2 \leq q \leq -1/2$, $q+2 \leq 2$ se $-1/2 \leq q \leq 0$, $q+2 \leq 2 + 1/2$ se $0 \leq q \leq 1/2$, $q+2 \leq 2 + \sqrt{2}/2$ se $1/2 \leq q \leq \sqrt{2}/2$, $q+2 \leq 2 + \sqrt{3}/2$ se $\sqrt{2}/2 \leq q \leq \sqrt{3}/2$, $q+2 \leq 3$ se $\sqrt{3}/2 \leq q \leq 1$. Usando la decomposizione precedente dell'integrale definito che fornisce il periodo si ottiene

$$\begin{aligned} T &\geq \sqrt{2} \left\{ \frac{1}{2 - \sqrt{3}/2} \left[-\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} \right] + \frac{1}{2 - \sqrt{2}/2} \left[-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} \right] + \frac{1}{2 - 1/2} \left[-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} \right] \right. \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[0 + \frac{\pi}{6} \right] + \frac{1}{2 + 1/2} \left[\frac{\pi}{6} - 0 \right] + \frac{1}{2 + \sqrt{2}/2} \left[\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right] + \frac{1}{2 + \sqrt{3}/2} \left[\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right] + \\ &\quad \left. \frac{1}{3} \left[\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} \right] \right\} = \sqrt{2}\pi \left[\frac{47}{180} + \frac{2}{21} + \frac{12 + \sqrt{3}}{78} \right] =: T'_- \end{aligned}$$

Si trova $T'_- \simeq 0.75\pi$; quindi la stima dal basso è stata notevolmente migliorata. Analogamente si può procedere per la stima dall'alto; mi limito a dividere l'integrale in due soli pezzi:

$$T = \sqrt{2} \left[\int_{-1}^0 \frac{dq}{g(q)} + \int_0^{+1} \frac{dq}{g(q)} \right]$$

e osservo che $q + 2 \geq 1$ se $-1 \leq q \leq 0$, mentre $q + 2 \geq 2$ se $0 \leq q \leq +1$. Allora si ha

$$T \leq \sqrt{2} \left[\int_{-1}^0 \frac{dq}{\sqrt{1-q^2}} + \int_0^{+1} \frac{dq}{2\sqrt{1-q^2}} \right] = \sqrt{2} \left\{ \left[0 + \frac{\pi}{2} \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{\pi}{2} - 0 \right] \right\} = \frac{3}{4} \sqrt{2} \pi =: T'_+$$

che migliora la stima dall'alto, infatti $T'_+ \simeq 1.06\pi$.

Si considera, ora, una situazione analoga a quella appena discussa: per un moto con energia $u_5 < e < u_4$ si esprime il periodo per mezzo di un integrale definito e in particolare si dimostra che è finito. Sia e tale che $u_5 < e < u_4$. Dalla discussione precedente si ha che esiste almeno un'orbita periodica. Scelgo l'orbita che ruota attorno a q_5 e denoto con $a < b$ i due punti di inversione: a, b dipendono da e , ma per semplicità ometto questa dipendenza nella notazione. Osservo che $b > 0$ mentre a può essere sia positivo che negativo. Dall'equazione $dq/dt = \sqrt{2[e - u(q)]}$ si ottiene

$$\int_0^{T/2} dt = \int_a^b \frac{dq}{\sqrt{2[e - u(q)]}} \Rightarrow T = \sqrt{2} \int_a^b \frac{dq}{\sqrt{P(q)}} \quad (3.4)$$

ove si è definito $P(q) := e - u(q)$. Dimostro che l'integrale (3.4) è convergente e quindi che il periodo è finito: si osserva che a e b sono zeri del polinomio $P(q)$ e che $P(q) \neq 0$ per ogni $q \in (a, b)$. Allora per dimostrare la convergenza dell'integrale è sufficiente verificare che l'integrando diverga abbastanza lentamente agli estremi dell'intervallo di integrazione. Dal momento che $P'(a) \neq 0$ e $P'(b) \neq 0$ i punti a e b sono due zeri semplici del polinomio, allora si può scrivere

$$P(q) = (q - a)(b - q)(a_1 q^2 + a_2 q + a_3)$$

con opportuni numeri reali a_1, a_2 e a_3 . Inoltre il trinomio $a_1 q^2 + a_2 q + a_3$ è strettamente positivo nell'intervallo $[a, b]$. In conclusione la funzione $\sqrt{P(q)}$ è un infinitesimo di ordine $1/2$ in a e in b , quindi l'integrale (3.4) è convergente. Nella discussione precedente è stata usata la forma polinomiale della funzione energia potenziale u ; lo stesso risultato può essere ottenuto in modo più generale usando soltanto il fatto che $u'(a) < 0$ e $u'(b) > 0$. Si studia la convergenza dell'integrale in b , per a si ragiona in modo analogo. Ricordando che $P(b) = 0$, preso $\delta > 0$ piccolo si ha che la funzione P può scritta mediante la seguente formula di Taylor arrestata al primo ordine: per ogni $q \in [b - \delta, b]$

$$P(q) = -u'(b)(q - b) + \omega(q) = u'(b)(b - q) + \omega(q) = u'(b)(b - q) \left[1 + \frac{\omega(q)}{u'(b)(b - q)} \right]$$

con $\lim_{q \rightarrow q_4} \omega(q)/(q - b) = 0$. La formula precedente permette di concludere che $P(q)$ è un infinitesimo di ordine uno in b e quindi il denominatore dell'integrando al secondo membro di (3.4) è un infinitesimo di ordine $1/2$ in b . Si dimostra un risultato analogo in a e si conclude che l'integrale che esprime il periodo dell'orbita è convergente.

3.4. Analisi grafica: periodo delle piccole oscillazioni

Si considerano i moti periodici attorno a q_1 con energia $0 < e < u_4$. In particolare si vuole determinare il periodo delle oscillazioni nel caso in cui l'energia sia molto vicina al valore

assunto nel minimo, cioè a zero. Il problema verrà risolto usando due diverse strategie: la prima sarà un calcolo molto grossolano e per nulla rigoroso che farà uso della forma esplicita di u , il secondo approccio, invece, sarà un risultato generale e rigoroso contenuto nel Teorema 3.3.

Sia $\varepsilon > 0$ piccolo, in particolare sia $\varepsilon < u_4$, per determinare i punti di inversione del moto periodico attorno al punto di equilibrio $q_1 = -2$ si cerca una soluzione dell'equazione $u(q) = \varepsilon$ nella forma $q = -2 + \delta$:

$$u(-2 + \delta) = \varepsilon \Rightarrow [(-2 + \delta)^2 - 1](-2 + \delta + 2)^2 = \varepsilon \Rightarrow \delta^4 - 4\delta^3 + 3\delta^2 = \varepsilon \Rightarrow \delta = \pm \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}$$

dove sono stati trascurati brutalmente tutti gli ordini superiori al secondo in δ . Allora per determinare il semiperiodo dell'orbita si deve integrare tra $-2 - \sqrt{\varepsilon/3}$ e $-2 + \sqrt{\varepsilon/3}$, quindi il periodo è dato da

$$T = 2 \int_{-2-\sqrt{\varepsilon/3}}^{-2+\sqrt{\varepsilon/3}} \frac{dq}{\sqrt{2[\varepsilon - (q^2 - 1)(q + 2)^2]}} \approx 2 \int_{-2-\sqrt{\varepsilon/3}}^{-2+\sqrt{\varepsilon/3}} \frac{dq}{\sqrt{2[\varepsilon - 3(q + 2)^2]}}$$

dove l'energia potenziale è stata sviluppata al secondo ordine in serie di Taylor; si noti che $u(-2) = u'(-2) = 0$ e $u''(-2) = 6$. Eseguendo la sostituzione $r = (q + 2)/\sqrt{\varepsilon/3}$ si ottiene

$$T \approx 2 \int_{-1}^{+1} \frac{\sqrt{\varepsilon/3} dr}{\sqrt{2(\varepsilon - \varepsilon r^2)}} = \frac{2}{\sqrt{6}} \int_{-1}^{+1} \frac{dr}{\sqrt{1 - r^2}} = \frac{2}{\sqrt{6}} \arcsin r \Big|_{-1}^{+1} = \frac{2\pi}{\sqrt{6}}$$

È interessante osservare che per piccoli valori di ε il periodo risulta indipendente da ε e uguale a $2\pi/\sqrt{u''(-2)}$. Questo risultato, che appare abbastanza casuale, nasconde invece una verità generale.

Teorema 3.3 *Si consideri il sistema meccanico unidimensionale (3.1); si supponga che il sistema sia conservativo e che la sua energia potenziale sia $u \in C^2(\mathbb{R})$. Sia $x_e \in \mathbb{R}$; se x_e è un punto di minimo relativo proprio per la funzione energia potenziale u e inoltre $u''(x_e) > 0$, allora esiste $\varepsilon_0 > 0$ tale che per ogni $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ in corrispondenza dell'energia $u(x_e) + \varepsilon$ esiste un moto periodico attorno al punto fisso e , detto $T(\varepsilon)$ il suo periodo, si ha*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} T(\varepsilon) = \frac{2\pi}{\sqrt{u''(x_e)}} \quad (3.5)$$

Il valore limite di $T(\varepsilon)$ è detto periodo delle piccole oscillazioni attorno al punto di equilibrio stabile x_e .

Dimostrazione. Si segue l'argomento proposto in [12] che usa soltanto due stime, una dall'alto e una dal basso del periodo del moto, e il cosiddetto teorema dei carabinieri. Senza perdita di generalità si può supporre $x_e = 0$ e $u(x_e) = 0$. Per $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo esistono due punti $x_-(\varepsilon) < 0 < x_+(\varepsilon)$ tali che $u(x_-(\varepsilon)) = u(x_+(\varepsilon)) = 0$ (qualora vi

fossero più punti si scelgono quelli a distanza minima dall'origine). L'analisi qualitativa permette subito di dimostrare che in corrispondenza del valore ε dell'energia esiste un moto periodico attorno all'origine con punti di inversione x_- e x_+ ; il semiperiodo di tale moto è dato dall'integrale

$$S(\varepsilon) = \int_{x_-(\varepsilon)}^{x_+(\varepsilon)} \frac{dx}{\sqrt{2[\varepsilon - u(x)]}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{x_-(\varepsilon)}^{x_+(\varepsilon)} \frac{dx}{\sqrt{\varepsilon - u(x)}}$$

Detti $S_-(\varepsilon)$ e $S_+(\varepsilon)$ i tempi che il sistema impiega rispettivamente per andare da $x_-(\varepsilon)$ a 0 e da 0 a $x_+(\varepsilon)$, si ha $S(\varepsilon) = S_-(\varepsilon) + S_+(\varepsilon)$, dove

$$S_-(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{x_-(\varepsilon)}^0 \frac{dx}{\sqrt{\varepsilon - u(x)}} \quad \text{e} \quad S_+(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{x_+(\varepsilon)} \frac{dx}{\sqrt{\varepsilon - u(x)}}$$

Per stimare dall'alto e dal basso il secondo tempo di percorrenza si considerano due parabole che approssimano da sopra e da sotto il grafico della funzione energia potenziale nell'intervallo $[0, x_+(\varepsilon)]$; si suppone che ε sia così piccolo che la funzione $u(x)$ non abbia flessi in $[0, x_+(\varepsilon)]$, allora detti

$$\underline{A} := \inf_{x \in [0, x_+(\varepsilon)]} u''(x) \quad \text{e} \quad \overline{A} := \sup_{x \in [0, x_+(\varepsilon)]} u''(x)$$

si ha che $0 < \underline{A} \leq u''(0) \leq \overline{A}$. Si considerano, ora, le due parabole che intersecano il grafico di u nel punto $x_+(\varepsilon)$ con concavità date rispettivamente da \underline{A} e \overline{A} , ovvero si considerano le due funzioni

$$\underline{u}(x) = \frac{1}{2}\underline{A}x^2 + \varepsilon - \frac{1}{2}\underline{A}x_+^2 \quad \text{e} \quad \overline{u}(x) = \frac{1}{2}\overline{A}x^2 + \varepsilon - \frac{1}{2}\overline{A}x_+^2$$

È facile convincersi che $\overline{u}(x) \leq u(x) \leq \underline{u}(x)$ per ogni $x \in [0, x_+(\varepsilon)]$; è sufficiente immaginare di tracciare le curve riportate nel grafico di sinistra della figura 3.22 procedendo da destra verso sinistra a partire dal punto di intersezione. Il grafico della funzione \underline{u} è quello più in alto perché in ogni punto la concavità è minore di quella di u ; per ragioni analoghe il grafico di \overline{u} si trova sotto quello di u . Per un argomento rigoroso si rimanda all'osservazione in calce alla dimostrazione. Osservato, allora, che nello stesso intervallo si ha $\varepsilon - \underline{u}(x) \leq \varepsilon - u(x) \leq \varepsilon - \overline{u}(x)$, segue che

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{x_+(\varepsilon)} \frac{dx}{\sqrt{\varepsilon - \overline{u}(x)}} \leq S_+(\varepsilon) \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{x_+(\varepsilon)} \frac{dx}{\sqrt{\varepsilon - \underline{u}(x)}} \Rightarrow \frac{\pi}{2\sqrt{\overline{A}}} \leq S_+(\varepsilon) \leq \frac{\pi}{2\sqrt{\underline{A}}}$$

Ripetendo lo stesso argomento nell'intervallo $[x_-(\varepsilon), 0]$ per il tempo $S_-(\varepsilon)$ si perviene alla stima complessiva per il tempo totale $S(\varepsilon)$

$$\frac{\pi}{\sqrt{\overline{B}}} \leq S(\varepsilon) \leq \frac{\pi}{\sqrt{\underline{B}}}$$

dove si è posto

$$\underline{B} := \inf_{x \in [x_-(\varepsilon), x_+(\varepsilon)]} u''(x) \quad \text{e} \quad \overline{B} := \sup_{x \in [x_-(\varepsilon), x_+(\varepsilon)]} u''(x)$$

La tesi, allora, segue in virtù del cosiddetto teorema dei carabinieri quando si considera il limite per $\varepsilon \rightarrow 0$ e si osserva che per la continuità di u'' si ha che in detto limite \underline{B} e \overline{B} tendono a $u''(0)$.

Teorema 3.3 \square

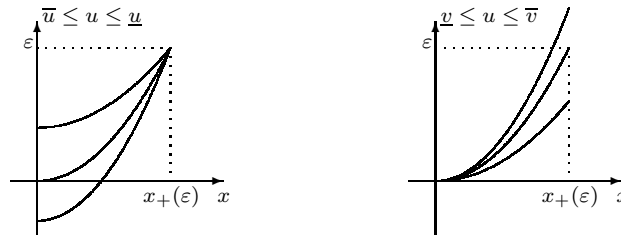


Fig. 3.22. A sinistra: grafico delle funzioni $\bar{u}(x) \leq u(x) \leq \underline{u}(x)$. A destra: grafico delle funzioni $\underline{v}(x) \leq u(x) \leq \bar{v}(x)$.

Si dimostra che $\bar{u}(x) \leq u(x) \leq \underline{u}(x)$. In primo luogo si ricorda che ε è stato scelto così piccolo che nell'intervallo $[0, x_+(\varepsilon)]$ la funzione u non ha flessi. Da ciò, dalla continuità di u'' e dal fatto che $u''(0) > 0$ segue che $u''(x) > 0$ in $[0, x_+(\varepsilon)]$; di conseguenza, in virtù delle proprietà elementari degli integrali definiti, si ha che $0 \leq \underline{A} \leq u''(s) \leq \overline{A}$ per ogni $s \in [0, x_+(\varepsilon)]$ implica

$$\int_0^r \underline{A} ds \leq \int_0^r u''(s) ds \leq \int_0^r \overline{A} ds \quad \forall r \in [0, x_+(\varepsilon)]$$

Quindi, ricordando che $u'(0) = 0$, si ha

$$0 \leq \underline{A}r \leq u'(r) \leq \overline{A}r \quad \forall r \in [0, x_+(\varepsilon)]$$

Integrando, ora, tra 0 e $x \in [0, x_+(\varepsilon)]$ si perviene alla seguente disuguaglianza, si veda anche il grafico a destra in figura 3.22,

$$\underline{v}(x) := \frac{1}{2}\underline{A}x^2 \leq u(x) \leq \frac{1}{2}\overline{A}x^2 =: \bar{v}(x) \quad \forall x \in [0, x_+(\varepsilon)]$$

In particolare, ricordando che $u(x_+(\varepsilon)) = \varepsilon$, dalle disuguaglianze precedenti segue che

$$\varepsilon - \frac{1}{2}\overline{A}x_+^2 \leq 0 \leq \varepsilon - \frac{1}{2}\underline{A}x_+^2$$

Si osserva, ora, che la funzione \bar{u} viene ottenuta traslando verso il basso “rigidamente” la funzione \bar{v} della quantità positiva $\overline{A}x_+^2/2 - \varepsilon$, quindi per dimostrare che $\bar{u}(x) \leq u(x)$ in $[0, x_+(\varepsilon)]$ è sufficiente provare che $\bar{v}(x) - u(x) \leq \overline{A}x_+^2/2 - \varepsilon$ nello stesso intervallo; per riconoscere che $u(x) \leq \underline{u}(x)$ in $[0, x_+(\varepsilon)]$ si procede in modo analogo. Si considera, allora, la funzione $h(x) = \bar{v}(x) - u(x)$ e si osserva che $h'(x) = \bar{v}'(x) - u'(x) \geq 0$ implica che h è crescente nell'intervallo $[0, x_+(\varepsilon)]$, allora

$$h(x) \leq h(x_+(\varepsilon)) = \bar{v}(x_+(\varepsilon)) - u(x_+(\varepsilon)) = \frac{1}{2}\overline{A}x_+^2 - \varepsilon$$

Esercizio 3.1. Si consideri il sistema meccanico unidimensionale

$$\ddot{x} + \frac{du}{dx}(x) = 0 \quad \text{con} \quad u(x) = \frac{1}{x^6} - \frac{1}{x^4} \quad (3.6)$$

$x \in \mathbb{R}$ e il sistema dinamico planare equivalente ottenuto introducendo le variabili $q = x$ e $p = \dot{x}$. Si risponda ai seguenti quesiti: 1. si scriva il principio di conservazione dell'energia. 2. Si studi la funzione energia potenziale e si determinino i punti di equilibrio stabile e instabile. 3. Si discutano qualitativamente le soluzioni della (3.6) al variare dell'energia totale del sistema. 4. Si determini l'insieme Π dei dati iniziali che generano orbite periodiche. 5. Si dimostri che il dato iniziale $P_0 = (\sqrt{2}, 0)$ genera un'orbita periodica. Si scriva il periodo di tale orbita come integrale definito.

Soluzione: l'equazione (3.6) descrive il moto di una palla di massa $m = 1$ sottoposta all'azione della forza $f(x) = -du(x)/dx = -(4x^2 - 6)/x^7$.

1. Sia $e \in \mathbb{R}$ il principio di conservazione dell'energia si scrive

$$h(q, p) := \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{q^6} - \frac{1}{q^4} = e \quad (3.7)$$

2. La funzione $u(q)$ è definita su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ed è pari (simmetrica nello scambio $q \rightarrow -q$). Zeri della funzione: $q_1 = -1$ e $q_2 = +1$. Segno della funzione: $u(q) \geq 0$ se e solo se $-1 \leq q \leq +1$ e $q \neq 0$. Derivata: $u'(q) = (4q^2 - 6)/q^7$. Punti estremali: $q_3 = -\sqrt{3/2}$ e $q_4 = \sqrt{3/2}$; q_1 e q_5 sono punti di minimo. Si osserva che $q_3 < q_1 < q_2 < q_4$. Valore assunto dalla funzione negli estremali: $u_0 := u(q_3) = u(q_4) = -4/27$. Infine osservo che $\lim_{q \rightarrow \pm\infty} u(q) = 0$. Si ottiene quindi il grafico in figura 3.23. Si osserva che q_3 e q_4 sono punti di equilibrio stabile.

3. Descrizione qualitativa delle soluzioni della (3.6). Considero i seguenti intervalli di energia.

- $e < u_0$: u_0 è il minimo assoluto della funzione $u(q)$, quindi per ogni $q \in \mathbb{R}$ si ha $e - u(q) < 0$. Non esiste moto, $\mathcal{I}_e = \emptyset$.
- $e = u_0$: i punti q_3 e q_4 sono gli unici punti tali che $e - u(q) \geq 0$, allora $\mathcal{I}_e = \{q_3, q_4\}$. La curva di livello è costituita da due punti: $\Gamma_e = \{(q_3, 0), (q_4, 0)\}$. Le uniche soluzioni di (3.6) sono i punti di equilibrio stabile $q(t) = q_3$ e $q(t) = q_4$.
- $u_0 < e < 0$: denoto con $q_1^e < q_2^e < q_3^e < q_4^e$ le quattro soluzioni dell'equazione $e - u(q) = 0$. L'insieme dei punti accessibili al moto è $\mathcal{I}_e = [q_1^e, q_2^e] \cup [q_3^e, q_4^e]$. La curva di livello, $\Gamma_e = \{(q, p) \in \mathbb{R}^2 : q_1^e \leq q \leq q_2^e, p = \pm\sqrt{2(e - u(q))}\} \cup \{(q, p) \in \mathbb{R}^2 : q_3^e \leq q \leq q_4^e, p = \pm\sqrt{2(e - u(q))}\}$, consta di due curve chiuse e regolari, disgiunte e contenenti nel loro interno rispettivamente i punti $(q_3, 0)$ e $(q_4, 0)$. Su ognuna delle componenti connesse di Γ_e giace un'orbita periodica. L'orbita che ruota attorno a $(q_3, 0)$ ha q_1^e e q_2^e come punti di inversione. L'orbita che ruota attorno a $(q_4, 0)$ ha q_3^e e q_4^e come punti di inversione.
- $e = 0$: $q_1 = -1$ e $q_2 = +1$ sono le due soluzioni dell'equazione $e - u(q) = 0$ ($u(q) = 0$). L'insieme dei punti accessibili al moto è $\mathcal{I}_e = (-\infty, q_1] \cup [q_2, \infty)$. La curva di livello consta di due componenti aperte e disgiunte: $\Gamma_e = \Gamma_e^1 \cup \Gamma_e^2$ ove $\Gamma_e^1 = \{(q, p) \in \mathbb{R}^2 : q < q_1, p = \pm\sqrt{2(e - u(q))}\}$ e $\Gamma_e^2 = \{(q, p) \in \mathbb{R}^2 : q \geq q_2, p = \pm\sqrt{2(e - u(q))}\}$. Su Γ_e^1 e Γ_e^2 giacciono due orbite asintotiche omocline rispettivamente a $(-\infty, 0)$ e $(+\infty, 0)$. Si osserva che le particelle si avvicinano all'infinito con velocità nulla, infatti $p = \pm\sqrt{2[e - u(q)]} = \pm\sqrt{-2u(q)} \rightarrow 0$ nel limite $q \rightarrow \pm\infty$. In altri termini: le curve di livello si avvicinano asintoticamente a zero.
- $e > 0$: denoto con q_1^e e q_2^e le due soluzioni dell'equazione $e - u(q) = 0$. L'insieme dei punti accessibili al moto è $\mathcal{I}_e = (-\infty, q_1^e] \cup [q_2^e, \infty)$. La curva di livello consta di due componenti aperte e disgiunte: $\Gamma_e = \Gamma_e^1 \cup \Gamma_e^2$ ove $\Gamma_e^1 = \{(q, p) \in \mathbb{R}^2 : q < q_1^e, p = \pm\sqrt{2(e - u(q))}\}$ e $\Gamma_e^2 = \{(q, p) \in \mathbb{R}^2 : q \geq q_2^e, p = \pm\sqrt{2(e - u(q))}\}$. Su Γ_e^1 e Γ_e^2 giacciono due orbite asintotiche rispettivamente a $+\infty$ e $-\infty$. Si osserva che le particelle si avvicinano all'infinito con velocità finita, infatti $p = \pm\sqrt{2[e - u(q)]} \rightarrow \pm\sqrt{2e}$ nel limite $q \rightarrow \pm\infty$. In altri termini: le curve di livello hanno un asintoto orizzontale.

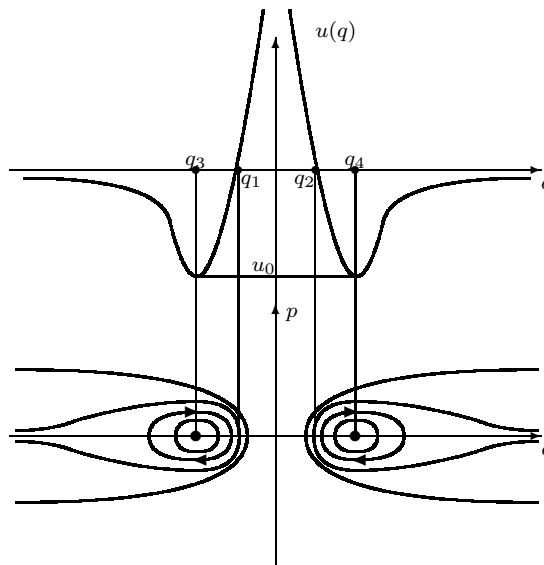


Fig. 3.23. Grafico dell'energia potenziale e curve di livello. I versi di percorrenza sono gli stessi su tutte le curve di livello.

4. L'insieme dei dati iniziali che generano orbite periodiche è

$$\Pi = \{(q_0, p_0) \in \mathbb{R}^2 : u_0 < h(q_0, p_0) = \frac{1}{2}(p_0)^2 + u(q_0) < 0\}$$

5. Considero il punto $P_0 = (\sqrt{2}, 0)$ e osservo che $h(P_0) = 0^2/2 + u(\sqrt{2}) = -1/8$. Pertanto i risultati del punto precedente e l'osservazione $u_0 < -1/8 < 0$ implicano che il punto P_0 origina un'orbita periodica. Risolvendo l'equazione $u(q) = -1/8$ si ottengono i punti di inversione del moto $\hat{q}_1 = \sqrt{\sqrt{5}-1} < \hat{q}_2 = \sqrt{2}$. Infatti, $u(q) = -1/8$ è equivalente a $q^6 - 8q^2 + 8 = 0$; da quest'ultima si ottiene $(q-2)^2(q^4 + 2q^2 - 4) = 0$ utilizzando il metodo di Ruffini oppure osservando che

$$\begin{aligned} q^6 - 8q^2 + 8 &= q^6 - 8q^2 + 16 - 8 = q^6 - 8 - 8(q^2 - 2) = (q^2 - 2)(q^4 + 2q^2 + 4) - 8(q^2 - 2) \\ &= (q^2 - 2)(q^4 + 2q^2 + 4 - 8) = (q^2 - 2)(q^4 + 2q^2 - 4) \end{aligned}$$

Infine si ottengono le soluzioni \hat{q}_1 e \hat{q}_2 . Dall'equazione $dq/dt = \sqrt{2[e - u(q)]}$ si ottiene

$$\int_0^{T/2} dt = \int_{\sqrt{\sqrt{5}-1}}^{\sqrt{2}} \frac{dq}{\sqrt{2 \left[\frac{1}{q^4} - \frac{1}{q^2} - \frac{1}{8} \right]}} \Rightarrow T = 4 \int_{\sqrt{\sqrt{5}-1}}^{\sqrt{2}} \frac{q^3 dq}{\sqrt{-q^6 + 8q^2 - 8}}$$

Esercizio 3.2. Si consideri il sistema meccanico unidimensionale

$$\ddot{x} + \frac{du}{dx}(x) = 0 \quad \text{con} \quad u(x) = 1 - \cos x \quad \text{e} \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \quad (3.8)$$

Si dimostra che se la particella ha energia totale $e = 1$ allora esiste un'orbita periodica con punti di inversione $x_1 = -\pi/2$ e $x_2 = \pi/2$: se ne scriva il periodo come integrale definito e se ne dia una stima.

Soluzione: dal principio di conservazione dell'energia si ottiene $\dot{x} = \pm \sqrt{2[e - u(x)]}$. Pertanto, lungo l'orbita con energia $e = 1$, si ha $\dot{x} = \pm \sqrt{2 \cos x}$. Integrando la precedente si ottiene

$$\int_0^{T/2} dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{2 \cos x}} \Rightarrow \frac{T}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{\cos x}} \Rightarrow T = 2\sqrt{2} \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{\cos x}}$$

ove nell'ultima implicazione si è utilizzata la parità della funzione coseno. Per stimare l'integrale possiamo riscriverlo utilizzando le formule parametriche $\cos x = (1 - \tan^2(x/2))/(1 + \tan^2(x/2))$:

$$T = 2\sqrt{2} \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{\cos x}} = 2\sqrt{2} \int_0^{\pi/2} dx \sqrt{\frac{1 + \tan^2(x/2)}{1 - \tan^2(x/2)}} = 4\sqrt{2} \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{(1+s^2)(1-s^2)}}$$

con l'ultimo integrale ottenuto per mezzo della sostituzione $s = \tan(x/2)$. A questo punto si può osservare che nell'intervallo $0 \leq s \leq 1$ si ha $1 \leq 1 + s^2 \leq 2$, quindi si ottengono le stime

$$T_- := 4\sqrt{2} \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{2(1-s^2)}} \leq T \leq 4\sqrt{2} \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}} =: T_+$$

e quindi $T_- = 2\pi$ e $T_+ = 2\sqrt{2}\pi$. Infine, posto $T_M := (T_- + T_+)/2 = \pi(1 + \sqrt{2})$ e $\Delta T := T_+ - T_- = 2\pi(\sqrt{2} - 1)$ si ha l'errore relativo:

$$\frac{\Delta T}{T_M} = \frac{2\pi(\sqrt{2} - 1)}{\pi(\sqrt{2} + 1)} = 0.343$$

È possibile stimare dall'alto il periodo in modo alternativo agendo sull'integrale di partenza: nell'intervallo $0 \leq x \leq \pi/2$ si ha $\cos x \geq 1 - 2x/\pi$. Si ottiene la nuova stima

$$T'_+ = 2\sqrt{2} \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - 2x/\pi}} = 2\frac{\pi}{2}\sqrt{2} \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{1-s}} = 2\pi\sqrt{2}$$

Si ha $T'_+ = \sqrt{2}T_+$, la nuova stima è decisamente peggiore della precedente.

Esercizio 3.3. Si consideri il sistema meccanico unidimensionale $\ddot{x} + du/dx = 0$ con $u(x)$ di classe C^1 su \mathbb{R} e il sistema dinamico equivalente ottenuto mediante l'introduzione della variabili $q = x$ e $p = \dot{x}$.
 1. Sia $q_0 \in \mathbb{R}$ tale che la curva di livello con energia $u_0 := u(q_0)$ è chiusa, regolare e definita in $[q_0, q_1]$ per $q_1 > q_0$ opportuno. Si studi il comportamento della curva di livello in un intorno di q_0 .
 2. Sia q_0 un punto di massimo relativo per $u(q)$. Si studi il comportamento della separatrice in un intorno di q_0 (si veda anche la discussione del sistema (3.2)).

Soluzione: 1. dal principio di conservazione dell'energia si ha che l'equazione dell'arco di curva di livello nel semipiano $p \geq 0$ è $p = \sqrt{2[u_0 - u(q)]}$. Pongo $P(q) = 2[u_0 - u(q)]$ e osservo che

- $P'(q) = -2u'(q)$.
-] $P(q_0) = 0$ e $P'(q_0) \neq 0$,

infatti $u(q_0) = u_0$ e q_0 non è un punto estremale di $u(q)$. Scrivo lo sviluppo in serie di Taylor di $P(q)$ in un intorno destro di q_0 :

$$P(q) = P(q_0) + P'(q_0)(q - q_0) + \frac{1}{2!}P''(q_0)(q - q_0)^2 + O((q - q_0)^3) \quad (3.9)$$

Poiché la derivata prima della funzione $P(q)$ non si annulla in q_0 posso arrestare lo sviluppo al primo ordine e scrivere

$$\begin{aligned} P(q) &= P'(q_0)(q - q_0) + O((q - q_0)^2) = P'(q_0)(q - q_0) \left[1 + \frac{O((q - q_0)^2)}{P'(q_0)(q - q_0)} \right] \\ &= P'(q_0)(q - q_0) [1 + O(q - q_0)] \end{aligned}$$

Quindi per la curva di livello ottengo:

$$p = \sqrt{P(q)} = \sqrt{P'(q_0)(q - q_0) [1 + O(q - q_0)]} = \sqrt{P'(q_0)}(q - q_0)^{1/2} [1 + O(q - q_0)]$$

Conclusione: la curva di livello in un intorno piccolo di q_0 è ben approssimata dalla radice quadrata di $q - q_0$ (si veda la Fig 3.24(a)), in particolare ha tangente verticale.

2. Lo studio procede come al punto precedente, ma in questo caso $P'(q_0) = 0$ perché q_0 è un punto di massimo per il potenziale $u(q)$. Allora non ha senso arrestare lo sviluppo (3.9) al primo ordine, devo considerare le derivate successive. Alcuni casi:

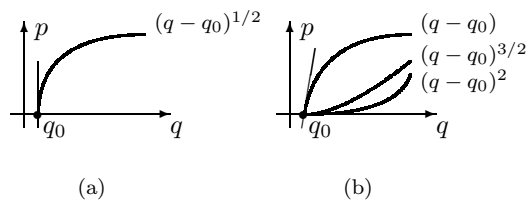


Fig. 3.24. Comportamento asintotico di una curva di livello (a) e di una separatrice (b).

- se $P''(q_0) \neq 0$, allora arresto lo sviluppo al secondo ordine e ottengo

$$P(q) = \frac{1}{2!}P''(q_0)(q - q_0)^2 [1 + O(q - q_0)] \Rightarrow p = \sqrt{\frac{1}{2!}P''(q_0)(q - q_0) [1 + O(q - q_0)]}$$

La separatrice è ben approssimata da una retta di pendenza $\sqrt{P''(q_0)/2!}$ in un intorno piccolo di q_0 (si veda la figura 3.24(b)).

- Se $P''(q_0) = 0$ e $P'''(q_0) \neq 0$, allora arresto lo sviluppo al terzo ordine e ottengo

$$P(q) = \frac{1}{3!}P'''(q_0)(q - q_0)^3 [1 + O(q - q_0)] \Rightarrow p = \sqrt{\frac{1}{3!}P'''(q_0)(q - q_0)^{3/2} [1 + O(q - q_0)]}$$

La separatrice è ben approssimata dalla curva $\sqrt{P'''(q_0)/3!}(q - q_0)^{3/2}$ in un intorno piccolo di q_0 . La separatrice ha tangente orizzontale (si veda la figura 3.24(b)).

- Se $P''(q_0) = P'''(q_0) = 0$ e $P''''(q_0) \neq 0$, allora arresto lo sviluppo al quarto ordine e ottengo

$$P(q) = \frac{1}{4!}P''''(q_0)(q - q_0)^4 [1 + O(q - q_0)] \Rightarrow p = \sqrt{\frac{1}{4!}P''''(q_0)(q - q_0)^2 [1 + O(q - q_0)]}$$

La separatrice è ben approssimata dalla parabola $\sqrt{P''''(q_0)/4!}(q - q_0)^2$ in un intorno piccolo di q_0 . La separatrice ha tangente orizzontale (si veda la figura 3.24(b)).

Esercizio 3.4. Una particella di massa $m = 1$ si muove lungo la semiretta $x \geq 0$ ed è sottoposta all'azione della forza elastica $-k^3x$ e della repulsione elettrostatica a^3/x^2 , con $k, a \in \mathbb{R}_+$. L'equazione del moto risultante è

$$\ddot{x} = -k^3x + \frac{a^3}{x^2}$$

Si scriva il sistema dinamico planare che descrive il moto della particella, si determinino i punti fissi, si determini l'energia meccanica totale e si dimostri che è un integrale primo del sistema dinamico; si disegni il ritratto di fase e si discuta la possibilità di moti periodici.

Esercizio 3.5. Si consideri il sistema meccanico conservativo $\ddot{x} = -u'(x)$ con la funzione energia potenziale data da

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} u(x) = x^3 - x^2 & \text{(b)} u(x) = x^6/18 - x^4/3 + x^2/2 \\ \text{(c)} u(x) = x^2(1 - x)(3 - x) & \text{(d)} u(x) = x^4 - \lambda x^2 \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ \text{(e)} u(x) = x^3 e^{-x^2} & \text{(f)} u(x) = x^4 e^{-x^2} \end{array}$$

Si determinino i punti fissi, se ne studi la stabilità e si disegni il ritratto di fase. Si risponda, inoltre, alle seguenti domande. (a) Si verifichi che sulla curva di livello corrispondente al valore $e = 1/8$ dell'energia si svolge un moto periodico; se ne stimi il periodo. Si trovi la legge oraria del moto con dato iniziale $x(0) = 1$ e $\dot{x}(0) = 0$. (b) Si dimostri che se al sistema meccanico si aggiunge la forza $-x$ allora l'origine risulta un punto d'equilibrio asintoticamente stabile; si dia una stima del suo bacino d'attrazione. (c) Si

verifichi che la traiettoria con dato iniziale $x(0) = 1$ e $\dot{x}(0) = 0$ è periodica e se ne stimi il periodo. (d) Si determini il ritratto di fase al variare del parametro λ .

Esercizio 3.6. Una particella di massa uno è vincolata a muoversi lungo l'asse x ed è sottoposta alle forze

$$f_1(x) = 2xe^{-x^2} \quad \text{e} \quad f_2(x) = -kx$$

con $k > 0$, entrambe hanno centro nell'origine, f_1 è repulsiva e f_2 attrattiva. Si determinino i punti di equilibrio al variare del parametro $k > 0$ e se ne studi la stabilità. Si disegni il ritratto di fase per $k = 1/2$ e si dica in corrispondenza di quali dati iniziali, se esistono, il sistema esibisce orbite non periodiche.

Esercizio 3.7. Un elettrone di massa uno si muove in un cristallo periodico sotto l'effetto di una forza periodica conservativa di energia potenziale $u(x) = \sin^2 x$. Si disegni il ritratto di fase del sistema e si dica per quali valori dell'energia esistono orbite periodiche. Si determinino i punti fissi e se ne studi la stabilità. Si descriva il moto dell'elettrone in corrispondenza delle seguenti tre condizioni iniziali: posizione iniziale $x_0 = 3\pi/4$ e velocità iniziale $v_0 = 0, 1, 2$. Nel caso $x_0 = 3\pi/4$ e $v_0 = 0$ si esprima il periodo delle oscillazioni come integrale definito e si stimi nel modo più semplice possibile il periodo delle oscillazioni.

3.5. Moti centrali

Si consideri una particella di massa μ che si muove in \mathbb{R}^3 sottoposta all'azione di una forza conservativa $\vec{f}(\vec{r})$, con $\vec{r} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, derivante da un potenziale centrale $u(r)$, con $r = |\vec{r}|$. L'equazione del moto si scrive:

$$\mu \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{f}(r) \quad \text{ove} \quad \vec{f}(r) = -\nabla u(r) = -\frac{d}{dr} u(r) \quad (3.10)$$

Si dimostra che il momento angolare della particella $\vec{L} := \mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}}$ è una costante del moto. Il moto è quindi planare e si svolge in un piano ortogonale a \vec{L} e passante per l'origine. Se su questo piano si definiscono le coordinate polari ρ e θ , allora si ha che le equazioni del moto assumono la forma

$$\mu \ddot{\rho} = -\frac{d}{d\rho} u_{\text{eff}}(\rho) \quad \text{e} \quad \dot{\theta} = \frac{L}{\mu \rho^2} \quad (3.11)$$

ove $L \in \mathbb{R}$ è la componente del momento angolare lungo l'asse ortogonale al piano su cui si svolge il moto e u_{eff} è il potenziale efficace

$$u_{\text{eff}}(\rho) := u(\rho) + \frac{L^2}{2\mu \rho^2} \quad (3.12)$$

Alcuni commenti:

- il moto radiale della particella è stato ricondotto al moto unidimensionale di una particella di massa μ sottoposta all'azione di una forza derivante dal potenziale u_{eff} .
- Il moto angolare è integrabile se è nota la soluzione dell'equazione radiale; formalmente

$$\theta(t) = \theta(0) + \int_0^t ds \frac{L}{\mu \rho^2(s)}$$

Si può osservare che $\dot{\theta}$ ha segno definito e uguale a quello di L , quindi la particella ruota attorno all'origine sempre nello stesso verso.

- Se $L \neq 0$, l'equazione dell'orbita $\rho = \rho(\theta)$ è soluzione delle due seguenti equazioni differenziali, note rispettivamente come prima e seconda forma dell'orbita:

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \pm \frac{\mu\rho^2}{L} \sqrt{\frac{2}{\mu} [e - u_{\text{eff}}(\rho)]} \quad \text{e} \quad \frac{d^2u}{d\theta^2} = -\frac{\mu}{L^2} \frac{d}{du} \left[u_{\text{eff}} \left(\frac{1}{u} \right) \right] \quad (3.13)$$

ove $u = 1/\rho$.

Esercizio 3.8. Si consideri una particella di massa μ sottoposta all'azione di una forza centrale di potenziale

$$u(r) = \frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{6}r^6 \quad (3.14)$$

1. Si scrivano le equazioni del moto e il principio di conservazione dell'energia.
2. Si disegni il grafico del potenziale efficace.
3. Si discuta qualitativamente il moto della particella e si dimostri che se il momento angolare L è abbastanza piccolo allora esistono due moti circolari uniformi. Se ne determinino i periodi T_1 e $T_2 < T_1$.
4. Sia ρ_1 il raggio dell'orbita con periodo T_1 . Si studi il moto della particella con momento angolare L posta in $\rho(0) = \rho_1$ con velocità radiale iniziale $\dot{r}(0) = \sqrt{2\varepsilon/\mu}$, con $\varepsilon > 0$ piccolo.
5. Si ponga e si studi il problema analogo al caso 4 per l'orbita di periodo T_2 .

Soluzione: 1. il moto su un piano ortogonale a \vec{L} viene descritto in termini delle coordinate polari ρ e θ . Si considera il potenziale efficace

$$u_{\text{eff}}(\rho) = u(\rho) + \frac{L^2}{2\mu\rho^2} = \frac{1}{2}\rho^2 - \frac{1}{6}\rho^6 + \frac{L^2}{2\mu\rho^2} \quad (3.15)$$

Usando (3.11) si ottengono le equazioni del moto:

$$\mu\ddot{\rho} = -\rho + \rho^5 + \frac{L^2}{\mu\rho^3} \quad \text{e} \quad \dot{\theta} = \frac{L}{\mu\rho^2} \quad (3.16)$$

Sia $e \in \mathbb{R}$, il principio di conservazione dell'energia si scrive come segue:

$$e = \frac{1}{2\mu}\dot{\rho}^2 + u_{\text{eff}} = \frac{1}{2\mu}\dot{\rho}^2 + \frac{1}{2}\rho^2 - \frac{1}{6}\rho^6 + \frac{L^2}{2\mu\rho^2} \quad (3.17)$$

2. Studio la funzione potenziale efficace: osservo che $\lim_{\rho \rightarrow \infty} u_{\text{eff}}(\rho) = -\infty$ e $\lim_{\rho \rightarrow 0} u_{\text{eff}}(\rho) = +\infty$. Calcolo la derivata prima: $u'_{\text{eff}} = \rho - \rho^5 - L^2/\mu\rho^3$. L'equazione $u'_{\text{eff}} = 0$ non ha soluzioni reali se $L^2 > \mu/4$, mentre ne ha due distinte

$$0 < \rho_1 = \sqrt[4]{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{L^2}{\mu}}} < \rho_2 = \sqrt[4]{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{L^2}{\mu}}}$$

nel caso $L^2 < \mu/4$. Il caso $L^2 > \mu/4$ è semplice, studio in dettaglio il caso interessante $L^2 < \mu/4$. I punti estremali ρ_1 e ρ_2 sono rispettivamente un punto di minimo e di massimo. Si pone $u_1 := u_{\text{eff}}(\rho_1)$, $u_2 := u_{\text{eff}}(\rho_2)$ e si trova

$$0 < u_1 = \frac{1}{6\mu\rho_1^2} \left[\mu + 4L^2 - \sqrt{\mu(\mu - 4L^2)} \right] < u_2 = \frac{1}{6\mu\rho_2^2} \left[\mu + 4L^2 + \sqrt{\mu(\mu - 4L^2)} \right]$$

Il grafico del potenziale efficace è rappresentato in figura 3.25.

3. Descrizione qualitativa delle soluzioni delle equazioni (3.16). Studio l'equazione radiale e ottengo informazioni sul moto della palla μ . Considero i seguenti intervalli di energia:

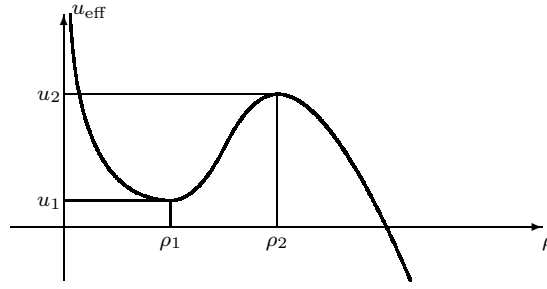


Fig. 3.25. Grafico del potenziale efficace.

- $e < u_1$: denoto con ρ^e la sola soluzione dell'equazione $e - u_{\text{eff}}(\rho) = 0$. Il moto è ammissibile nella regione $\rho \geq \rho^e$. Esiste un'orbita illimitata.
- $e = u_1$: le due soluzioni dell'equazione $e - u_{\text{eff}}(\rho) = 0$ sono ρ_1 e $\rho^e > \rho_1$. Il moto è ammissibile nella regione $\{\rho_1\} \cup [\rho^e, +\infty)$. Esiste un'orbita illimitata e un'orbita a distanza fissa dall'origine: $\rho(t) = \rho_1$. Quindi esiste un moto circolare. Per il moto circolare posso scrivere l'equazione radiale: $\dot{\theta} = L/(\mu\rho^2(t)) = L/(\mu\rho_1^2)$. Quindi la velocità angolare è costante: il moto è circolare uniforme. Infine, il periodo del moto è $T_1 = 2\pi/\dot{\theta} = 2\pi\mu\rho_1^2/L$.
- $u_1 < e < u_2$: denoto con $\rho_1^e < \rho_2^e < \rho_3^e$ le tre soluzioni dell'equazione $e - u_{\text{eff}}(\rho) = 0$. Il moto è ammissibile nella regione $[\rho_1^e, \rho_2^e] \cup [\rho_3^e, +\infty)$. Esiste un'orbita illimitata che si svolge nella regione $\rho \geq \rho_3^e$ e un'orbita limitata che si svolge nella corona circolare di raggio interno ρ_1^e e raggio esterno ρ_2^e .
- $e = u_2$: le due soluzioni dell'equazione $e - u_{\text{eff}}(\rho) = 0$ sono ρ_2 e $\rho^e < \rho_2$. Il moto è ammissibile nella regione $[\rho^e, +\infty)$. Esistono due orbite illimitate e asintotiche a ρ_2 , un'orbita limitata che si svolge nella corona circolare di raggi ρ^e e ρ_2 e che è asintotica a ρ_2 . Infine esiste un'orbita a distanza fissa dall'origine: $\rho(t) = \rho_2$. Quindi esiste un moto circolare. Per il moto circolare posso scrivere l'equazione radiale: $\dot{\theta} = L/(\mu\rho^2(t)) = L/(\mu\rho_2^2)$. Quindi la velocità angolare è costante: il moto è circolare uniforme. Infine, il periodo del moto è $T_2 = 2\pi/\dot{\theta} = 2\pi\mu\rho_2^2/L$.
- $e > u_2$: denoto con ρ^e la sola soluzione dell'equazione $e - u_{\text{eff}}(\rho) = 0$. Il moto è ammissibile nella regione $\rho \geq \rho^e$. Esiste un'orbita illimitata.

4. Fissato il momento angolare L della particella, l'orbita circolare uniforme $\rho(t) = \rho_1$ è ottenuta con una condizione iniziale $\rho(0) = \rho_1$, $\dot{\rho}(0) = 0$, $\dot{\theta}(0) = L/(\mu\rho_1^2)$ e $\theta(0)$ arbitrario (per esempio $\theta(0) = 0$). In altri termini la particella viene posta a distanza ρ_1 dall'origine e viene lanciata con velocità angolare $\dot{\theta}(0) = L/(\mu\rho_1^2)$ tangenzialmente alla circonferenza di raggio ρ_1 centrata nell'origine (figura 3.26a). Ora si considera la medesima condizione iniziale, ma con una piccola velocità radiale $\dot{\rho}(0) = \sqrt{2\varepsilon/\mu}$ (figura 3.26b). Osservo che l'energia radiale della particella è

$$e = \frac{1}{2}\mu\dot{\rho}^2(0) + u_{\text{eff}}(\rho_1) = u_1 + \varepsilon > u_1$$

quindi l'orbita non è circolare, ma si sviluppa all'interno di una corona circolare di raggi $\rho_1(\varepsilon) < \rho_2(\varepsilon)$. Mi pongo il problema di descrivere l'orbita della particella per piccoli valori di ε (al primo ordine in ε).

In primo luogo determino i due raggi $\rho_1(\varepsilon) < \rho_2(\varepsilon)$: devo risolvere l'equazione $e - u_{\text{eff}}(\rho) = 0$. Pongo $\rho = \rho_1 + \delta$ con $\delta \in \mathbb{R}$ piccolo e risolvo l'equazione sviluppandola al secondo ordine in δ .

$$e - u_{\text{eff}}(\rho_1 + \delta) = 0 \Rightarrow u_1 + \varepsilon - \frac{1}{2}(\rho_1 + \delta)^2 + \frac{1}{6}(\rho_1 + \delta)^6 - \frac{L^2}{2\mu\rho_1^2(1 + \frac{2\delta}{\rho_1} + \frac{\delta^2}{\rho_1^2})^2} = 0$$

Troncando lo sviluppo delle potenze dei binomi e della serie geometrica al secondo ordine in δ si ha:

$$u_1 + \varepsilon - \frac{1}{2}(\rho_1^2 + 2\delta\rho_1) + \frac{1}{6}(\rho_1^6 + 6\delta\rho_1^5) - \frac{L^2}{2\mu\rho_1^2} \left[1 - \left(\frac{2\delta}{\rho_1} + \frac{\delta^2}{\rho_1^2} \right) + \left(\frac{2\delta}{\rho_1} + \frac{\delta^2}{\rho_1^2} \right)^2 \right] = 0$$

Arrestando lo sviluppo del termine in parentesi quadre al secondo ordine in δ si ha:

$$u_1 + \varepsilon - \frac{1}{2}(\rho_1^2 + 2\delta\rho_1) + \frac{1}{6}(\rho_1^6 + 6\delta\rho_1^5) - \frac{L^2}{2\mu\rho_1^2} \left[1 - \frac{2\delta}{\rho_1} + \frac{3\delta^2}{\rho_1^2} \right] = 0$$

A questo punto si osserva che i termini non dipendenti da δ ricostruiscono $-u_{\text{eff}}(\rho_1) = -u_1$ e i coefficienti dei termini lineari in δ ricostruiscono $-u'_{\text{eff}}(\rho_1) = 0$, quindi l'equazione si semplifica notevolmente e si ottiene

$$\varepsilon - \frac{1}{2\mu\rho_1^4} \delta^2 (\mu\rho_1^4 - 5\mu\rho_1^8 + 3L^2) = 0 \Rightarrow \delta = \pm \sqrt{\frac{\varepsilon}{A}}$$

ove si è posto $A = (\mu\rho_1^4 - 5\mu\rho_1^8 + 3L^2)/2\mu\rho_1^4 > 0$. In conclusione se la particella con energia $u_1 + \varepsilon$ viene posta all'istante iniziale in $\rho(0) = \rho_1$, allora essa avrà un'orbita limitata che si svolge all'interno della corona circolare di raggi

$$\rho_1(\varepsilon) = \rho_1 - \sqrt{\frac{\varepsilon}{A}} < \rho_2(\varepsilon) = \rho_1 + \sqrt{\frac{\varepsilon}{A}}$$

Determinazione della legge oraria radiale al primo ordine in ε : devo integrare l'equazione che si ottiene dal principio di conservazione dell'energia $e = \mu\dot{\rho}^2/2 + u_{\text{eff}}(\rho)$. Poiché $\rho_1(\varepsilon) < \rho < \rho_2(\varepsilon)$ sviluppare l'equazione precedente al primo ordine in ε vuol dire arrestare lo sviluppo di $u_{\text{eff}}(\rho)$ in $\rho - \rho_1$ al secondo ordine. Quindi

$$u_{\text{eff}}(\rho) = u_{\text{eff}}(\rho_1) + u'_{\text{eff}}(\rho)(\rho - \rho_1) + \frac{1}{2}u''_{\text{eff}}(\rho_1)(\rho - \rho_1)^2 + O((\rho - \rho_1)^3) = u_1 + A(\rho - \rho_1)^2 + O((\rho - \rho_1)^3)$$

Sostituendo nel principio di conservazione dell'energia si ottiene l'equazione differenziale

$$\dot{\rho}^2 = \frac{2}{\mu} [\varepsilon - A(\rho - \rho_1)^2]$$

che può essere integrata con condizione iniziale $\rho(0) = \rho_1$ per ottenere

$$\rho(t) = \rho_1 + \sqrt{\frac{\varepsilon}{A}} \sin \left(\sqrt{\frac{2A}{\mu}} t \right)$$

Pertanto durante la rivoluzione attorno all'origine, la particella compie radialmente oscillazioni di periodo $T_{\text{osc}} = 2\pi\sqrt{\mu/2A}$ e ampiezza $\sqrt{\varepsilon/A}$. È interessante osservare che se il periodo di rivoluzione viene approssimato con T_1 allora

$$\frac{T_{\text{osc}}}{T_{\text{riv}}} \simeq \sqrt{\frac{L^2}{\mu\rho_1^4 - 5\mu\rho_1^8 + 3L^2}}$$

che è una funzione strettamente crescente da $1/2$ a $+\infty$ nell'intervallo $0 \leq L < \sqrt{\mu/4}$. quindi il periodo di oscillazione è la metà di quello di rivoluzione per $L \rightarrow 0$, mentre è molto maggior di quello di rivoluzione per L grande. In altri termini: la nuova condizione iniziale perturba poco il moto circolare uniforme se L è grande, mentre lo perturba pesantemente se L è piccolo.

5. Fissato il momento angolare $L \neq 0$ considero la condizione iniziale $\rho(0) = \rho_2$, $\dot{\theta}(0) = L/\mu\rho_2^2$ e $\dot{\rho}(0) = \sqrt{2\varepsilon/\mu}$. Si verifica facilmente che l'energia totale radiale è $e = u_2 + \varepsilon$. Allora l'orbita della particella è illimitata e la particella si allontana indefinitamente da $\rho(0) = \rho_1$. È possibile stimare in modo molto "rozzo" la legge oraria radiale:

$$e = \frac{1}{2}\mu\dot{\rho}^2 + u_{\text{eff}}(\rho) \Rightarrow \dot{\rho}^2 = \frac{2}{\mu} [e - u_{\text{eff}}(\rho)] = \frac{2}{\mu} [u_2 + \varepsilon - u_{\text{eff}}(\rho)] \geq \frac{2}{\mu} [u_2 + \varepsilon - u_{\text{eff}}(\rho_2)] = \frac{2\varepsilon}{\mu} ,$$

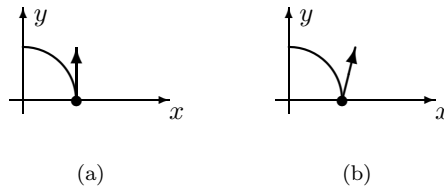


Fig. 3.26. Condizioni iniziali: (a) per l'orbita circolare; (b) per una piccola deviazione dall'orbita circolare.

da cui si ottiene $\rho(t) \geq \rho_1 + \sqrt{2\varepsilon/\mu t}$.

Esercizio 3.9. Si consideri una particella di massa μ sottoposta all'azione di una forza centrale di potenziale

$$u(r) = \kappa r^2 + \frac{\alpha}{r^2} \quad (3.18)$$

con $\kappa > 0$. 1. Si scrivano le equazioni del moto e il principio di conservazione dell'energia. 2. Si disegni il grafico del potenziale efficace nel caso $\gamma := 1 + 2\mu\alpha/L^2 > 0$. 3. Si discuta qualitativamente il moto della particella e si dimostri che esiste un moto circolare uniforme di raggio ρ_0 . Se ne determini il periodo T_0 . 4. Sia $u_0 = u_{\text{eff}}(\rho_0)$: si scriva l'equazione dell'orbita per moti con energia $e > u_0$. 5. Si dica per quali valori di α l'orbita determinata al punto 4 è chiusa.

Soluzione: si veda la soluzione di [4] per il moto armonico in tre dimensioni.

4. Introduzione alle equazioni alle derivate parziali

Dallo studio della meccanica dei sistemi è noto che il modello che descrive il comportamento fisico di un sistema di molte particelle viene definito introducendo un numero di variabili uguale al numero di gradi di libertà del sistema. Queste variabili sono dette *coordinate lagrangiane* e permettono di individuare in modo univoco la posizione di tutte le particelle che costituiscono il sistema rispetto al riferimento relativamente al quale si studia il moto. Le coordinate lagrangiane vengono pensate come funzioni del tempo e la conoscenza di tali funzioni permette di seguire il sistema durante il suo moto istante per istante, cioè permette di stabilire a ogni istante la posizione di ciascuna particella, la sua velocità e, più in generale, il valore di una qualsiasi *osservabile fisica* associata al sistema. Dal punto di vista fisico un'osservabile è una grandezza caratteristica del sistema che può essere misurata sperimentalmente, nel modello matematico che descrive il sistema un'osservabile è una qualsiasi funzione delle coordinate lagrangiane; ovviamente sarà utile studiare l'andamento di quelle osservabili che hanno un'interessante interpretazione fisica.

Nel contesto della meccanica dei sistemi discreti le variabili di posizione, ovvero le coordinate lagrangiane, e la variabile temporale giocano ruoli diversi; le une vengono sempre pensate come funzione dell'altra. Più precisamente dette q_i le coordinate lagrangiane e detta t la variabile temporale il problema consiste nel determinare le funzioni $q_i(t)$ soluzioni delle equazioni del moto e soddisfacenti opportune condizioni iniziali. Vi sono problemi fisici, d'altro canto, che non possono essere schematizzati con un modello di questo tipo; si pensi, per esempio, al problema dell'elettromagnetismo. In questo contesto si immagina di avere una distribuzione di carica e di corrente assegnata in tutto lo spazio e nota in ogni istante; in altri termini si pensa alla variabile spaziale $q \in \mathbb{R}^3$ come a un'etichetta che, assieme alla variabile temporale $t \in \mathbb{R}$, individua una posizione e un istante in cui si

deve specificare il valore della carica e quello della corrente. In questo caso la posizione e il tempo giocano lo stesso ruolo, individuano un punto dello *spazio-tempo* $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ in cui va assegnato il valore di una funzione di quattro variabili. Più precisamente si suppongono note la funzione *densità di carica* $\varrho : (q, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \varrho(q, t) \in \mathbb{R}$ e la funzione *densità di corrente* $j : (q, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow j(q, t) \in \mathbb{R}^3$ e si scrivono le equazioni che descrivono l'evoluzione delle osservabili fisiche, cioè del *campo elettrico* $E : (q, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow E(q, t) \in \mathbb{R}^3$ e del *campo magnetico* $B : (q, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow B(q, t) \in \mathbb{R}^3$. Le equazioni del modello elettromagnetico sono le celebri *equazioni di Maxwell*

$$\operatorname{div} E = \frac{\varrho}{\varepsilon_0}, \quad \operatorname{rot} E = -\frac{\partial B}{\partial t}, \quad \operatorname{div} B = 0 \quad \text{e} \quad \operatorname{rot} B = -\mu_0 j + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E}{\partial t} \quad (4.1)$$

note rispettivamente come legge di Gauss per il campo elettrico, legge di Farady–Henry, legge di Gauss per il campo magnetico e legge di Ampère–Maxwell.

Le equazioni precedenti definiscono il modello matematico dell'elettromagnetismo e descrivono l'evoluzione dei campi E e B . Essendo equazioni differenziali per funzioni di più variabili devono necessariamente essere espresse in termini delle *derivate parziali* dei campi. Per esempio scrivendo in modo esplicito la legge di Gauss per il campo elettrico si trova

$$\frac{\partial E_x}{\partial x}(q, t) + \frac{\partial E_y}{\partial y}(q, t) + \frac{\partial E_z}{\partial z}(q, t) = \frac{1}{\varepsilon_0} \varrho(q, t)$$

dove si è posto $E = (E_x, E_y, E_z)$ e $q = (x, y, z)$. In generale un'**equazione differenziale alle derivate parziali** (PDE) di ordine k per la funzione $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è un'equazione della forma

$$F\left(x; \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}; \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}; \frac{\partial^k u}{\partial x_1^k}, \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k-1} \partial x_2}, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial x_n^k}\right) = 0 \quad (4.2)$$

dove si è posto $x = (x_1, \dots, x_n)$; si noti la presenza di tutte le derivate miste. In questo capitolo si discutono alcuni problemi fisici per i quali si può costruire un modello matematico in termini di equazioni differenziali alle derivate parziali.

4.1. Equazione di continuità per un fluido

Un fluido occupa il volume contenuto all'interno della regione $G \subset \mathbb{R}^3$; si indica con $u(q, t)$ la *densità di massa* del fluido nel punto $q = (x, y, z) \in G$ all'istante $t \in \mathbb{R}$. Sulla base del solo *principio di conservazione della massa* è possibile mostrare che la funzione u soddisfa all'**equazione di continuità**

$$\frac{\partial u}{\partial t}(q, t) + \operatorname{div}[u(q, t)v(q, t)] = 0 \quad (4.3)$$

dove la funzione vettoriale $v : (q, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow v(q, t) \in \mathbb{R}^3$, detta *campo delle velocità*, rappresenta la velocità all'istante t del volumetto infinitesimo di fluido centrato in q .

Sia $\Omega \subset G$ una regione chiusa e limitata la cui frontiera $\partial\Omega$ è una superficie regolare; sia $d\sigma$ una porzione infinitesima di $\partial\Omega$ centrata in $q \in \partial\Omega$, la massa che attraversa l'area

$d\sigma$ per unità di tempo nel verso specificato dalla normale esterna $\nu(q)$ a $\partial\Omega$ in q è pari alla massa contenuta nel cilindretto di base $d\sigma$ interno a Ω e di altezza $v(q, t) \cdot \nu(q)$.

$$\left. \begin{array}{l} \text{massa che attraversa l'area } d\sigma \text{ per unità} \\ \text{di tempo nel verso di } \nu(q) \end{array} \right\} = u(q, t)v(q, t) \cdot \nu(q)$$

si noti al secondo membro la presenza del prodotto scalare, si ricorda, infatti, che sia v sia ν sono vettori tridimensionali. Osservato che la massa totale contenuta in Ω all'istante t è uguale all'integrale della densità $u(q, t)$ esteso al volume Ω , dal principio di conservazione della massa segue che

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u(q, t) dq = - \int_{\partial\Omega} u(q, t)v(q, t) \cdot \nu(q) d\sigma$$

dove, si osserva, il primo è un integrale triplo e il secondo un integrale superficiale. Il segno meno è legato al fatto che come verso della normale alla superficie $\partial\Omega$ è stato scelto quello esterno alla superficie. Applicando il teorema della divergenza al secondo membro si ottiene

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t}(q, t) dq = - \int_{\Omega} u(q, t)v(q, t) \cdot \nu(q) dq$$

e dall'arbitrarietà della regione $\Omega \subset G$ segue l'equazione di continuità (4.3).

L'equazione (4.3) non è nella forma (4.2) perché in essa compaiono due funzioni: il campo scalare u e il campo vettoriale v . Se si suppone, però, di conoscere il campo delle velocità, allora l'equazione di continuità diventa un'equazione differenziale alle derivate parziali del primo ordine nella funzione incognita u . In particolare nel caso di un fluido in un tubo unidimensionale parallelo all'asse x l'equazione si riduce a

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial}{\partial x}[u(x, t)v(x, t)] = 0 \quad (4.4)$$

dove v è un campo scalare assegnato.

È lecito aspettarsi che le equazioni differenziali alle derivate parziali, così come quelle ordinarie, ammettano più di una soluzione, per esempio è immediato verificare che la (4.4) ammette le infinite alla uno soluzioni costanti $u(q, t) = \text{costante}$. Dal punto di vista fisico è importante capire quali siano le condizioni che bisogna imporre alla soluzione affinché il problema ammetta una soluzione unica; nel caso delle equazioni ordinarie di ordine n si deve considerare un problema di Cauchy fissando il valore della soluzione e delle sue prime $n - 1$ derivate in un istante. Nel caso dell'equazione di continuità unidimensionale è sperabile che l'equazione ammetta una soluzione unica una volta assegnato il profilo di densità all'istante iniziale; in altri termini si vorrebbe dimostrare un teorema che assicuri l'esistenza e l'unicità della soluzione dell'equazione di continuità (4.4) soddisfacente alla condizione iniziale $u(x, 0) = u_0(x)$, per ogni $x \in \mathbb{R}$, dove u_0 è una funzione reale assegnata che rappresenta la distribuzione della massa nel tubo all'istante iniziale.

Il problema può essere letto in un modo diverso e molto istruttivo: si vuole determinare la funzione u soluzione dell'equazione differenziale (4.3) nel piano qt avendo assegnato il

valore della soluzione sull'asse t , cioè su una curva regolare del piano. È ovvio che l'asse t ha un valore particolare nel contesto specifico dell'equazione di continuità, ma in generale questo tipo di problema può essere posto assegnando il dato iniziale su una curva regolare qualsiasi del piano. Più precisamente, considerata l'equazione differenziale alle derivate parziali del primo ordine

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 \quad (4.5)$$

dove $F : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione assegnata abbastanza regolare, considerata una curva regolare $\varphi = (\varphi_1(s), \varphi_2(s))$, con $s \in I$ e $I \subset \mathbb{R}$ intervallo, considerata una funzione $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, si dice che $u : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ è soluzione del **problema di Cauchy** associato a (4.5) con dato iniziale f assegnato sulla curva regolare φ se e solo se u soddisfa (4.5) nell'aperto connesso D contenente il supporto della curva φ e inoltre $u(\varphi_1(s), \varphi_2(s)) = f(s)$ per ogni $s \in I$.

4.2. Equazione del calore

Un solido occupa il volume $G \subset \mathbb{R}^3$; si indica con $u(q, t)$ la *temperatura* del corpo nel punto $q = (x, y, z) \in G$ all'istante $t \in \mathbb{R}$. Sulla base del *principio di conservazione dell'energia* è possibile mostrare che la funzione u soddisfa all'**equazione del calore**

$$\frac{k}{c\rho} \Delta u(q, t) = \frac{\partial u}{\partial t}(q, t) \quad (4.6)$$

dove k è la conduttività del corpo, c il suo calore specifico e ρ la sua densità di massa che si suppone costante. L'equazione (4.6) è un'equazione differenziale alle derivate parziali del secondo ordine.

In primo luogo si mostra che sulla base del principio di conservazione dell'energia è possibile stabilire una sorta di equazione di bilancio energetico simile all'equazione di continuità per la densità di massa. Si indica con $\varepsilon(q, t)$ la *densità di energia* del corpo in $q \in G$ all'istante t e con $j(q, t)$ il *flusso di calore* in q all'istante t , ovvero presa una superficie infinitesima $d\sigma$ centrata in $q \in \Omega$, l'energia che la attraversa per unità di tempo nel verso specificato dalla normale $\nu_{d\sigma}$ a $d\sigma$ è uguale a $j(q, t) \cdot \nu_{d\sigma}$. Sia $\Omega \subset G$ una regione chiusa e limitata la cui frontiera $\partial\Omega$ è una superficie regolare; sia $d\sigma$ una porzione infinitesima di $\partial\Omega$ centrata in $q \in \partial\Omega$, l'energia che attraversa l'area $d\sigma$ per unità di tempo nel verso specificato dalla normale esterna $\nu(q)$ a $\partial\Omega$ in q è pari a $j(q, t) \cdot \nu(q)$. Osservato che l'energia totale contenuta in Ω all'istante t è uguale all'integrale della densità $\varepsilon(q, t)$ esteso al volume Ω , dal principio di conservazione dell'energia segue che

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \varepsilon(q, t) dq = - \int_{\partial\Omega} j(q, t) \cdot \nu(q) d\sigma$$

Applicando il teorema della divergenza al secondo membro si ottiene

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}(q, t) dq = - \int_{\Omega} j(q, t) \cdot \nu(q) dq$$

e dall'arbitrarietà della regione $\Omega \subset G$ segue l'equazione di continuità per l'energia termica:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}(q, t) + \operatorname{div} j(q, t) = 0 \quad (4.7)$$

L'equazione precedente non costituisce un problema chiuso perché vi compaiono due funzioni incognite, il campo scalare ε e il campo vettoriale j . È possibile, però, ricondurre il problema all'equazione (4.6) nella sola funzione incognita u , la distribuzione di temperatura, usando la relazione termodinamica $\varepsilon(q, t) = c\rho u(q, t)$, con c e ρ il calore specifico e la densità di massa del corpo, e la *legge di Fourier* per la conduzione del calore $j(q, t) = -k\nabla u(q, t)$, dove k è la conducibilità termica del solido. Si ha, infatti,

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}(q, t) + \operatorname{div} j(q, t) = 0 \Rightarrow c\rho \frac{\partial u}{\partial t}(q, t) - k \operatorname{div}[\nabla u(q, t)] = 0$$

da cui si ottiene l'equazione del calore (4.6) ricordando che per qualsiasi funzione scalare f sufficientemente regolare si ha $\operatorname{div}[\nabla f] = \Delta f$.

Come si è già visto nel paragrafo 4.1 dal punto di vista fisico è importante capire quali siano le condizioni che bisogna imporre alla soluzione affinché il problema ammetta una soluzione unica. Nel caso dell'equazione del calore (4.6) è sperabile che l'equazione ammetta una soluzione unica una volta assegnata in ogni istante $t \geq 0$ la temperatura sulla superficie del solido e la temperatura iniziale, cioè a $t = 0$, in ogni punto del solido. In altri termini si vorrebbe l'esistenza e l'unicità della soluzione dell'equazione (4.6) soddisfacente alla condizione iniziale $u(q, 0) = u_0(q)$ per ogni $q \in G$, dove u_0 è una funzione reale assegnata che rappresenta la distribuzione della temperatura all'istante iniziale, e alla condizione al bordo $u(q, t) = u_1(q, t)$ per ogni $q \in \partial G$ e per ogni $t \geq 0$, dove u_1 è una funzione reale assegnata.

Nel caso di una sbarra il problema diventa unidimensionale nella variabile spaziale $x \in \mathbb{R}$ e la regione G occupata dal corpo diventa un intervallo $I = [a, b]$ dell'asse x . Allora il problema si riduce alla determinazione della soluzione dell'equazione

$$\frac{k}{c\rho} \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \quad (4.8)$$

nella regione $D := \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \text{ e } t \geq 0\}$ tale che $u(x, 0) = u_0(x)$ per ogni $x \in [a, b]$, $u(a, t) = u_{1,a}(t)$ per ogni $t \geq 0$ e $u(b, t) = u_{1,b}(t)$ per ogni $t \geq 0$, dove le funzioni reali u_0 , $u_{1,a}$ e $u_{1,b}$ sono assegnate.

Visto sotto questa luce il problema è quello della determinazione della soluzione di una equazione differenziale alle derivate parziali in una regione chiusa D del piano noto il valore che la funzione assume sulla frontiera di D ; questo tipo di problema è noto come **problema di Dirichlet**. Dal punto di vista fisico è naturale anche chiedersi se esiste una soluzione unica assegnando la temperatura iniziale in G e sul bordo il valore in ogni istante della derivata calcolata lungo la direzione ortogonale al bordo stesso; questo tipo di condizione al bordo è nota come **condizione di Neumann**. In questo caso per il problema della sbarra si dovrebbe determinare la soluzione dell'equazione del calore nel dominio $D := \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \text{ e } t \geq 0\}$ tale che $u(x, 0) = u_0(x)$ per ogni

$x \in [a, b]$, $u_x(a, t) = u_{1,a}(t)$ per ogni $t \geq 0$ e $u_x(b, t) = u_{1,b}(t)$ per ogni $t \geq 0$, con le funzioni reali u_0 , $u_{1,a}$ e $u_{1,b}$ assegnate; il problema risultante è quindi un problema di tipo misto con condizione al bordo di Dirichelet sulla porzione di ∂D giacente sull'asse t e condizioni al bordo di tipo Neumann sulla parte rimanente della frontiera di D .

4.3. Equazione di Laplace: distribuzione stazionaria della temperatura

Un solido occupa il volume $G \subset \mathbb{R}^3$; la temperatura $u(q, t)$ del corpo nel punto $q = (x, y, z) \in G$ all'istante $t \in \mathbb{R}$ soddisfa all'equazione del calore (4.6). Ci si chiede se esistono soluzioni stazionarie, cioè indipendenti dal tempo; queste eventuali soluzioni rappresenterebbero la distribuzione di temperatura nel solido a tempo infinito, ovvero la distribuzione di equilibrio. Imponendo che $u(q)$ sia soluzione di (4.6) si trova

$$\Delta u(q) = 0 \quad (4.9)$$

che è nota come **equazione di Laplace**.

L'equazione (4.9) è un'equazione differenziale alle derivate parziali del secondo ordine per la quale ci si aspetta di avere unicità della soluzione sotto condizioni di tipo Dirichelet, cioè assegnando il valore della temperatura sulla superficie del solido, oppure con condizioni di tipo Neumann, cioè assegnando il tasso al quale varia la temperatura superficiale del solido in direzione normale alla superficie stessa.

Nel caso di una lamina rettangolare il problema diventa bidimensionale, cioè si cerca la soluzione dell'equazione

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0 \quad (4.10)$$

nella regione $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \text{ e } c \leq y \leq d\}$ con condizione di Dirichelet $u(a, y) = u_1(y)$ per ogni $y \in [c, d]$, $u(b, y) = u_2(y)$ per ogni $y \in [c, d]$, $u(x, c) = u_3(x)$ per ogni $x \in [a, b]$ e $u(x, d) = u_4(x)$ per ogni $x \in [a, b]$, con u_1 , u_2 , u_3 e u_4 funzioni assegnate. In modo del tutto analogo si può porre il problema con condizioni di Neumann al bordo.

4.4. Equazione di Laplace: potenziale elettrostatico nel vuoto

Sia G una regione dello spazio \mathbb{R}^3 occupata dalla distribuzione di carica elettrica $\varrho(q)$ stazionaria, ossia indipendente dal tempo, con $q \in G$. Il campo elettrostatico in G prodotto dalla carica ϱ obbedisce alle due equazioni di Maxwell, si vedano anche le (4.1),

$$\operatorname{div} E(q) = \frac{1}{\varepsilon_0} \varrho(q) \quad \text{e} \quad \operatorname{rot} E(q) = 0 \quad (4.11)$$

dove ε_0 è la *costante dielettrica nel vuoto*. La seconda equazione assicura che il campo elettrostatico è conservativo, quindi esiste una funzione scalare $v : q \in G \rightarrow v(q) \in \mathbb{R}$, detta *potenziale elettrostatico*, tale che per ogni $q \in G$ si ha $E(q) = -\nabla v(q)$. Sostituendo questa equazione nella prima delle (4.11) e ricordando che $\operatorname{div} \nabla = \Delta$, si ottiene

$$\Delta v = -\frac{1}{\varepsilon_0} \varrho(q) \quad (4.12)$$

che è nota come **equazione di Poisson** per il potenziale elettrostatico. Nel caso in cui si voglia determinare il potenziale v nel vuoto, cioè nel caso in cui $\rho = 0$, l'equazione (4.12) si riduce all'equazione di Laplace $\Delta v = 0$.

Anche nel caso elettrostatico i tipici problemi al contorno da affrontare sono quelli di tipo Dirichelet e di tipo Neumann, in particolare quello di Dirichelet consiste nel determinare il potenziale elettrostatico in una regione G nota la distribuzione stazionaria della carica in G e il valore del potenziale sul bordo ∂G .

4.5. Equazione delle onde per il campo elettromagnetico

Si considera il problema della propagazione del campo elettromagnetico nel vuoto cioè in una regione dello spazio in cui la carica e la corrente è nulla; il fenomeno è regolato dalle equazioni di Maxwell (4.1) con $\rho = 0$ e $j = 0$, ovvero

$$\operatorname{div} E = 0, \quad \operatorname{rot} E = -\frac{\partial B}{\partial t}, \quad \operatorname{div} B = 0 \quad \text{e} \quad \operatorname{rot} B = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E}{\partial t} \quad (4.13)$$

Usando le equazioni precedenti il rotore del rotore del campo elettrico può essere espresso nei due modi seguenti:

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} E) = \operatorname{rot} \left(-\frac{\partial B}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} B = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

o anche

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} E) = \nabla(\operatorname{div} E) - \Delta E = \nabla 0 - \Delta E = -\Delta E$$

Combinando queste due relazioni si ha che la propagazione del campo elettrico è regolata dall'equazione

$$-\Delta E(q, t) = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}(q, t) \Rightarrow \Delta E(q, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}(q, t) = 0 \quad (4.14)$$

detta **equazione delle onde** con velocità di fase $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$; la costante c è detta **velocità della luce nel vuoto**. Procedendo in modo analogo si dimostra che anche la propagazione del campo magnetico nel vuoto è regolata dall'equazione delle onde; riassumendo si ha

$$\Delta E(q, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}(q, t) = 0 \quad \text{e} \quad \Delta B(q, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 B}{\partial t^2}(q, t) = 0 \quad (4.15)$$

Nella dimostrazione precedente è stato introdotto il concetto di *laplaciano* di un campo vettoriale, che, in analogia con il laplaciano di un campo scalare, è definito come segue: sia $v : q \in \mathbb{R}^3 \rightarrow v(q) = (v_x(q), v_y(q), v_z(q)) \in \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale di classe $C^2(\mathbb{R}^3)$, si pone

$$\begin{aligned} \Delta v &:= (\Delta v_x, \Delta v_y, \Delta v_z) \\ &= \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (4.16)$$

Inoltre si è usata l'identità notevole

$$\Delta v = \nabla(\operatorname{div} v) - \operatorname{rot}(\operatorname{rot} v) \quad (4.17)$$

valida per un qualunque campo vettoriale $v : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ di classe $C^2(\mathbb{R}^3)$. Per dimostrare la (4.17) ci si limita a calcolare la prima componente del secondo e mostrare che è uguale alla prima componente del campo vettoriale Δv definito dalla (4.16). Detta $\{e_x, e_y, e_z\}$ la base canonica di \mathbb{R}^3 si ha

$$e_x \cdot \nabla(\operatorname{div} v) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial x \partial z}$$

D'altro canto, dette $\operatorname{rot}_x v$, $\operatorname{rot}_y v$ e $\operatorname{rot}_z v$ le componenti del vettore $\operatorname{rot} v$, si ha che

$$e_x \cdot \operatorname{rot}(\operatorname{rot} v) = \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{rot}_z v - \frac{\partial}{\partial z} \operatorname{rot}_y v = \frac{\partial^2 v_y}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}$$

Dalle due espressioni precedenti e dal teorema di Schwartz sull'inversione dell'ordine di derivazione, si ottiene la tesi.

4.6. Equazione di d'Alambert per le onde elettromagnetiche piane

Indicato con $q = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ si considera una soluzione $E(q, t)$ e $B(q, t)$ delle equazioni di Maxwell nel vuoto; nel paragrafo precedente si è dimostrato che i campi elettrico e magnetico soddisfano all'equazione delle onde (4.15). Si dice che un'onda elettromagnetica è **piana** o **linearmente polarizzata** se e solo se la sua propagazione avviene lungo una retta e il campo elettrico giace lungo un asse fisso ortogonale alla direzione di propagazione. Scegliendo opportunamente gli assi un'onda elettromagnetica polarizzata può essere scritta nella forma $E = E_z(x, t)e_z$; si noti che il campo elettrico ha componente non nulla soltanto lungo l'asse z e che tale componente dipende soltanto dalla variabile spaziale x misurata lungo la direzione di propagazione. È immediato osservare, sostituendo questa espressione del campo elettrico nella corrispondente equazione (4.15) che il campo scalare E_z soddisfa all'**equazione delle onde unidimensionale**, nota anche come **equazione di d'Alambert**,

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0$$

dove c è la velocità della luce nel vuoto.

Per capire il corrispondente comportamento del campo magnetico $B(q, t)$ si devono usare le equazioni di Maxwell (4.13). Si verifica facilmente che la legge di Gauss per il campo elettrico è soddisfatta banalmente dal campo $E = E_z(x, t)e_z$. Dalla legge di Faraday–Henry si ha, ricordando che con la notazione adottata B rappresenta un campo vettoriale,

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} e_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} e_y = \frac{\partial B}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial B}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x} e_y$$

L'equazione precedente implica che le componenti B_x e B_z del campo magnetico sono costanti rispetto al tempo, quindi con un'opportuna scelta delle condizioni iniziali possono essere considerate nulle. In altri termini si ha

$$B = B_y(q, t)e_y \quad \text{e} \quad \frac{\partial B_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x} \quad (4.18)$$

Il vettore campo magnetico è parallelo all'asse y , quindi è sempre ortogonale al campo elettrico; per questo motivo si dice che le onde elettromagnetiche sono *trasversali*. Si noti, però, che il campo scalare B_y in generale dipende da x , da y e da z ; la discussione seguente mostra che le equazioni di Maxwell implicano che B_y dipende solo da x . Infatti dalla legge di Gauss per il campo magnetico si ha

$$\frac{\partial B_y}{\partial y} = 0 \Rightarrow B = B_y(x, z, t)e_y$$

e dalla legge di Ampère–Maxwell segue

$$-\frac{\partial B_y}{\partial z}e_x + \frac{\partial B_y}{\partial x}e_z = \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial E_z}{\partial t}e_z \Rightarrow B = B_y(x, t)e_y \quad \text{e} \quad \frac{\partial B_y}{\partial x} = \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} \quad (4.19)$$

Combinando le due equazioni (4.18) e (4.19), oppure usando l'equazione (4.15) per il campo magnetico, si dimostra che anche il campo magnetico $B = B_y(x, t)e_y$ soddisfa all'equazione di d'Alambert.

4.7. Equazione di d'Alambert per la corda sottile

Si consideri una corda sottile e tesa di lunghezza L e massa M ; si vuole studiare il problema delle piccole oscillazioni piane di questo sistema. Sia x l'asse su cui giace la corda, $[0, L]$ l'intervallo occupato dalla corda a riposo e xz il piano in cui avvengono le oscillazioni. Nell'ipotesi di piccole deviazioni dalla posizione di equilibrio si può immaginare che il generico elemento della corda di ascissa a riposo x compia un moto rettilineo lungo la retta parallela all'asse z a distanza x da questo; allora per specificare la posizione di tutti gli elementi della corda al generico istante t è sufficiente assegnare la quota $u(x, t)$ relativa all'asse z , ovvero la deviazione dalla posizione di equilibrio, di ciascun elemento della corda individuato dal valore della sua ascissa a riposo x . In questo contesto il problema non consiste nello stabilire le equazioni del moto che forniscano la variabile spaziale x in funzione del tempo t , ma nel derivare un'equazione differenziale che descriva l'evoluzione del campo $u(x, t)$ definito in ogni punto dello *spazio-tempo* xt .

Si mostra che l'evoluzione è descritta dall'equazione delle onde unidimensionale, ovvero dall'equazione di d'Alambert,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = 0 \quad (4.20)$$

dove c è detta *velocità di propagazione* ed è legata ai parametri fisici del sistema dalla relazione $c = \sqrt{\tau/\varrho}$, ove τ è la *tensione* della corda e $\varrho = M/L$ la sua *densità lineare* di massa. L'equazione (4.20) è la versione unidimensionale dell'**equazione delle onde**

$$\Delta u(q, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(q, t) = 0$$

con $q = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $t \in \mathbb{R}$ e u un campo scalare o vettoriale, si veda il paragrafo 4.5.

Si mostra come l'equazione (4.20) per la corda sottile possa essere dedotta come limite continuo di un problema discreto con numero finito di gradi di libertà. L'argomento che sarà sviluppato è dovuto a Lagrange (1759), si veda anche [5]; pur non essendo una derivazione rigorosa ha il pregio di mettere in luce come alcune grandezze del modello discreto possano essere interpretate quando si lascia divergere il numero di gradi di libertà.

Si immagina di approssimare la corda sottile con un sistema di $n + 1$ oscillatori mutuamente interagenti di massa $m := M/(n + 1)$; un oscillatore è fisso nell'origine del sistema di riferimento cartesiano xz e un secondo oscillatore è fisso nel punto di coordinate $(L, 0)$. Per ogni $j = 1, \dots, n - 1$ la particella individuata da j si muove lungo una retta parallela all'asse z a distanza $x_j := j\ell$ dall'asse z , ove $\ell := L/n$. La particella j , con $j \neq 0, n$, interagisce con le sue due particelle prime vicine, cioè con la $j - 1$ e la $j + 1$; la particella nell'origine interagisce con la sola particella $j = 1$ e la particella $j = n$ interagisce con la sola particella $j = n - 1$. L'interazione è di tipo elastico con medesima costante per tutte le coppie di particelle pari a $k := \tau/\ell$.

È facile convincersi che il sistema è in equilibrio se tutte le particelle vengono poste sull'asse x con velocità nulla. Il sistema ha $n - 1$ gradi di libertà e come coordinate lagrangiane si possono scegliere gli $n - 1$ numeri reali u_j , con $j = 1, \dots, n - 1$ che rappresentano la quota della particella j misurata lungo l'asse z , ovvero la deviazione dalla relativa posizione di equilibrio.

Per determinare le equazioni del moto si segue la strategia lagrangiana, quindi si scrivono dapprima l'energia cinetica T e l'energia potenziale U del sistema

$$T = \frac{1}{2}m \sum_{j=1}^{n-1} \dot{u}_j^2 \quad \text{e} \quad U = \frac{1}{2}k \sum_{j=0}^{n-1} [\ell^2 + (u_{j+1} - u_j)^2] + \text{cost} = \frac{1}{2}k \sum_{j=0}^{n-1} (u_{j+1} - u_j)^2 \quad (4.21)$$

dove la costante arbitraria è stata scelta in modo opportuno e si è posto $u_0 = u_n = 0$. Si considera ora la lagrangiana $\mathcal{L} := T - U$ si calcolano le derivate

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_i} = m\dot{u}_i \quad \text{e} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i} = -k[(u_i - u_{i-1}) - (u_{i+1} - u_i)]$$

per ogni $i = 1, \dots, n - 1$, dove nel calcolo della seconda derivata si è usato che il termine u_i compare nell'espressione dell'energia potenziale in corrispondenza di due valori di j , più precisamente per $j = i - 1$ e per $j = i$. Usando le due espressioni precedenti si possono scrivere facilmente le equazioni di lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i} = 0 \Rightarrow m\ddot{u}_i - k[(u_{i+1} - u_i) - (u_i - u_{i-1})] = 0 \quad (4.22)$$

per ogni $i = 1, \dots, n - 1$.

Lo studio appena condotto del modello discreto è del tutto rigoroso e le (4.22) sono le equazione del moto per il sistema discreto costituito dagli $n + 1$ oscillatori armonici accoppiati; è evidente che si tratta dell'equazione del moto di Newton scritta per ciascuna delle $n - 1$ particelle la cui posizione non è stata fissata. A questo punto si vuole "intuire"

cosa accade se si considera il limite di infiniti gradi di libertà, cioè se si lascia crescere il parametro n . Ciò dovrà essere fatto tenendo costanti i parametri fisici del sistema continuo, cioè la massa M , la tensione τ e la lunghezza L ; allora per $n \rightarrow \infty$ si ha

$$\ell = \frac{L}{n} \rightarrow 0, \quad m = \frac{M}{n+1} \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad k = \frac{\tau}{\ell} = \frac{\tau}{L}n \rightarrow \infty$$

Si osservi che il *passo reticolare* ℓ tende a zero, per questa ragione questa procedura è nota come *limite del continuo*. Il numero di particelle diverge e ciascuna di esse dovrà essere individuata dalla variabile continua $x \in [0, L]$; a ogni particella si assocerà la quantità $u(x, t)$ che ne rappresenta la deviazione dalla sua posizione di equilibrio sull'asse x misurata lungo l'asse z . Il problema può essere visto sotto una luce leggermente diversa, cioè si può pensare al campo continuo $u(x, t)$ come a una funzione il cui andamento temporale approssima il comportamento della variabile discreta $u_j(t) = u(j\ell, t)$, con $j = 0, \dots, n$, per piccoli valori del passo reticolare ℓ .

A questo punto si deve cercare di dedurre un'equazione per il campo scalare u a partire dalle equazioni del moto (4.22). Visto il comportamento limite dei parametri ℓ , k e m è utile riscrivere le equazioni del moto del sistema discreto nel modo seguente:

$$\frac{m}{\ell} \ddot{u}_i - k\ell \frac{1}{\ell} \left[\frac{u_{i+1} - u_i}{\ell} - \frac{u_i - u_{i-1}}{\ell} \right] = 0$$

Questa espressione permette di interpretare in modo agevole il significato di ciascuno dei suoi termini nel limite del continuo. Per quanto riguarda i fattori costanti presenti nell'equazione precedente si ha che $k\ell = \tau$ e $m/\ell \rightarrow M/L = \rho$ per $n \rightarrow \infty$; mentre il limite dei termini contenenti u_i può essere interpretato come segue

$$\ddot{u}_j = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t) \quad \text{e} \quad \frac{1}{\ell} \left[\frac{u_{i+1} - u_i}{\ell} - \frac{u_i - u_{i-1}}{\ell} \right] \rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_{j-1}, t)$$

Dalle osservazioni precedenti si deduce che le equazioni del moto del sistema discreto nel limite del continuo si riducono all'equazione di d'Alambert (4.20) con $c = \sqrt{\tau/\rho}$.

4.8. Oscillazioni non lineari ed equazione di Burger

Nel paragrafo 4.7 sono state studiate le oscillazioni trasversali di una catena di oscillatori armonici e si è visto come nel limite del continuo si ottenga l'equazione di d'Alambert. Lo stesso risultato può essere ottenuto per lo studio delle oscillazioni longitudinali di una sbarra elastica, in questo caso l'etichetta j individuerà l'elemento della sbarra la cui posizione di equilibrio è $x_j = j\ell$ e $u_j(t)$ misurerà di quanto, all'istante t , l'elemento risulta spostato rispetto alla sua posizione di equilibrio. In caso di accoppiamento elastico di costante $k > 0$ tra elementi primi vicini si ottiene l'energia potenziale

$$U = \frac{1}{2}k \sum_{j=0}^{n-1} (u_{j+1} - u_j)^2 \quad (4.23)$$

Procedendo come nel paragrafo 4.7 si ottengono le equazioni del moto (4.22).

Le equazioni del moto possono essere risolte in termini dei modi normali, cioè per mezzo della rappresentazione di Fourier delle funzioni $u_j(t)$; ciascun modo può essere eccitato indipendentemente e se l'energia viene assegnata all'istante iniziale a un solo modo, essa rimarrà concentrata su questo modo durante tutta l'evoluzione del sistema. Alla base della Meccanica Statistica c'è l'idea che i sistemi sufficientemente complessi sono caratterizzati da uno stato di equilibrio in cui l'energia si ridistribuisce uniformemente tra tutti i modi normali indipendentemente da come sia stata introdotta nel sistema all'istante iniziale. In [3] Fermi, Pasta e Ulam si posero il problema di studiare l'equipartizione dell'energia nel contesto della catena di oscillatori supponendo che l'interazione tra i gradi di libertà primi vicini sia non lineare, per esempio con energia potenziale

$$U = \frac{1}{2}k \sum_{j=0}^{n-1} (u_{j+1} - u_j)^2 + \frac{1}{3}\alpha \sum_{j=0}^{n-1} (u_{j+1} - u_j)^3 + \frac{1}{4}\beta \sum_{j=0}^{n-1} (u_{j+1} - u_j)^4 \quad (4.24)$$

con $\alpha, \beta > 0$. Sorprendentemente l'analisi numerica del problema mostrò che eccitando il solo primo modo di oscillazione, dopo una sorta di equipartizione a tempi piccoli dell'energia tra i diversi modi normali, a tempi sufficientemente grandi l'energia cominciava a fluire verso il primo modo fino al ripristinarsi quasi integrale della condizione iniziale.

Il problema FPU è stato ampiamente studiato negli ultimi anni, ed è ancora oggetto di studi molto interessanti, un'aspetto molto importante è quello del comportamento del sistema nel limite del continuo [9]. È naturale chiedersi quale sia l'equazione che sostituisce quella di d'Alambert quando si considera la catena di oscillatori con interazione descritta dalla (4.24). Si considera il caso $\alpha > 0$ e $\beta = 0$, procedendo come nel paragrafo 4.7 si ottengono le equazioni del moto

$$m\ddot{u}_i = k[(u_{i+1} - u_i) - (u_i - u_{i-1})] + \alpha[(u_{i+1} - u_i)^2 - (u_i - u_{i-1})^2] \quad (4.25)$$

per ogni $i = 1, \dots, n-1$. Per passare al limite del continuo è utile riscrivere l'ultimo termine della forma seguente:

$$[(u_{i+1} - u_i)^2 - (u_i - u_{i-1})^2] = [(u_{i+1} - u_i) + (u_i - u_{i-1})][(u_{i+1} - u_i) - (u_i - u_{i-1})]$$

Allora è lecita l'interpretazione

$$\frac{1}{\ell^3}[(u_{i+1} - u_i)^2 - (u_i - u_{i-1})^2] \rightarrow 2\frac{\partial u}{\partial x}(x, t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t)$$

e quindi il limite continuo di (4.25) è dato dall'equazione alle derivate parziali

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left[\tau + \alpha'\frac{\partial u}{\partial x}\right]\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Rightarrow \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \alpha''\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (4.26)$$

dove i parametri del modello discreto sono stati riscritti come $\rho = m/\ell$, $\tau = k\ell$ e $\alpha' = 2\alpha\ell^2$, e dove si è posto $c = \sqrt{\tau/\rho}$ e $\alpha'' = \alpha'/\tau$. In conclusione si è ottenuto un'equazione del tipo di d'Alambert con l'aggiunta di un termine non lineare.

L'equazione precedente, nonostante sia evidentemente abbastanza complessa, può essere scritta in una forma più semplice che permette di studiare in modo approssimato il comportamento di una classe di possibili soluzioni. In primo luogo si osserva che l'operatore al primo membro è quello di d'Alambert per il quale, si veda l'Esmpio 5.1, possono essere determinate due famiglie di curve caratteristiche cui corrispondono le onde che si propagano in avanti con velocità c e quelle che si propagano all'indietro con velocità $-c$. Fissandosi come obiettivo lo studio delle soluzioni di (4.26) corrispondenti a onde propagantesi in avanti è utile riscrivere l'equazione usando coordinate misurate lungo le caratteristiche corrispondenti. In altri termini si considera il cambiamento di variabili $\xi(x, t) = x - ct$ e $\eta(x, t) = ct$, si introduce la funzione $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $v(\xi(x, t), \eta(x, t)) = u(x, t)$, si osserva che

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -c \frac{\partial v}{\partial \xi} + c \frac{\partial v}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} - 2c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \eta \partial \xi} + c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}$$

e sostituendo le espressioni appena determinate nell'equazione (4.26) si riconosce che al funzione v soddisfa all'equazione alle derivate parziali

$$2 \frac{\partial^2 v}{\partial \eta \partial \xi} + \alpha'' \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}$$

Per soluzioni v che dipendono poco dalla variabile η , nel senso che $\partial^2 v / \partial \eta^2$ è trascurabile, se si pone $w = \partial v / \partial \xi$ l'equazione precedente si riduce all'**equazione di Burger**

$$\frac{\partial w}{\partial \eta} + \frac{\alpha''}{2} w \frac{\partial w}{\partial \xi} = 0 \tag{4.27}$$

L'equazione di Burger è un'equazione alle derivate parziali del primo ordine quasilineare omogenea che può essere studiata con i metodi che verranno discussi nel paragrafo 5.3.

4.9. Oscillazioni non lineari ed equazione di Korteweg-de Vries

Nei paragrafi precedenti è stato determinato, in modo non rigoroso, il limite del continuo per un modello di oscillatori accoppiati in modo sia lineare sia non lineare. In definitiva si è pervenuti a un'equazione alle derivate parziali per un campo scalare continuo cui "converge" la soluzione del sistema discreto nel limite di passo reticolare ℓ nullo ovvero di infiniti gradi di libertà; i parametri fisici del problema sono stati riscalandi in modo da far scomparire la dipendenza dal passo ℓ nel limite.

Se si pensa all'equazione continua come a un'equazione per il campo scalare continuo u che approssima il comportamento del modello discreto per ℓ abbastanza piccolo, cioè se si considera ℓ piccolo ma finito, allora ha senso scrivere l'equazione conservando la dipendenza dal parametro ℓ ; in altri termini si pensa a ℓ come a un parametro piccolo e si scrive l'equazione tenendo presente anche le correzioni di ordine superiore. I termini di tipo $u_k - u_{k-1}$ che compaiono nelle equazioni del moto per il sistema discreto possono essere espressi sviluppando la funzione u in serie di Taylor:

$$u_{j\pm 1} - u_j = \pm \frac{\partial u}{\partial x}(x_i) \ell + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i) \ell^2 \pm \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_i) \ell^3 + \frac{1}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_i) \ell^4 + \dots \tag{4.28}$$

Sostituendo queste espressioni nell'equazione (4.25) e tenendo soltanto i termini non lineari di ordine più basso si ritrova l'equazione (4.26). Ma se si considera anche il contributo di ordine ℓ^2 nello sviluppo del primo termine al secondo membro si ha

$$\varrho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left[\tau + \alpha' \frac{\partial u}{\partial x} \right] \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\tau \ell^2}{6} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \Rightarrow \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \alpha'' \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\ell^2}{6} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$$

dove i parametri del modello discreto sono stati riscritti come $\varrho = m/\ell$, $\tau = k\ell$ e $\alpha' = 2\alpha\ell^2$, e dove si è posto $c = \sqrt{\tau/\varrho}$ e $\alpha'' = \alpha'/\tau$; si è ottenuta un'equazione analoga a (4.26) in cui compare, però, un termine correttivo di ordine ℓ^2 .

Procedendo come nel paragrafo 4.8, considerando cioè il cambiamento di variabili $\xi(x, t) = x - ct$ e $\eta(x, t) = ct$ e la funzione $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $v(\xi(x, t), \eta(x, t)) = u(x, t)$, si perviene all'equazione alle derivate parziali

$$2 \frac{\partial^2 v}{\partial \eta \partial \xi} + \alpha'' \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{\ell^2}{6} \frac{\partial^4 v}{\partial \xi^4} = \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}$$

Per soluzioni v che dipendono poco dalla variabile η , nel senso che $\partial^2 v / \partial \eta^2$ è trascurabile, se si pone $w = \partial v / \partial \xi$ l'equazione precedente si riduce all'**equazione di Korteweg–de Vries**

$$\frac{\partial w}{\partial \eta} + \frac{\alpha''}{2} w \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{\ell^2}{6} \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^3} = 0 \quad (4.29)$$

L'equazione di Korteweg–de Vries fu introdotta nel 1895 in [7] per studiare la propagazione delle onde lungo canali poco profondi. Nel 1965 Zabusky e Kruskal [8] mostrarono che tale equazione ammette soluzioni solitoniche.

5. Caratteristiche delle equazioni alle derivate parziali del primo ordine

Un'equazione differenziale alle derivate parziali del primo ordine nella funzione incognita $u : x \in \mathbb{R}^n \rightarrow u(x) \in \mathbb{R}$ è un'equazione nella forma

$$F\left(x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0 \quad (5.1)$$

dove $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione assegnata. Il problema consiste nel determinare una funzione $u : x \in J \subset \mathbb{R}^n \rightarrow u(x) \in \mathbb{R}$ che ammetta le derivate parziali del primo ordine nell'aperto $J \subset \mathbb{R}^n$ e tale che

$$F\left(x_1, \dots, x_n, u(x), \frac{\partial u}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}(x)\right) = 0 \quad \forall x \in J$$

tale funzione è detta *integrale* o *soluzione* dell'equazione differenziale (5.1) nell'aperto J .

Tra le equazioni (5.1) le più semplici sono quelle lineari e le generalizzazioni più elementari. Un'equazione differenziale alle derivate parziali del primo ordine nella forma

$$a_1(x) \frac{\partial u}{\partial x_1}(x) + \dots + a_n(x) \frac{\partial u}{\partial x_n}(x) = f(x) - a_0(x)u(x) \quad (5.2)$$

con $f, a_0, a_1, \dots, a_n : J \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ assegnate, è detta **lineare**. Un'equazione differenziale del tipo (5.1) nella forma

$$a_1(x) \frac{\partial u}{\partial x_1}(x) + \dots + a_n(x) \frac{\partial u}{\partial x_n}(x) = f(x, u) \quad (5.3)$$

con $a_0, a_1, \dots, a_n : J \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ con $f : J \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ assegnate, è detta **semilineare**. Un'equazione differenziale del tipo (5.1) nella forma

$$a_1(x, u) \frac{\partial u}{\partial x_1}(x) + \dots + a_n(x, u) \frac{\partial u}{\partial x_n}(x) = f(x, u) \quad (5.4)$$

con $f, a_0, a_1, \dots, a_n : J \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ assegnate, è detta **quasilineare**.

È immediato verificare che per le equazioni semilineari omogenee vale il cosiddetto *principio di sovrapposizione*, cioè se u e v sono due soluzioni di (5.3) con $f = 0$ allora lo sarà anche $u + v$, infatti

$$\begin{aligned} a_1(x) \frac{\partial}{\partial x_1} [u(x) + v(x)] + \dots + a_n(x) \frac{\partial u + v}{\partial x_n} [u(x) + v(x)] &= \\ = a_1(x) \frac{\partial u}{\partial x_1}(x) + \dots + a_n(x) \frac{\partial u}{\partial x_n}(x) + a_1(x) \frac{\partial v}{\partial x_1}(x) + \dots + a_n(x) \frac{\partial v}{\partial x_n}(x) &= 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

5.1. Equazioni differenziali alle derivate parziali lineari omogenee

5.2. Equazioni differenziali alle derivate parziali semilineari

Esempio 5.1.

Esercizio 5.1. Si dica se le seguenti equazioni differenziali sono lineari o semilineari, se ne determini l'integrale generale, si risolva il problema di Cauchy e si verifichi che la soluzione ottenuta soddisfa sia l'equazione sia la condizione iniziale:

1. $u_x = 1$, dato iniziale $u(0, y) = \exp\{-y^2\}$;
2. $u_x + 2u_y = 0$, dato iniziale $u(x, 0) = x$;
3. $yu_x + xu_y = u$, dato iniziale $u(x, 0) = f(x)$ con $f \in C^\infty(\mathbb{R})$;
4. $xu_x - yu_y = u$, dato iniziale $u(x, x) = f(x)$ con $f \in C^\infty(\mathbb{R})$;
5. $u_x + yu_y = xu$, dato iniziale $u(0, y) = f(y)$ con $f \in C^\infty(\mathbb{R})$;
6. $u_x + \cos xu_y = xy$, dato iniziale $u(0, y) = f(y)$ con $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Soluzione 5.1: 1. $u(x, y) = x + \Phi(y)$ con $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $u(x, y) = x + \exp\{-y^2\}$. 2. $u(x, y) = \Phi(2x - y)$ con $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $u(x, y) = (2x - y)/2$. 3. $u(x, y) = \Phi((x^2 - y^2)/2)/|x - y|$ con $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ arbitraria. 4. $u(x, y) = x\Phi(xy)$ con $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ arbitraria. 5. $u(x, y) = \exp\{x^2/2\}\Phi(y \exp\{-x\})$ con $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ arbitraria. 6. $u(x, y) = \sin x - x \cos x + x^2(y - \sin x)/2 + \Phi(y - \sin x)$ con $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $u(x, y) = \sin x - x \cos x + x^2(y - \sin x)/2 + f(y - \sin x)$.

Esercizio 5.2. Si dica se le seguenti equazioni differenziali sono lineari o semilineari, se ne determini l'integrale generale e si verifichi che la soluzione ottenuta soddisfa sia l'equazione sia la condizione iniziale:

1. $u_x + u_y = u$;
2. $2u_x - 3u_y = x$;
3. $u_x - 2u_y = \sin x + y - u$;
4. $u_x - u_y = 2u + e^{2x} \cos 3y$.

Soluzione 5.2: 1. $u(x, y) = e^x \Phi(x - y)$. 2. $u(x, y) = \Phi(3x + 2y) + x^2/4$. 3. $u(x, y) = (\sin x - \cos x)/2 + y + 2 + e^{-x} \Phi(2x + y)$. 4. $u(x, y) = -(e^{2x}/2) \sin 3y + e^{2x} \Phi(x + y)$ con $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Esercizio 5.3. Si dica se le seguenti equazioni differenziali sono lineari o semilineari, se ne determini l'integrale generale, si risolva il problema di Cauchy e si verifichi che la soluzione ottenuta soddisfa sia l'equazione sia la condizione iniziale:

1. $u_x + u_y = 1$, curva iniziale $u(x, 0) = e^x$;
2. $u_x + u_y = u$, curva iniziale $u(x, 2x) = 1 + \cos x$;
3. $u_x + (\cos x)u_y = \sin x$, curva iniziale $u(0, y) = y - 1 + \cos y$;
4. $2u_x - 5u_y = -4u + x^2$, curva iniziale $u(0, y) = \sin y + e^y + 1/8$;
5. $xu_x - yu_y = x - u$, curva iniziale $u(x, x) = x^2$;
6. $yu_x - xu_y = -xu$, curva iniziale $u = y$ e $x^2 + 2y^2 = 4$;
7. $yu_x - xu_y = -2xyu$, curva iniziale $u = e^x \sin(1 + x)$ e $y^2 = 2x + 1$;
8. $2u_x - e^x u_y = xu^2$, curva iniziale $u(1, y) = \sin y$.

Soluzione 5.3: 1. $u(x, y) = y + e^{x-y}$. 2. $u(x, y) = e^{2x-y}[1 + \cos(x-y)]$. 3. $u(x, y) = -\cos x + \cos[\sin x - y] - \sin x + y$. 4. $u(x, y) = e^{-2x} \sin[(5x + 2y)/2] + e^{(x+y)/2} + x^2/2 - x/4 + 1/8$. 5. $u(x, y) = x/2 + x^{1/2}y^{3/2} - y/2$. 6. $u(x, y) = e^y \sqrt{4 - x^2 - y^2} \exp\{-\sqrt{4 - x^2 - y^2}\}$. 7. $u(x, y) = \exp\{-y^2 - \sqrt{x^2 + y^2}\} \sin \sqrt{x^2 + y^2}$. 8. $u(x, y) = -4 \sin(y + e^x/2 - e/2)/[(x^2 - 1) \sin(y + e^x/2 - e/2) - 4]$.

Esercizio 5.4. La densità di massa $u(x, t)$ di un sistema unidimensionale evolve secondo l'equazione di continuità $\partial u / \partial t + \partial(uv) / \partial x = 0$, con campo delle velocità $v(x, t) = e^{-x}$. All'istante iniziale il profilo della densità di massa è $u(x, 0) = 0$ per $x \leq 0$ e $u(x, 0) = xe^{-2x}$ per $x \geq 0$. Si calcoli la massa totale del sistema all'istante iniziale, si determini il profilo della densità di massa agli istanti $t \geq 0$ specificando in quale regione del piano xt la soluzione determinata ha validità, si verifichi che la massa si conserva calcolando la massa totale al generico istante t .

5.3. Equazioni differenziali alle derivate parziali quasilineari

Esercizio 5.5. Si risolvano i problemi proposti negli Esercizi 5.1–5.3 con il metodo delle caratteristiche per le equazioni quasilineari.

Esercizio 5.6. Si consideri l'equazione differenziale alle derivate parziali $u_x + u_y = 2(x + y)$ e si risponda alle seguenti domande: 1. si verifichi che la superficie Σ di equazione $u(x, y) = x^2 + y^2$ è una superficie integrale; 2. si determini la caratteristica nello spazio passante per l'origine e si verifichi che appartiene alla superficie integrale Σ .

Esercizio 5.7. Si consideri l'equazione differenziale alle derivate parziali $u_x + u_y = 2(x + y)$. Si determini la superficie integrale che attraversa la curva di equazione $x^2 + y^2 = 1$ e $u = 0$ trattando il problema sia come problema quasilineare sia come problema lineare non omogeneo.

Soluzione 5.7: $u(x, y) = x^2 + y^2 - 1$.

Esercizio 5.8. Si consideri l'equazione differenziale alle derivate parziali $u_x + 2u_y = -\cos x$. 1. Se ne determini la curva caratteristica nello spazio passante per $(0, 1, 0)$ e si disegni la sua proiezione sul piano xy ; 2. si dica in corrispondenza di quali tra le seguenti condizioni iniziali il problema di Cauchy risulta ben posto: $u(x, 2x) = -\cos x$, $u(x, 3x) = -\sin x$, $u(x, 2x) = -\sin x$; 3. si determini la soluzione dei problemi di Cauchy ben posti del punto precedente.

Soluzione 5.8: 1. $x(s) = s$, $y(s) = 2s + 1$, $z(s) = -\sin s$. 2. Il secondo. 3. $u(x, y) = -\sin x$.

Esercizio 5.9. Un semplice modello del traffico prevede che la distribuzione delle automobili lungo una strada sia descritta dalla funzione densità $\varrho(x, t)$, dove $x \in \mathbb{R}$ è la posizione e $t \geq 0$ il tempo, soluzione dell'equazione differenziale alle derivate parziali

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + v \left(1 - 2 \frac{\varrho}{\hat{\varrho}} \right) \frac{\partial \varrho}{\partial x} = 0$$

ove v è la velocità massima raggiunta dalle autovetture e $\hat{\varrho}$ è la loro densità massima. Si determini la densità di automobili supponendo che all'istante iniziale si abbia

$$\varrho(x, 0) = \begin{cases} \hat{\varrho} & x < 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}$$

Soluzione 5.9: la superficie integrale soluzione del problema di Cauchy ha curve parametriche

$$t(\tau, s) = s, \quad x(\tau, s) = \begin{cases} -vs + \tau & \tau < 0 \\ +vs + \tau & \tau > 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \varrho(\tau, s) = \begin{cases} \hat{\varrho} & \tau < 0 \\ 0 & \tau > 0 \end{cases} \quad \forall \tau, s \in \mathbb{R}$$

Esercizio 5.10. Si risolva il problema analogo a quello posto nell'Esercizio 5.9 con condizione iniziale $\varrho(x, 0) = (\hat{\varrho}/2)(1 - \tanh \mu x)$, con $\mu \in \mathbb{R}$. Si discuta il comportamento della soluzione per μ grande.

Soluzione 5.10: $x = vt(1 - 2\varrho/\hat{\varrho}) + (1/2\mu) \log[(\hat{\varrho}/\varrho)(1 - \varrho/\hat{\varrho})]$.

Esercizio 5.11. Si risolva il problema analogo a quello posto nell'Esercizio 5.9 con condizione iniziale $\varrho(x, 0) = \varrho_0$ per $x \leq 0$, $\varrho(x, 0) = \varrho_0(L - x)/L$ per $0 < x < L$ e $\varrho(x, 0) = 0$ altrimenti, dove $\varrho_0 \in (0, \hat{\varrho})$ e $L > 0$. Si discuta il comportamento della soluzione.

Esercizio 5.12. Si risolva il problema analogo a quello posto nell'Esercizio 5.9 con condizione iniziale $\varrho(x, 0) = \hat{\varrho}/5$ per $x < 0$ e $\varrho(x, 0) = 3\hat{\varrho}/5$ altrimenti. Si discuta il comportamento della soluzione.

6. Esercizi sulle equazioni alle derivate parziali del secondo ordine

Il problema su cui vertono gli esercizi di questo paragrafo consiste nella determinazione di una funzione $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, di classe C^2 in un dominio $D \subset \mathbb{R}^2$, che soddisfi ad un'equazione alle derivate parziali del tipo

$$F \left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (6.1)$$

La funzione u si dirà soluzione o integrale della (6.1). Nello studio di problemi fisici si ha bisogno di condizioni al contorno generali: condizioni di Dirichlet, viene assegnata la funzione u su parte della frontiera del dominio D ; condizioni di Neumann, viene assegnata la derivata di u nella direzione normale alla frontiera di D su parte della frontiera stesa.

In realtà lo studio è limitato alle equazioni del secondo ordine quasilineari, ovvero a quelle equazioni nella forma seguente:

$$A(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + E(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + F(x, y)u + G(x, y) = 0$$

ove le funzioni $A, B, C, D, E, F, G : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ sono abbastanza regolari in Ω .

6.1. Classificazione e forma canonica

Esercizio 6.1. Si determini il tipo dell'equazione $y\partial^2 u/\partial x^2 + \partial^2 u/\partial y^2 = 0$ studiando gli autovalori della matrice parte principale.

Soluzione 6.1: ellittica in $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$, iperbolica in $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < 0\}$, parabolica in $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$.

Esercizio 6.2. Si determini il tipo dell'equazione $y^2\partial^2 u/\partial x^2 + 2xy\partial^2 u/\partial x\partial y + x^2\partial^2 u/\partial y^2 = 0$ studiando gli autovalori della matrice parte principale.

Soluzione 6.2: parabolica in \mathbb{R}^2 .

Esercizio 6.3. Si determini il tipo dell'equazione seguente: $(x+a)\partial^2 u/\partial x^2 + 2xy\partial^2 u/\partial x\partial y - y^2\partial^2 u/\partial y^2 = 0$ con $a \in (-1/4, 1/4)$.

Soluzione 6.3: ellittica in $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0 \text{ e } -(1 + \sqrt{1-4a})/2 < x < (-1 + \sqrt{1-4a})/2\}$, iperbolica in $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0, x < -(1 + \sqrt{1-4a})/2\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0, x > (-1 + \sqrt{1-4a})/2\}$, parabolica altrove.

Esercizio 6.4. Si dimostri che l'equazione seguente è parabolica in tutto \mathbb{R}^2 e se ne scriva la forma canonica:

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + b \frac{\partial u}{\partial x} + c \frac{\partial u}{\partial y} + u = 0$$

con $a \in \mathbb{R}^*$ e $b, c \in \mathbb{R}$.

Esercizio 6.5. Si dimostri che l'equazione seguente è iperbolica in tutto \mathbb{R}^2 e se ne scriva la forma canonica:

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4a \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + b \frac{\partial u}{\partial x} + c \frac{\partial u}{\partial y} + u = 0$$

con $a \in \mathbb{R}^*$ e $b, c \in \mathbb{R}$.

Esercizio 6.6. Si dimostri che l'equazione seguente è ellittica in tutto \mathbb{R}^2 e se ne scriva la forma canonica:

$$2a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + b \frac{\partial u}{\partial x} + c \frac{\partial u}{\partial y} + u = 0$$

con $a \in \mathbb{R}^*$ e $b, c \in \mathbb{R}$.

Esercizio 6.7. Si studi il tipo delle seguenti equazioni differenziali quasilineari e, qualora possibile, se ne determini la forma canonica:

- | | |
|---|---|
| 1. $u_{xx} + xu_{yy} = 0;$ | 2. $u_{xx} + yu_{yy} = 0;$ |
| 3. $u_{xx} + yu_{yy} + \frac{1}{2}u_y = 0;$ | 4. $yu_{xx} + xu_{yy} = 0;$ |
| 5. $xu_{xx} + yu_{yy} = 0;$ | 6. $u_{xx} + xyu_{yy} = 0;$ |
| 7. $u_{xx}\text{sign } y + 2u_{xy} + u_{yy} = 0;$ | 8. $u_{xx} + 2u_{xy} + (1 - \text{sign } y)u_{yy} = 0;$ |
| 9. $y^2u_{xx} - x^2u_{yy} = 0;$ | 10. $x^2u_{xx} - y^2u_{yy} = 0;$ |
| 11. $x^2u_{xx} + y^2u_{yy} = 0;$ | 12. $y^2u_{xx} + x^2u_{yy} = 0;$ |
| 13. $y^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + x^2u_{yy} = 0;$ | 14. $x^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2u_{yy} = 0.$ |

6.2. Alcuni semplici esempi preliminari

Esercizio 6.8. Si risolva l'equazione differenziale

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{in } D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, -\infty < y < +\infty\}$$

con condizioni di Dirichelet $u(0, y) = y^2$ e $u(1, y) = 1$.

Soluzione 6.8: $u(x, y) = x(1 - y^2) + y^2$.

Esercizio 6.9. Si risolva l'equazione differenziale

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6xy \quad \text{in } D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, -\infty < y < +\infty\}$$

con condizioni di miste Dirichelet–Neumann $u(0, y) = y$ e $\partial u / \partial x(1, y) = 0$.

Soluzione 6.9: $u(x, y) = x^3 y - 3xy + y$.

Esercizio 6.10. Si risolva l'equazione differenziale

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2x \quad \text{in } D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$$

con condizioni di Dirichelet $u(0, y) = 0$ e $u(x, 0) = x^2$.

Soluzione 6.10: $u(x, y) = x^2(1 + y)$.

6.3. Equazione di Laplace: funzioni armoniche

Si dice che una funzione $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ è armonica se e solo se è soluzione dell'equazione di Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0 \tag{6.2}$$

ovvero $\Delta u \equiv \nabla^2 u = 0$. Applicazioni fisiche: il potenziale elettrostatico e la temperatura di equilibrio in un solido sono regolate dall'equazione di Laplace.

Esercizio 6.11. Sia $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, $r \in \mathbb{R}_+^*$, $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e γ la curva regolare con supporto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2\}$ percorsa una sola volta in senso antiorario; si calcoli l'integrale $\int_\gamma u \, dl$ di u lungo la curva γ nei seguenti casi:

1. $u(x, y) = xy$, $(x_0, y_0) = (1, 2)$, $r = 4$;
2. $u(x, y) = e^x \cos y$, $(x_0, y_0) = (0, 0)$, $r = 1$;
3. $u(x, y) = \log \sqrt{x^2 + y^2}$, $(x_0, y_0) = (1, 0)$, $r = 1/2$;
4. $u(x, y) = x + y$, $(x_0, y_0) = (1, -1)$, $r = 5$.

Suggerimento: si usino le proprietà delle funzioni armoniche.

Esercizio 6.12. Sia $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, $r \in \mathbb{R}_+^*$, $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $B \equiv \mathcal{B}((x_0, y_0), r) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2\}$; si calcoli l'integrale $\int_{\overline{B}} u(x, y) \, dx \, dy$ di u esteso alla regione \overline{B} nei seguenti casi:

1. $u(x, y) = xy$, $(x_0, y_0) = (1, 2)$, $r = 4$;
2. $u(x, y) = e^x \cos y$, $(x_0, y_0) = (0, 0)$, $r = 1$;

3. $u(x, y) = \log \sqrt{x^2 + y^2}$, $(x_0, y_0) = (1, 0)$, $r = 1/2$;
4. $u(x, y) = x + y$, $(x_0, y_0) = (1, -1)$, $r = 5$.

Suggerimento: si usino le proprietà delle funzioni armoniche.

Esercizio 6.13. Sia $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $B \equiv \mathcal{B}((0, 0), 1) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$. Si determinino il massimo e il minimo della funzione u nella regione \overline{B} nei seguenti casi: *i*) $u(x, y) = xy$; *ii*) $u(x, y) = x^2 - y^2$; *iii*) $u(x, y) = e^x \cos y$. Si risolva lo stesso problema per la funzione $u(x, y) = \log \sqrt{x^2 + y^2}$ in $C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 2\}$.

6.4. Equazione di Laplace: dominio rettangolare

Esercizio 6.14. Si risolva l'equazione (6.2) nella regione $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$ con condizioni di Dirichelet $u(0, y) = u(a, y) = 0$ per ogni $y \in [0, b]$, $u(x, 0) = \sin(3\pi x/a)$ e $u(x, b) = 0$ per ogni $x \in [0, a]$.

Soluzione 6.14: $u(x, y) = \sinh(3\pi(b-y)/a) \sin(3\pi x/a) / \sinh(3\pi b/a)$.

Esercizio 6.15. Si risolva l'equazione (6.2) nella regione $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$ con condizioni di Dirichelet $u(0, y) = u(a, y) = 0$ per ogni $y \in [0, b]$, $u(x, 0) = f(x)$, con $f \in C^\infty([0, a])$ tale che $f(0) = f(a) = 0$, e $u(x, b) = 0$ per ogni $x \in [0, a]$.

Soluzione 6.15: posto $\varphi_n(x) = \sqrt{2/a} \sin(n\pi x/a)$ e $\langle \varphi_n, f \rangle = \int_0^a dx f(x) \varphi_n(x)$, si ha

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sinh(n\pi(b-y)/a)}{\sinh(n\pi b/a)} \langle \varphi_n, f \rangle \sin n \frac{\pi}{a} x$$

Esercizio 6.16. Si risolva l'equazione (6.2) nella regione $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$ con condizioni di Dirichelet $u(0, y) = u(a, y) = 0$ per ogni $y \in [0, b]$, $u(x, 0) = \sin(\pi x/a)$ e $u(x, b) = \sin(3\pi x/a)$ per ogni $x \in [0, a]$.

Soluzione 6.16:

$$u(x, y) = (\sinh(\pi(b-y)/a) / \sinh(\pi b/a)) \sin(\pi x/a) + (\sinh(3\pi y/a) / \sinh(3\pi b/a)) \sin(3\pi x/a)$$

Esercizio 6.17. Si risolva l'esercizio (6.16) come sovrapposizione dei due problemi seguenti: $\nabla^2 u_1 = 0$ con condizioni di Dirichelet $u_1(0, y) = u_1(a, y) = 0$ per ogni $y \in [0, b]$, $u_1(x, 0) = \sin(\pi x/a)$ e $u_1(x, b) = 0$ per ogni $x \in [0, a]$; $\nabla^2 u_2 = 0$ con condizioni di Dirichelet $u_2(0, y) = u_2(a, y) = 0$ per ogni $y \in [0, b]$, $u_2(x, 0) = 0$ e $u_2(x, b) = \sin(3\pi x/a)$ per ogni $x \in [0, a]$.

Esercizio 6.18. Esempio di condizioni non omogenee. Si risolva l'equazione (6.2) nella regione $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$ con condizioni di Dirichelet $u(0, y) = 0$ e $u(a, y) = V$ per ogni $y \in [0, b]$, $u(x, 0) = u(x, b) = Vx/a$ per ogni $x \in [0, a]$.

Soluzione 6.18: (suggerimento: $v(x, y) = u(x, y) - Vx/a$) $u(x, y) = Vx/a$, la soluzione non dipende da b quindi vale anche in una striscia infinita di larghezza a (condensatore a facce piane parallele).

Esercizio 6.19. Esempio di condizioni non omogenee. Si risolva l'equazione (6.2) nella regione $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq a, -b/2 \leq y \leq b/2\}$ con condizioni di Dirichelet $u(0, y) = 0$ e $u(a, y) = V$ per ogni $y \in [-b/2, b/2]$, $u(x, -b/2) = u(x, b/2) = V(x/a)^2$ per ogni $x \in [0, a]$.

Soluzione 6.19: (suggerimento: $v(x, y) = u(x, y) - Vx/a$)

$$u(x, y) = \frac{8V}{\pi^3} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n\pi - 1}{n^3 \sin(n\pi b/a)} \left[\cosh\left(n \frac{\pi}{a} y\right) \sinh\left(n \frac{\pi b}{a}\right) \right] \sin\left(n \frac{\pi}{a} x\right) + V \frac{x}{a}$$

la soluzione dipende da b , ma nel limite $b \rightarrow \infty$ il primo addendo converge uniformemente a zero (condensatore a facce piane parallele).

Esercizio 6.20. Il condensatore piano a facce parallele. Si risolva l'equazione (6.2) nella regione $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq a, -\infty \leq y \leq +\infty\}$ con condizioni di Dirichelet $u(0, y) = 0$ e $u(a, y) = V$ per ogni $y \in \mathbb{R}$.

Soluzione 6.20: (suggerimento: $u(x, y) = X(x)$) $u(x, y) = Vx/a$.

Esercizio 6.21. Si risolva l'equazione (6.2) nella regione $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$ con condizioni di Dirichelet $u(0, y) = u(a, y) = 0$ per ogni $y \in [0, b]$, $u(x, 0) = 0$ e $u(x, b) = V$ per ogni $x \in (0, a)$. Si verifichi che la soluzione è simmetrica rispetto all'asse $x = a/2$, ovvero $u(x, y) = u(a - x, y)$ per ogni $(x, y) \in D$ (suggerimento: si ricorda che per ogni $n \geq 1$ intero si ha $\sin[n(\pi - \alpha)] = (-1)^{n+1} \sin n\alpha$).

Soluzione 6.21: $u(x, y) = (2V/\pi) \sum_{n \geq 1} [(1 - \cos n\pi)/n \sinh(n\pi b/a)] \sinh(n\pi y/a) \sin(n\pi x/a)$.

Esercizio 6.22. Si risolva l'equazione (6.2) nella regione $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi\}$ con condizioni di Dirichelet $u(0, y) = 0$ per ogni $y \in [0, \pi]$, $u(\pi, y) = V$ per ogni $y \in (0, \pi)$, $u(x, 0) = 0$ per ogni $x \in [0, \pi]$, $u(x, \pi) = V$ per ogni $x \in (0, \pi)$. Si verifichi che la soluzione è simmetrica rispetto alla retta $y = x$, ovvero $u(x, y) = u(y, x)$ per ogni $(x, y) \in D$.

Soluzione 6.22:

$$u(x, y) = (2V/\pi) \sum_{n \geq 1} [(1 - \cos n\pi)/n \sinh(n\pi)] [\sinh(ny) \sin(nx) + \sinh(nx) \sin(ny)]$$

Esercizio 6.23. Si risolva l'equazione (6.2) in $D := [0, \pi] \times [0, \pi]$ con condizioni $u_x(0, y) = u_x(\pi, y) = 0$ per ogni $y \in [0, \pi]$ e $u(x, 0) = 0$ e $u(x, \pi) = f(x)$ per ogni $x \in [0, \pi]$, con f di classe C^∞ (le pareti $x = 0$ e $x = \pi$ sono isolate termicamente).

Soluzione 6.23: si trova

$$u(x, y) = a_0 y/2\pi + \sum_{n \geq 1} a_n [\sinh(ny)/\sinh(n\pi)] \cos(nx)$$

con $a_n = (2/\pi) \int_0^\pi dx f(x) \cos nx$ per ogni $n = 0, 1, 2, \dots$

Esercizio 6.24. Si risolva l'equazione (6.2) nella regione $D := [0, \pi] \times [0, b]$ con condizioni $u_y(x, 0) = 0$ e $u(x, b) = 0$ per ogni $x \in [0, \pi]$, $u(0, y) = 0$ e $u(\pi, y) = A$ per ogni $y \in (0, \pi)$.

Soluzione 6.24: $u(x, y) = (A/\pi)[x + 2 \sum_{n \geq 1} ((-1)^n/n) (\cosh(ny)/\cosh(nb)) \sin(nx)]$.

Esercizio 6.25. Si risolva l'equazione (6.2) nella regione $D := [0, a] \times [0, b]$, con $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, con le seguenti condizioni al bordo:

1. $u_x(0, y) = 0$, $u(a, y) = u(x, 0) = u(x, b) = 1$; 2. $u_x(0, y) = u(a, y) = u(x, 0) = 0$, $u(x, b) = 1$;
3. $u_y(x, 0) = u(x, b) = u(a, y) = 0$, $u(0, y) = 1$; 4. $u(0, y) = 1$, $u(a, y) = u(x, 0) = u(x, b) = 0$;
5. $u_y(x, 0) = u_y(x, b) = 0$, $u(0, y) = u(a, y) = 1$; 6. $u(0, y) = u(x, 0) = 1$, $u_x(a, y) = u_y(x, b) = 0$;
7. $u(0, y) = u(a, y) = 1$, $u_y(x, 0) = u(x, b) = 0$; 8. $u(0, y) = u(x, 0) = 1$, $u(a, y) = u(x, b) = 0$;

Esercizio 6.26. *i*) Si determini la distribuzione stazionaria di temperatura $u(x, y)$ nella lamina metallica quadrata $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi\}$ con condizioni al bordo

$$\begin{cases} u(0, y) = \frac{4y}{\pi^2}(y - \pi), & u(\pi, y) = \frac{4y}{\pi^2}(\pi - y) \quad \forall y \in [0, \pi] \\ u(x, 0) = 0, & u(x, \pi) = 0 \quad \forall x \in [0, \pi] \end{cases}$$

ii) Si faccia uno schizzo delle isoterme e si calcoli la temperatura sul segmento di equazione $x = \pi/2$. *iii*) Si risolva l'equazione

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} = 0$$

nella regione

$$E := \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \xi \leq \frac{\sqrt{2}}{2}\pi, -\xi \leq \eta \leq \xi\} \cup \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 : \frac{\sqrt{2}}{2}\pi \leq \xi \leq \sqrt{2}\pi, \xi - \sqrt{2}\pi \leq \eta \leq \sqrt{2}\pi - \xi\}$$

con condizioni al bordo

$$\begin{cases} u(\xi, \xi) = \frac{4}{\pi^2}\xi(2\xi - \sqrt{2}\pi) & \forall \xi \in [0, \frac{\sqrt{2}}{2}\pi] \\ u(\xi, \xi - \sqrt{2}\pi) = \frac{4}{\pi^2}\xi(\sqrt{2}\pi - 2\xi) & \forall \xi \in [\frac{\sqrt{2}}{2}\pi, \sqrt{2}\pi] \\ u(\xi, -\xi) = 0 & \forall \xi \in [0, \frac{\sqrt{2}}{2}\pi] \\ u(\xi, \sqrt{2}\pi - \xi) = 0 & \forall \xi \in [\frac{\sqrt{2}}{2}\pi, \sqrt{2}\pi], \end{cases}$$

riconducendosi al problema posto al punto *i*) mediante un opportuno cambiamento di variabili.

iv) Si risolva l'equazione

$$2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \quad (6.3)$$

per la funzione $v(x, y)$ nella regione $E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \pi, (x - \pi)/2 \leq y \leq x/2\}$ con condizioni al bordo

$$\begin{cases} u(0, y) = \frac{8}{\pi^2}y(2y + \pi) & \forall y \in [-\frac{\pi}{2}, 0] \\ u(\pi, y) = \frac{8}{\pi^2}y(\pi - 2y) & \forall y \in [0, \pi/2] \\ u(x, x/2) = u(x, (x - \pi)/2) = 0 & \forall x \in [0, \pi] \end{cases}$$

Suggerimento: si determini un cambiamento di variabili che porti in forma canonica l'equazione (6.3).

6.5. Equazione di Laplace: dominio a simmetria cilindrica

Esercizio 6.27. Si risolva l'equazione (6.2) nella regione $D := [1, b] \times [0, \pi]$ con condizioni di Dirichlet $u(\varrho, 0) = u(\varrho, \pi) = 0$ per ogni $\varrho \in [1, b]$, $u(1, \varphi) = 0$ e $u(b, \varphi) = V$ per ogni $\varphi \in [0, \pi]$.

Soluzione 6.27: $u(x, y) = (2V/\pi) \sum_{n \geq 1} [(1 - \cos n\pi)/n(b^n - b^{-n})](\varrho^n - \varrho^{-n}) \sin(n\varphi)$.

Esercizio 6.28. Condensatore cilindrico. Si risolva l'equazione (6.2) nella regione $D := [a, b] \times [-\pi, \pi]$ con condizioni $u(a, \varphi) = 0$ e $u(b, \varphi) = V$ per ogni $\varphi \in [0, \pi]$, $u(\varrho, -\pi) = u(\varrho, \pi)$ e $u_\varphi(\varrho, -\pi) = u_\varphi(\varrho, \pi)$ (condizioni periodiche sulla funzione e sulla derivata rispetto a φ nella coordinata φ).

Soluzione 6.28: si risolva l'esercizio in due modi $u(\varrho, \varphi) = R(\varrho)$ e $u(\varrho, \varphi) = R(\varrho)\Phi(\varphi)$, si ottiene $u(\varrho, \varphi) = V \log(\varrho/a) / \log(b/a)$.

Esercizio 6.29. Si risolva l'equazione (6.2) nella regione $D := [0, a] \times [0, \pi]$ con condizioni $u(a, \varphi) = f(\varphi)$ per ogni $\varphi \in [0, \pi]$, con $f \in C^\infty([0, \pi])$, e $u_\varphi(\varrho, 0) = u_\varphi(\varrho, \pi) = 0$ per ogni $\varrho \in [0, a]$ (le pareti $\varphi = 0$ e $\varphi = \pi$ sono isolate termicamente).

Soluzione 6.29: posto $\psi_0(\varphi) = 1/\sqrt{\pi}$, $\psi_n(\varphi) = \sqrt{2/\pi} \cos n\varphi$, per $n \geq 1$, e $\langle \psi_n, f \rangle = \int_0^\pi d\varphi f(\varphi)\psi_n(\varphi)$ per $n \geq 0$, la soluzione si scrive

$$u(\varrho, \varphi) = \langle \psi_0, f \rangle \psi_0(\varphi) + \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{\varrho}\right)^n \langle \psi_n, f \rangle \psi_n(\varphi) \quad .$$

Esercizio 6.30. Si risolva l'equazione (6.2) nella regione $D := [1, b] \times [0, \pi/2]$ con condizioni $u(1, \varphi) = 0$ per ogni $\varphi \in [0, \pi/2]$, $u(b, \varphi) = f(\varphi)$ per ogni $\varphi \in [0, \pi/2]$, con $f \in C^\infty([0, \pi])$, e $u_\varphi(\varrho, 0) = u_\varphi(\varrho, \pi/2) = 0$ per ogni $\varrho \in [1, b]$ (le pareti $\varphi = 0$ e $\varphi = \pi$ sono isolate termicamente).

Soluzione 6.30: $u(\varrho, \varphi) = a_0 \log \varrho/2 \log b + \sum_{n \geq 1} a_n [(\varrho^{2n} - \varrho^{-2n}) / (b^{2n} - b^{-2n})] \cos 2n\varphi$, ove i coefficienti a_n sono dati da $a_n = (4/\pi) \int_0^{\pi/2} d\varphi f(\varphi) \cos 2n\varphi$ per ogni $n = 0, 1, 2, \dots$.

Esercizio 6.31. Si risolva l'equazione (6.2) nella regione $D := [0, a] \times [0, \alpha]$ ($\alpha < \pi$) con condizioni $u(\varrho, 0) = u(\varrho, \alpha) = 0$ per ogni $\varrho \in [0, a]$, $u(a, \varphi) = f(\varphi)$ per ogni $\varphi \in [0, \alpha]$, con $f \in C^\infty([0, \alpha])$.

Soluzione 6.31: $u(\varrho, \varphi) = \sum_{n \geq 1} a_n (\varrho/a)^{n\pi/\alpha} \sin(n\pi\varphi/\alpha)$, con $a_n = (2/\alpha) \int_0^\alpha d\varphi f(\varphi) \sin(n\pi\varphi/\alpha)$ per ogni $n = 1, 2, \dots$.

6.6. Equazione di Helmholtz

Esercizio 6.32. Si risolva l'equazione agli autovalori per l'operatore laplaciano nel piano, ovvero si determinino $E \in \mathbb{R}$ e $u : D \rightarrow \mathbb{R}$, con $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi\}$ e $u(x, 0) = u(x, \pi) = 0$ per ogni $x \in [0, \pi]$ e $u(0, y) = u(\pi, y) = 0$ per ogni $y \in [0, \pi]$, tali che $\Delta u(x, y) = Eu(x, y)$.

Soluzione 6.32: $E = -(n^2 + m^2)$ per ogni $n, m \in \mathbb{N}^*$ e $u_{n,m}(x, y) = \sin(nx) \sin(my)$.

Esercizio 6.33. Sia $E \in \mathbb{R}$, si risolva $\Delta u = Eu$ in $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi\}$ con condizioni al bordo $u(x, 0) = 0$ e $u(x, \pi) = \sin x$ per ogni $x \in [0, \pi]$ e $u(0, y) = u(\pi, y) = 0$ per ogni $y \in [0, \pi]$.

Soluzione 6.33: la soluzione assume forma diversa a seconda del valore del numero reale E ; si ha:

$$u(x, y) = \begin{cases} \sin(\sqrt{|E+1|}y) \sin x / \sin(\sqrt{|E+1|}\pi) & E < -1 \\ (1/\pi)y \sin x & E = -1 \\ \sinh(\sqrt{E+1}y) \sin x / \sinh(\sqrt{E+1}\pi) & E > -1 \end{cases}$$

6.7. Equazione delle onde: corda illimitata e semi-illimitata

Si dice che una grandezza fisica $u = u(\vec{x}, t)$, con $\vec{x} = (x, y, z)$, ha un comportamento ondulatorio se e solo se la sua evoluzione è descritta dall'equazione di d'Alambert

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y, z, t) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y, z, t) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(x, y, z, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, y, z, t) = 0 \quad (6.4)$$

ovvero $\Delta u - \partial^2 u / \partial t^2 = 0$. Nel seguito si studieranno alcuni problemi al contorno relativi all'equazione (6.4) in dimensione uno.

Date due funzioni $u_0, v_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sufficientemente regolari, sia $D := \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}, t \geq 0\}$ si dimostra che il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = 0 & \forall (x, t) \in D \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = v_0(x) & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (6.5)$$

ammette l'unica soluzione

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[u_0(x - ct) + u_0(x + ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} v_0(s) ds \quad (6.6)$$

detta soluzione di d'Alambert.

Nel caso della corda semi-limitata con estremo fisso nell'origine e con profili iniziali $u_0(x)$ e $v_0(x)$ dati sulla semiretta $x \geq 0$, la soluzione di d'Alambert continua a essere valida purché u_0 e v_0 vengano prolungati per disparità a tutto \mathbb{R} .

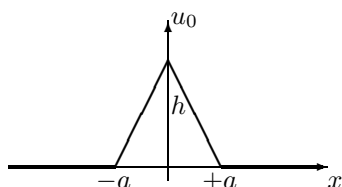
Esercizio 6.34. Si ricavi la soluzione di d'Alambert (6.6) per il problema di Cauchy (6.5).

Esercizio 6.35. Si scriva l'unica soluzione del problema di Cauchy (6.5) nei casi seguenti:

1. $u_0(x) = 2 \sin x \cos x$, $v_0(x) = \cos x$;
2. $u_0(x) = x \sin x$, $v_0(x) = \cos 2x$;
3. $u_0(x) = 1/(1 + x^2)$, $v_0(x) = e^x$;
4. $u_0(x) = e^{-x}$, $v_0(x) = 1/(1 + x^2)$;
5. $u_0(x) = \cos(\pi x/2)$, $v_0(x) = \sinh(ax)$ con $a \in \mathbb{R}$;
6. $u_0(x) = \sin 3x$, $v_0(x) = \sin 2x - \sin x$.

Soluzione 6.35: soluzione dei primi due problemi: 1. $u(x, t) = \sin 2x \cos(4ct) + (1/2c) \cos x \sin(2ct)$; 2. $u(x, t) = x \sin x \cos(3ct) + 3ct \cos x \sin(3ct) + (1/6c) \cos 2x \sin(6ct)$.

Esercizio 6.36. La corda illimitata è eccitata dalla condizione iniziale $u_0(x)$ in figura e $v_0(x) = 0$. Le costanti reali h e a sono positive.



Si disegni il profilo ottenuto come unica soluzione del problema di Cauchy (6.5) agli istanti di tempo

$$t_k = k \frac{a}{4c}$$

per $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

Esercizio 6.37. La corda illimitata è eccitata dalla condizione iniziale sulla velocità $v_0(x) = 0$ e dal profilo iniziale

$$u_0(x) = \begin{cases} h(a^2 - x^2)/a^2 & |x| \leq a \\ 0 & |x| \geq a \end{cases}$$

con $a, h \geq 0$. Si determini il profilo al tempo $t \geq 0$ e la legge del moto dell'elemento della corda di ascissa $x \in \mathbb{R}$.

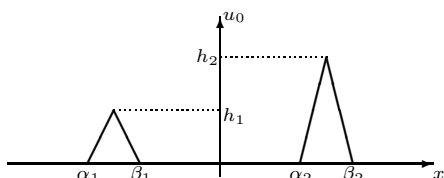
Soluzione 6.37: vanno distinti due casi. Nel caso $t \geq a/c$ si ha

$$u(x, t) = \begin{cases} 0 & -\infty < x < -ct - a \\ h[a^2 - (x + ct)^2]/(2a^2) & -ct - a \leq x < -ct + a \\ 0 & -ct + a \leq x < ct - a \\ h[a^2 - (x - ct)^2]/(2a^2) & ct - a \leq x < ct + a \\ 0 & ct + a \leq x < +\infty \end{cases}$$

mentre nel caso $0 \leq t \leq a/c$ si ha

$$u(x, t) = \begin{cases} 0 & -\infty < x < -ct - a \\ h[a^2 - (x + ct)^2]/(2a^2) & -ct - a \leq x < ct - a \\ h[1 - (x^2 + c^2t^2)/a^2] & ct - a \leq x < -ct + a \\ h[a^2 - (x - ct)^2]/(2a^2) & -ct + a \leq x < ct + a \\ 0 & ct + a \leq x < +\infty \end{cases}$$

Esercizio 6.38. La corda illimitata è eccitata dalla condizione iniziale $u_0(x)$ in figura e $v_0(x) = 0$. Le costanti reali $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, h_1, h_2$ sono positive.



Si determini in quale punto e in quale istante la deviazione della corda risulta massima. Si determini il valore massimo della deviazione.

Soluzione 6.38: deviazione massima $(h_1 + h_2)/2$, all'istante $t = [\alpha_2 - \alpha_1 + \beta_2 - \beta_1]/(4c)$ e alla posizione $x = [\alpha_2 + \alpha_1 + \beta_2 + \beta_1]/4$.

Esercizio 6.39. Al segmento $-a \leq x \leq +a$, con $a \in \mathbb{R}_+$, di una corda illimitata con profilo iniziale $u_0(x) = 0$ è trasmessa la velocità costante v_0 . All'esterno di tale segmento la velocità iniziale è nulla. Si determini il profilo della corda all'istante $t \geq 0$ e si disegni tale profilo agli istanti $t_k = ka/(4c)$ con $k = 0, 2, 4, 6$.

Esercizio 6.40. All'istante iniziale una corda illimitata riceve nel punto $x = 0$ un colpo trasversale che le trasmette impulso I . Si giustifichi la scelta $v_0(x) = (I/\varrho)\delta(x)$, ove ϱ è la densità di massa della corda, e si determini il profilo della corda all'istante $t \geq 0$ supponendo $u_0(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Soluzione 6.40: fisso $t \geq 0$, $u(x, t) = I/(2\varrho c)$ per le ascisse x tali che $-ct < x < ct$ e $u(x, t) = 0$ zero altrove.

Esercizio 6.41. Si risolva il problema di Cauchy $u(x, 0) = u_0(x)$ e $u_t(x, 0) = v_0(x)$ per la seguente equazione differenziale alle derivate parziali del secondo ordine quasilineare:

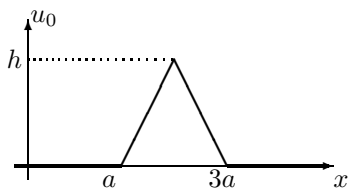
$$\beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

con $\alpha = 2V$, $\beta = V^2 - g\tau/\varrho$ e le costanti $V, \varrho, g, \tau \in \mathbb{R}_+$.

Soluzione 6.41: posto $\lambda_1 = -\beta/[V + \sqrt{g\tau/\varrho}]$ e $\lambda_2 = -\beta/[V - \sqrt{g\tau/\varrho}]$ si ha

$$u(x, t) = \frac{1}{2c}[\lambda_1 u_0(x + \lambda_1 t) - \lambda_2 u_0(x + \lambda_2 t)] + \frac{1}{2c} \int_{x+\lambda_1 t}^{x+\lambda_2 t} v_0(s) ds$$

Esercizio 6.42. La corda semi-illimitata fissata nell'origine è eccitata dalla condizione iniziale $u_0(x)$ in figura e $v_0(x) = 0$. Le costanti reali h e a sono positive.



Si disegni il profilo ottenuto come unica soluzione del problema di Cauchy agli istanti di tempo

$$t_1 = \frac{a}{c}, t_2 = \frac{3a}{2c}, t_3 = \frac{2a}{c} \quad \text{e} \quad t_4 = \frac{7a}{2c}$$

Esercizio 6.43. Una corda semi-illimitata con estremo fisso nell'origine riceve all'istante $t = 0$ un colpo trasversale che trasmette alla corda impulso I sul tratto $0 \leq x \leq 2\ell$ in modo che il profilo iniziale della velocità in $[0, 2\ell]$ sia una semionda sinusoidale. Si determini il profilo della corda $u(x, t)$ per $t \geq 0$ supponendo che $u(x, 0) = 0$ per ogni $x \geq 0$.

Soluzione 6.43: si pone $A = -\pi I/(4\ell)$; per $0 < x < 2\ell$ si ha il profilo

$$u(x, t) = \begin{cases} -[2A\ell/(\pi c)] \sin[\pi x/(2\ell)] \sin[ct/(2\ell)] & 0 < t < (2\ell - x)/c \\ +[2A\ell/(\pi c)] \cos^2[\pi(x - ct)/(4\ell)] & (2\ell - x)/c < t < (2\ell + x)/c \\ 0 & (2\ell + x)/c \leq t < +\infty \end{cases}$$

e per $2\ell < x, +\infty$ si ha

$$u(x, t) = \begin{cases} 0 & 0 < t < (-2\ell + x)/c \\ +[2A\ell/(\pi c)] \cos^2[\pi(x - ct)/(4\ell)] & (-2\ell + x)/c < t < (2\ell + x)/c \\ 0 & (2\ell + x)/c \leq t < +\infty \end{cases}$$

Esercizio 6.44. Una corda semi-illimitata con estremo fisso nell'origine riceve all'istante $t = 0$ un colpo trasversale che trasmette alla corda impulso I nel punto x_0 . Si determini il profilo della corda $u(x, t)$ per $t \geq 0$ supponendo che $u(x, 0) = 0$ per ogni $x \geq 0$.

Soluzione 6.44: si definisce la funzione θ di Heaviside

$$\theta(y) = \begin{cases} 0 & -\infty < y < 0 \\ 1 & 0 < y < +\infty \end{cases} \quad (6.7)$$

Allora la soluzione può essere posta nella forma: $u(x, t) = [I/(2c\varrho)]\{\theta(x - x_0 + ct) - \theta(x - x_0 - ct) - \theta(x + x_0 + ct) + \theta(x + x_0 - ct)\}$.

Esercizio 6.45. Si risolva l'Esercizio 6.44 supponendo che l'impulso iniziale I sia trasmesso ai punti $x_n > x_{n-1} > \dots > x_1 > 0$.

Soluzione 6.45: ricordando la definizione (6.7) la soluzione può essere posta nella forma:

$$u(x, t) = \frac{I}{2c\varrho} \sum_{k=1}^n \{\theta(x - x_k + ct) - \theta(x - x_k - ct) - \theta(x + x_k + ct) + \theta(x + x_k - ct)\}$$

Esercizio 6.46. Si consideri una corda semi-illimitata, tesa e con origine fissa, lungo cui le oscillazioni trasversali si propagano con velocità di fase 1. Si supponga che all'istante iniziale tutti gli elementi della corda siano a riposo e che il profilo iniziale (nella regione $x \geq 0$) sia dato dalla funzione $u_0(x) = 2$ per $x \in [3, 4]$ e $u_0(x) = 0$ altrove. Si determini il profilo della corda agli istanti $t = 2, 4, 6, 8$. Si disegni il grafico della posizione degli elementi $x = 2$ e $x = 5$ in funzione del tempo.

Esercizio 6.47. Si consideri una corda illimitata, tesa e con origine fissa, lungo cui le oscillazioni trasversali si propagano con velocità di fase 1. Si supponga che all'istante iniziale la corda giaccia lungo l'asse x e che tutti gli elementi della corda siano a riposo a eccezione di quelli nell'intervallo $[0, 1]$ i quali hanno velocità trasversale 1. Si determini il profilo della corda in funzione del tempo nei punti di ascissa $x = 1/4, 1/2, 5$.

6.8. Equazione delle onde: corda e sbarra limitata

L'equazione di d'Alambert su $D := \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \ell, t \geq 0\}$ descrive diversi fenomeni oscillatori:

1. piccole oscillazioni di una corda tesa di lunghezza e densità a riposo ℓ e ρ e tensione τ . In questo caso la velocità di fase dell'equazione delle onde è $c = \sqrt{\tau/\rho}$. Condizioni ai limiti sensate sono condizioni di Cauchy

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = v_0(x) \quad \forall x \in [0, \ell] \quad (6.8)$$

e condizioni di Dirichelet

$$u(0, t) = u(\ell, t) = 0 \quad \forall t \geq 0$$

che traducono l'ipotesi fisica che gli estremi della corda siano fissi.

2. Oscillazioni longitudinali di una sbarra con estremi liberi e con modulo di Young E e densità ρ . In questo caso la velocità di fase è $c = \sqrt{E/\rho}$. Condizioni ai limiti sensate, oltre alle ovvie condizioni di Cauchy (6.8), sono le condizioni di Neumann:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(\ell, t) = 0 \quad \forall t \geq 0$$

che significano assenza di forze esterne agenti sugli estremi liberi della sbarra.

3. Nelle stesse ipotesi del punto precedente, se gli estremi sono fissati rigidamente le condizioni ai limiti da usare sono di Dirichelet:

$$u(0, t) = u(\ell, t) = 0 \quad \forall t \geq 0$$

4. Nelle stesse ipotesi del punto precedente, se gli estremi sono fissati elasticamente le condizioni ai limiti da usare sono miste:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) - hu(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(\ell, t) + hu(\ell, t) = 0 \quad \forall t \geq 0$$

ove $h = k/(ES)$, E modulo di Young della sbarra, S sezione trasversale, k modulo di Young dell'estremo.

Esercizio 6.48. Si risolva l'equazione differenziale

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad \text{in} \quad D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < \pi, t > 0\}$$

con condizioni di Dirichelet-Neumann $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ per ogni $t > 0$, $u(x, 0) = \sin x$ e $\partial u / \partial t(x, 0) = 0$.

Soluzione 6.48: $u(x, t) = \sin x \cos ct$.

Esercizio 6.49. Come l'Esercizio 6.48, con condizioni Dirichelet-Neumann $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ per ogni $t > 0$, $\partial u / \partial t(x, 0) = 0$ e

$$u(x, 0) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq \pi/2 \\ -x + \pi & \pi/2 \leq x \leq \pi \end{cases}.$$

Soluzione 6.49: $u(x, t) = \sum_{k=0}^{+\infty} [4(-1)^k / \pi(2k+1)^2] \sin(2k+1)x \cos(2k+1)ct$.

Esercizio 6.50. Come l'Esercizio 6.48, con condizioni Dirichelet–Neumann $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ per ogni $t > 0$, $u(x, 0) = 0$ e $\partial u / \partial t(x, 0) = b \sin x$, con $b \in \mathbb{R}$.

Soluzione 6.50: $u(x, t) = (b/c) \sin x \sin ct$.

Esercizio 6.51. Come l'Esercizio 6.48, con condizioni Dirichelet–Neumann $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ per ogni $t > 0$, $u(x, 0) = 0$ e

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq x_0 - a \\ bx/a + (a - x_0)b/a & x_0 - a \leq x \leq x_0 \\ -bx/a + (a + x_0)b/a & x_0 \leq x \leq x_0 + a \\ 0 & x_0 + a \leq x \leq \pi \end{cases},$$

con $x_0 \in (0, \pi)$ e $a \in \mathbb{R}$ tale che $0 < a \leq \min(x_0, \pi - x_0)$.

Soluzione 6.51: $u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} [4 \sin nx_0 (1 - \cos na) / \pi a c n^3] \sin nx \cos nct$, si osservi che l'ampiezza dell'armonica n -esima decade come $1/n^3$.

Esercizio 6.52. Si risolva il problema di Cauchy (6.8) per la corda limitata di lunghezza π e con estremi fissi nei seguenti casi

1. $u_0(x) = 0, v_0(x) = 1$;
2. $u_0(x) = 1, v_0(x) = 0$;
3. $u_0(x) = 3hx/(2\pi)$ se $0 \leq x \leq 2\pi/3$, $u_0(x) = 3h(\pi - x)/\pi$ se $2\pi/3 \leq x \leq \pi$, $v_0(x) = 0$;
4. $u_0(x) = \sin^3 x, v_0(x) = 0$;
5. $u_0(x) = \sin x, v_0(x) = 0$ se $0 \leq x \leq \pi/4$, $v_0(x) = a$ se $\pi/4 < x < 3\pi/4$, e anche $v_0(x) = 0$ se $3\pi/4 \leq x \leq \pi$;

Soluzione 6.52: 1. $u(x, t) = [4/(c\pi)] \sum_{n \geq 1} [1/(2n - 1)^2] \sin[(2n - 1)x] \sin[(2n - 1)ct]$.

2. $u(x, t) = [4/\pi] \sum_{n \geq 1} [1/(2n - 1)] \sin[(2n - 1)x] \sin[(2n - 1)ct]$.

3. $u(x, t) = [9h/\pi^2] \sum_{n \geq 1} [1/n^2] \sin(2n\pi/3) \sin(nx) \sin(nct)$.

4. $u(x, t) = [3/4] \sin x \cos(ct) - [1/4] \sin(3x) \cos(3ct)$.

5. $u(x, t) = \sin x \cos(ct) + [4a/(c\pi)] \sum_{n \geq 1} [(-1)^n / (2n - 1)^2] \sin[(2n - 1)\pi/4] \sin(nx) \sin(nct)$.

Esercizio 6.53. Si confrontino, risolvendo il problema di Cauchy (6.8) in $D = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \ell, t \geq 0\}$, le vibrazioni dei seguenti strumenti a corda:

1. arpa: $u_0(x) = \beta x/a$ se $0 \leq x \leq a$, $u_0(x) = \beta(\ell - x)/(\ell - a)$ se $a \leq x \leq \ell$, $v_0(x) = 0$;
2. pianoforte: $u_0(x) = 0, v_0(x) = \mu$ se $a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$, $v_0(x) = 0$ altrove, con $\varepsilon \ll 1$;
3. violino: $u_0(x) = 0$ e $v_0(x) = 4\beta c(\ell - x)/\ell^2$.

Soluzione 6.53: per l'arpa si ottiene

$$u(x, t) = \frac{2\beta\ell^2}{\pi^2 a(\ell - a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \left[\frac{n\pi a}{\ell} \right] \sin \left[\frac{n\pi x}{\ell} \right] \sin \left[\frac{n\pi ct}{\ell} \right]$$

Per il pianoforte si trova:

$$u(x, t) = \frac{4\mu\ell}{\pi^2 c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \left[\frac{n\pi\varepsilon}{\ell} \right] \sin \left[\frac{n\pi a}{\ell} \right] \sin \left[\frac{n\pi x}{\ell} \right] \sin \left[\frac{n\pi ct}{\ell} \right]$$

Per il violino si trova:

$$u(x, t) = \frac{8\beta}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \left[\frac{n\pi x}{\ell} \right] \sin \left[\frac{n\pi ct}{\ell} \right]$$

Esercizio 6.54. Un corda di lunghezza ℓ con estremi fissati rigidamente è perturbata da un colpo di un martelletto acuto che le trasferisce impulso I nel punto x_0 . Trovare la deviazione della corda $u(x, t)$ se la deviazione iniziale è nulla.

Soluzione 6.54: $u(x, t) = [2I/(\rho c)] \sum_{n \geq 1} \sin(n\pi x_0/\ell) \sin(n\pi x/\ell) \sin(n\pi ct/\ell)$.

Esercizio 6.55. Propagazione ondosa in un mezzo dispersivo. Si risolva l'equazione differenziale

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \beta \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad \text{in } D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < \pi, t > 0\}$$

ove $0 < \beta < 2/c$, con condizioni di Dirichelet–Neumann $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ per ogni $t > 0$, $u(x, 0) = \sin x$ e $\partial u/\partial t(x, 0) = 0$.

Soluzione 6.55: $u(x, t) = \exp\{-\beta c^2 t/2\} [\cos(\delta t/2) + (\beta c^2/\delta) \sin(\delta t/2)] \sin x$, ove si è introdotto il parametro $\delta = \sqrt{\beta^2 c^4 - 4c^2}$.

Esercizio 6.56. Propagazione ondosa forzata. Si risolva l'equazione differenziale

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = A \sin \omega t \quad \text{in } D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < \pi, t > 0\}$$

ove $A, \omega \in \mathbb{R}$, con condizioni di Dirichelet–Neumann $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ per ogni $t > 0$, $u(x, 0) = 0$ e $\partial u/\partial t(x, 0) = 0$.

Soluzione 6.56: $\omega_n = n\pi c/a$, se esiste N tale che $\omega_N = \omega$ (condizione di risonanza) allora la soluzione è data da

$$u(x, t) = \frac{4Ac^2}{\pi} \sum_{\substack{n \geq 1, n \neq N \\ n \text{ dispari}}} \frac{1}{n(\omega_n^2 - \omega^2)} \left(\sin \omega t - \frac{\omega}{\omega_n} \sin \omega_n t \right) \sin n \frac{\pi}{a} x + \frac{2Ac^2}{N\omega\pi} \left(\frac{1}{\omega} \sin \omega t - t \cos \omega t \right) \sin N \frac{\pi}{a} x$$

Esercizio 6.57. Si risolva l'equazione differenziale

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = A \quad \text{in } D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < \pi, t > 0\}$$

ove $A \in \mathbb{R}$, con condizioni di Dirichelet–Neumann $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ per ogni $t > 0$, $u(x, 0) = 0$ e $\partial u/\partial t(x, 0) = 0$.

Soluzione 6.57: in questo caso non si verifica il fenomeno della risonanza, la soluzione è data da

$$u(x, t) = \frac{4A}{\pi} \left[\sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \text{ dispari}}} \frac{1}{n^3} \cos nct \sin nx - \sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \text{ dispari}}} \sin nx \right] = \frac{4A}{\pi} \sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \text{ dispari}}} \frac{1}{n^3} \cos nct \sin nx - \frac{1}{2} Ax(\pi - x)$$

Esercizio 6.58. Propagazione ondosa forzata. Si risolva l'equazione differenziale

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Ax \sin \omega t \quad \text{in } D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < \pi, t > 0\}$$

ove $A, \omega \in \mathbb{R}$, con condizioni di Dirichelet–Neumann $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ per ogni $t > 0$, $u(x, 0) = 0$ e $\partial u/\partial t(x, 0) = 0$.

Soluzione 6.58: $\omega_n = nc$, se per ogni $n = 1, 2, \dots$ si ha $\omega_n \neq \omega$ (assenza di risonanza) allora la soluzione è data da

$$u(x, t) = 2Ac^2 \sum_{n \geq 1} \frac{\cos n\pi}{n(\omega_n^2 - \omega^2)} \left(\sin \omega t - \frac{\omega}{\omega_n} \sin \omega_n t \right) \sin nx$$

Esercizio 6.59. Per effetto di una sollecitazione esterna periodica agente sull'elemento di ascissa $x_0 \in (0, \pi)$ di una corda di lunghezza π , l'equazione che descrive le vibrazioni della corda si scrive

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = \alpha \delta(x - x_0) \sin(4ct)$$

con $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Si supponga che gli estremi della corda siano fissi, $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ per ogni $t \geq 0$, e che la corda sia inizialmente a riposo, ovvero $u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0$ per ogni $x \in [0, \pi]$. Si risponda alle seguenti domande:

1. si determini la funzione $u(x, t)$ che descrive le vibrazioni della corda;
2. si dica se esistono valori di $x_0 \in (0, \pi)$ per i quali non si osserva il fenomeno della risonanza.

Esercizio 6.60. Un estremo di una sbarra di lunghezza ℓ , densità ρ e modulo di Young E è libero e l'altro è fissato rigidamente. Si determinino le vibrazioni longitudinali per condizioni iniziali di Cauchy arbitrarie.

Esercizio 6.61. Un estremo di una sbarra di lunghezza ℓ , densità ρ e modulo di Young E è libero e l'altro è fissato elasticamente. Si determinino le vibrazioni longitudinali per condizioni iniziali di Cauchy arbitrarie.

Soluzione 6.61: $u(x, t) = \sum_{n \geq 1} [a_n \cos(\lambda_n ct) + b_n \sin(\lambda_n ct)] \cos(\lambda_n x)$ dove si sono indicate con λ_n le radici positive dell'equazione $\lambda \tan(\lambda \ell) = h$. Si osserva che λ_n e $\cos(\lambda_n x)$ sono gli autovalori e le autofunzioni del seguente problema di Sturm–Liouville

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0 & 0 \leq x \leq \ell \\ X'(0) = 0, X'(\ell) + hX(\ell) = 0 \end{cases}$$

Esercizio 6.62. Una corda tesa di densità di massa e di tensione unitarie e di lunghezza π è vincolata a oscillare in un piano verticale con estremi fissi alla medesima quota. Si determini il profilo delle piccole oscillazioni della corda sapendo che all'istante iniziale tutti i suoi elementi hanno velocità nulla e che il profilo della corda, rispetto alla quota cui sono fissati gli estremi, è descritto dalla funzione $f(x) = 1$ per $x \in [x_0 - \pi/4, x_0 + \pi/4]$ e $f(x) = 0$ per $x \in [0, x_0 - \pi/4] \cup [x_0 + \pi/4, \pi]$, dove x_0 è un punto fissato dell'intervallo $(\pi/4, 3\pi/4)$. Si discutano le caratteristiche dello spettro delle armoniche eccitate al variare del parametro x_0 in $(\pi/4, 3\pi/4)$. Suggerimento: si ricorda che $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin[(\alpha + \beta)/2] \sin[(\alpha - \beta)/2]$.

Esercizio 6.63. Le vibrazioni longitudinali in una sbarra di lunghezza π sono descritte dall'equazione di d'Alambert $u_{xx} - u_{tt} = x \sin(2t)$. Si determini u sapendo che all'istante iniziale la sbarra è a riposo e che uno dei due estremi è libero mentre l'altro è fisso, cioè $u_x(0, t) = 0$ e $u(\pi, t) = 0$ per ogni $t \geq 0$.

6.9. Equazione delle onde: membrana rettangolare

Le vibrazioni di una membrana rettangolare di lati $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ sono descritte dall'equazione di d'Alambert in due dimensioni spaziali, ovvero nella regione $D := D_{\text{sp}} \times \mathbb{R}_+$ ove $D_{\text{sp}} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$. Condizioni al bordo sensate sono le seguenti:

$$\begin{cases} u(x, y, 0) = u_0(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) = v_0(x, y) & \forall (x, y) \in D_{\text{sp}} \\ u(0, y, t) = u(a, y, t) = 0 & \forall y \in [0, b], \forall t \in \mathbb{R}_+ \\ u(x, 0, t) = u(x, b, t) = 0 & \forall x \in [0, a], \forall t \in \mathbb{R}_+ \end{cases} \quad (6.9)$$

Esercizio 6.64. Si studino le vibrazioni della membrana rettangolare con le condizioni al bordo (6.9).

Soluzione 6.64: $u(x, y, t) = \sum_{n,m \geq 1} [a_{nm} \sin(\omega_{n,m}t) + b_{nm} \cos(\omega_{n,m}t)] \sin(n\pi x/a) \sin(m\pi y/b)$ ove

$$\omega_{nm} = - \left[\left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b} \right)^2 \right] \quad \text{e} \quad b_{nm} = \frac{4}{\pi^2} \int_0^\pi dx \int_0^\pi dy \sin(nx) \sin(my) u_0(x, y)$$

e a_{nm} è espresso in modo simile.

Esercizio 6.65. Si risolva l'Esercizio 6.64 nel caso $u_0(x, y) = 0$ e $v_0(x, y) = (I/\varrho)\delta(x - x_0)\delta(y - y_0)$ con $x_0 \in (0, a)$ e $y_0 \in (0, b)$.

Soluzione 6.65: stessa soluzione dell'Esercizio 6.64 con i coefficienti dati dalle espressioni seguenti $b_{nm} = 0$ per ogni $n, m \geq 1$ e $a_{nm} = [4I/(\varrho c \pi^2 \omega_{nm})] \sin(nx_0) \sin(my_0)$.

6.10. Equazione del calore: sbarra limitata

L'equazione del calore descrive i processi diffusivi: detta *costante di diffusione* il numero reale D si ha che l'osservabile fisica $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ è descritta dall'equazione

$$D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \quad (6.10)$$

Alcuni esempi fisici: u è la temperatura in una sbarra unidimensionale e $D = \sqrt{k/c\varrho}$ ove k è la conduttività termica della sbarra, ϱ è la sua densità e c il suo calore specifico; u può rappresentare la densità di un fluido in una miscela e D è il coefficiente di diffusione.

Nel caso dell'interpretazione termica di (6.10) si può aggiungere un termine $f(x, t)$ che rappresenta la quantità di calore (energia termica), opportunamente normalizzata, introdotta nella sbarra per unità di tempo e di lunghezza. In questo caso si ha l'*equazione della conduzione termica*

$$D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + \frac{1}{c\varrho} f(x, t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \quad (6.11)$$

Le condizioni al bordo dipendono dal problema fisico in studio; consideriamo il caso della sbarra limitata di lunghezza ℓ . Le equazioni (6.10) e (6.11) vanno risolte in $D := \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \ell, t \geq 0\}$ con condizione di Cauchy $u(x, 0) = u_0(x)$ e con ulteriori condizioni al bordo che dipendono dal particolare problema fisico:

1. estremo 0 della sbarra a temperatura fissata $v_0(t)$: $u(0, t) = v_0(t)$ per ogni $t \geq 0$;
2. estremo ℓ della sbarra a temperatura fissata $v_0(t)$: $u(\ell, t) = v_0(t)$ per ogni $t \geq 0$;
3. estremo 0 della sbarra a contatto con una sorgente che fornisce alla sbarra energia termica per unità di tempo $Q(t)$. Allora $u_x(0, t) = -Q(t)/k$.
4. estremo ℓ della sbarra a contatto con una sorgente che fornisce alla sbarra energia termica per unità di tempo $Q(t)$. Allora $u_x(\ell, t) = Q(t)/k$.
5. estremo ℓ libero e irradiante in una regione a temperatura $\vartheta(t)$. Allora, detto $\lambda > 0$ il *coefficiente di scambio termico*, si ha la condizione al bordo $u_x(\ell, t) = -\lambda[u(\ell, t) - \vartheta(t)]$. Tale condizione è detta anche legge di Newton e il coefficiente λ è legato alla costante di Stefan.

Esercizio 6.66. Si risolva l'equazione (6.10) nella regione $D := [0, \ell] \times [0, +\infty)$ con condizioni al contorno $u_x(0, t) = u_x(\ell, t) = 0$ per ogni $t \geq 0$ (gli estremi della sbarra sono isolati termicamente) e condizione iniziale $u(x, 0) = u_0(x)$ per ogni $x \in [0, \ell]$, con $u_0 \in C^\infty([0, \ell])$. Si discuta il comportamento della soluzione per $t \rightarrow +\infty$.

Soluzione 6.66: si trova

$$u(x, t) = (1/\ell) \int_0^\ell dx u_0(x) + (2/\ell) \sum_{n \geq 1} \left(\int_0^\ell dx u_0(x) \cos(n\pi x/\ell) \right) \exp\{-kn^2\pi^2 t/a^2\} \cos(n\pi x/\ell)$$

Esercizio 6.67. Si risolva l'esercizio precedente con $u_0(x) = x$ e $\ell = 1$.

Esercizio 6.68. Si risolva l'esercizio precedente con $u_0(x) = x^2$ e $\ell = \pi$.

Esercizio 6.69. Si risolva l'equazione del calore con calore generato all'interno della sbarra, ovvero si risolva l'equazione (6.11) con $f(x, t) = a c \rho x$ e $a \in \mathbb{R}$, nella regione $D := [0, \pi] \times [0, +\infty)$. Si impongano le condizioni al contorno $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ per ogni $t \geq 0$ (gli estremi della sbarra sono a temperatura nulla) e condizione iniziale $u(x, 0) = 0$ per ogni $x \in [0, \pi]$. Si discuta il comportamento della soluzione per $t \rightarrow +\infty$.

Soluzione 6.69: $u(x, t) = (2a/k) \sum_{n \geq 1} (-1)^n/n^3 (1 - \exp\{-kn^2 t\}) \sin nx$, nel limite $t \rightarrow +\infty$ la soluzione tende a $u(x) = (a/6k)x(\pi^2 - x^2)$.

Esercizio 6.70. Propagazione del calore su un'anello. Si risolva l'equazione (6.10) nella regione $D := [-\pi, \pi] \times [0, +\infty)$ con condizioni al contorno $u(-\pi, t) = u(\pi, t) = 0$ e $u_x(-\pi, t) = u_x(\pi, t) = 0$ per ogni $t \geq 0$ condizione iniziale $u(x, 0) = A_0 + A_1 \cos(mx)$ con $A_0, A_1 \in \mathbb{R}$ e m un intero positivo fissato. Si discuta il comportamento della soluzione per $t \rightarrow +\infty$.

Soluzione 6.66: $u(x, t) = A_0 + A_1 \exp\{-km^2 t\} \cos(mx)$.

Esercizio 6.71. Si risolva l'equazione del calore (6.10) per la sbarra limitata di lunghezza π con le seguenti condizioni al bordo:

1. $u(x, 0) = a$ per ogni $x \in [0, \pi]$, $u(0, t) = 0$ e $u(\pi, t) = 0$ per ogni $t \geq 0$;
2. $u(x, 0) = \sin^3 x$ per ogni $x \in [0, \pi]$, $u(0, t) = 0$ e $u(\pi, t) = 0$ per ogni $t \geq 0$ (suggerimento: $\sin^3 x = [3 \sin x - \sin(3x)]/4$);
3. $u(x, 0) = \cos^2 x$ per ogni $x \in [0, \pi]$, $u_x(0, t) = 0$ e $u_x(\pi, t) = 0$ per ogni $t \geq 0$;
4. $u(x, 0) = x(\pi - x)$ per ogni $x \in [0, \pi]$, $u(0, t) = 0$ e $u(\pi, t) = 0$ per ogni $t \geq 0$;
5. $u(x, 0) = x^2 - \pi^2$ per ogni $x \in [0, \pi]$, $u_x(0, t) = 0$ e $u(\pi, t) = 0$ per ogni $t \geq 0$;
6. $u(x, 0) = x$ per ogni $x \in [0, \pi]$, $u_x(0, t) = 0$ e $u_x(\pi, t) = 0$ per ogni $t \geq 0$;
7. $u(x, 0) = \sin x$ per ogni $x \in [0, \pi]$, $u(0, t) = 0$ e $u(\pi, t) = 0$ per ogni $t \geq 0$;
8. $u(x, 0) = T_1$ per ogni $x \in [0, \pi]$, $u(0, t) = T_0$ e $u(\pi, t) = T_0$ per ogni $t \geq 0$;
9. $u(x, 0) = T_1 x/\pi$ per ogni $x \in [0, \pi]$, $u(0, t) = T_0$ e $u_x(\pi, t) = 0$ per ogni $t \geq 0$;
10. $u(x, 0) = T_0$ per ogni $x \in [0, \pi]$, $u_x(0, t) = \Delta T/\pi$ e $u_x(\pi, t) = \Delta T/\pi$ per ogni $t \geq 0$;
11. $u(x, 0) = T_1$ per ogni $x \in [0, \pi]$, $u(0, t) = T_0$ e $u_x(\pi, t) = 0$ per ogni $t \geq 0$.

Si discuta il significato fisico della soluzione, in particolari si studi il limite $t \rightarrow \infty$.

Soluzione 6.71: si riporta la soluzione dei due primi problemi.

1. $u(x, t) = [4a/\pi] \sum_{n \geq 1} [1/(2n - 1)] \sin[(2n - 1)x] \exp\{-D(2n - 1)^2 t\}$
2. $u(x, t) = (3/4) \sin x \exp\{-Dt\} - (1/4) \sin(3x) \exp\{-9Dt\}$

Esercizio 6.72. Si consideri una parete di spessore d e conducibilità termica k che separa un ambiente interno da uno esterno a temperatura T_0 . Si supponga che all'istante $t = 0$ la temperatura nella parete sia uniformemente uguale a T_0 e che alla parete interna venga trasmessa una quantità di calore H per unità di tempo. Si determini la temperatura all'interno della parete e si mostri che per tempi piccoli la temperatura sulla parete interna cresce come \sqrt{t} .

Soluzione 6.72: il problema ai limiti è $u(x, 0) = T_0$, $u(d, t) = T_0$ e $u_x(0, t) = -H/k$. La temperatura $u(x, t)$ è data da

$$u(x, t) = T_0 + \frac{Hd}{k} \left[1 - \frac{x}{d} - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos \left[\frac{(2n+1)\pi x}{2d} \right] e^{-(2n+1)^2 \pi^2 Dt / (4d^2)} \right]$$

Esercizio 6.73. Si consideri una sbarra rettilinea di lunghezza π , densità ρ , conducibilità termica k e calore specifico c . Si supponga che una sorgente di calore puntiforme posta a contatto con la sbarra nel punto di ascissa $\pi/2$ ceda alla sbarra una quantità di calore per unità di tempo pari a $Q > 0$. Si risponda alle seguenti domande:

1. si determini la temperatura $u(x, t)$ all'interno della sbarra supponendo che all'istante iniziale la temperatura nella sbarra sia nulla e che gli estremi della sbarra siano mantenuti a temperatura nulla;
2. si discuta il limite di tempi grandi. In particolare si determini in quale punto si raggiunge la temperatura massima e si calcoli tale temperatura.
3. Facoltativo: si determini la distribuzione di temperatura $u(x, t)$ all'interno della sbarra supponendo che $u(x, 0) = 0$ per ogni $x \in [0, \pi]$, che l'estremo $x = 0$ sia isolato termicamente e quello $x = \pi$ sia mantenuto a temperatura nulla.

6.11. Equazione del calore: sbarra illimitata

Un caso interessante è anche quello in cui l'equazione (6.10) viene studiata su tutta la retta reale, ovvero in $D := \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}, t \geq 0\}$. In questo caso essa descrive il rilassamento della temperatura in una sbarra infinita; l'unica condizione al bordo sarà di tipo Cauchy, ovvero di tipo iniziale. Si ha, quindi, il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + \frac{1}{c\rho} f(x, t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) & \forall (x, t) \in D \\ u(x, 0) = u_0(x) & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (6.12)$$

La condizione di Cauchy in taluni casi va intesa in modo più debole, si richiede che $u(x, t)$ tenda alla condizione iniziale per $t \rightarrow 0$; ovvero $\lim_{t \rightarrow 0} u(x, t) = u_0(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Esercizio 6.74. Si risolva l'equazione del calore (6.10) per una sbarra illimitata con condizione iniziale $u(x, 0) = u_0(x)$ nei seguenti casi:

1. $u_0(x) = \delta(x)$;
2. $u_0(x) = T_0$ per $x > 0$ e $u_0(x) = -T_0$ per $x < 0$;
3. $u_0(x) = 1$ per $|x| < \ell$ e $u_0(x) = 0$ per $|x| \geq \ell$, con $\ell \in \mathbb{R}_+^*$;

4. $u_0(x) = \exp\{-\alpha|x|\}$ con $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$;

5. $u_0(x) = 0$ per $x < 0$, $u_0(x) = T_0$ per $0 < x < \ell$ e $u_0(x) = 0$ per $x > \ell$, con $\ell \in \mathbb{R}_+^*$.

Soluzione 6.74: 1. $u(x, t) = [1/(2D\sqrt{\pi t})] \exp\{-x^2/(4Dt)\}$; 2. la soluzione può essere ricondotta alla funzione errore

$$u(x, t) = \frac{2T_0}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x/\sqrt{4Dt}} e^{-y^2} dy$$

Esercizio 6.75. Si risolva l'equazione del calore (6.10) per una sbarra semi-illimitata, ovvero nella regione $D := \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, t \geq 0\}$ con le seguenti condizioni al bordo:

1. $u(x, 0) = T_0$ per $0 < x < \ell$, $u(x, 0) = 0$ per $x > \ell$, con $\ell \in \mathbb{R}_+^*$, e $u(0, t) = 0$ per ogni $t \geq 0$;

2. $u(x, 0) = T_0$ per $0 < x < \ell$, $u(x, 0) = 0$ per $x > \ell$, con $\ell \in \mathbb{R}_+^*$, e $u_x(0, t) = 0$ per ogni $t \geq 0$;

3. $u(x, 0) = T_0(1 - \exp\{-\alpha x\})$ per $x \geq 0$, con $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, e $u(0, t) = 0$ per ogni $t \geq 0$.

Bibliografia

- [1] G.B. Arfken, H.J. Weber, "Mathematical Methods for Physicist." Academic Press, 1995, San Diego, California.
- [2] V.I. Arnol'd, "Ordinary Differential Equations." Springer-Verlag, 1992.
- [3] E. Fermi, J. Pasta, S. Ulam, "Studies of the nonlinear problems, I", Los Alamos Report LA-1940 (1955).
- [4] G. Gentile, "Introduzione ai sistemi dinamici."
- [5] H. Goldstein, "Meccanica classica." Zanichelli, Bologna, 1982.
- [6] R. Grimshaw, "Nonlinear ordinary differential equation." Blackwell scientific publications, Oxford, 1990;
- [7] D.J. Korteweg, D. de Vries, *Philos. Mag.* **39**, 422 (1895).
- [8] N.J. Zabusky, M.D. Kruskal, *Phys. Rev. Lett.* **15**, 240 (1963).
- [9] M.D. Kruskal, N.J. Zabusky, "Stroboscopic perturbation procedure for treating a class of nonlinear wave equations," *Journ. Math. Phys.* **5**, 231-244 (1964).
- [10] Tullio Levi-Civita, Ugo Amaldi, "Lezioni di meccanica razionale." Zanichelli, Bologna, 1952.
- [11] L. Landau, E. Lifchitz, "Fisica teorica vol. 1, Meccanica." MIT, Mosca, 1964.
- [12] E. Olivieri, "Appunti di meccanica razionale." Aracne, Roma, 1991.

Indice

1. Equazioni differenziali ordinarie autonome del primo ordine	1
1.1. <i>Aspetti generali</i>	1
1.2. <i>Sistemi dinamici unidimensionali</i>	3
1.3. <i>Analisi grafica</i>	4
1.4. <i>Stima del tempo di percorrenza</i>	10
1.5. <i>Esistenza e unicità</i>	11
2. Equazioni differenziali ordinarie autonome di ordine superiore al primo	18
2.1. <i>Aspetti generali e teoremi fondamentali</i>	18
2.2. <i>Descrizione grafica e definizione di stabilità secondo Liapunov</i>	21
2.3. <i>Sistemi dinamici planari</i>	23
2.4. <i>Integrali primi</i>	28
2.5. <i>Stabilità dei punti fissi</i>	38
2.6. <i>Moti alla Poincaré: stabilità delle rotazioni permanenti</i>	59
3. Sistemi meccanici conservativi unidimensionali	64
3.1. <i>Teoremi di stabilità</i>	65
3.2. <i>Analisi grafica: ritratto di fase</i>	66
3.3. <i>Analisi grafica: tempi di percorrenza</i>	69
3.4. <i>Analisi grafica: periodo delle piccole oscillazioni</i>	72
3.5. <i>Moti centrali</i>	80
4. Introduzione alle equazioni alle derivate parziali	84
4.1. <i>Equazione di continuità per un fluido</i>	85
4.2. <i>Equazione del calore</i>	87
4.3. <i>Equazione di Laplace: distribuzione stazionaria della temperatura</i>	89
4.4. <i>Equazione di Laplace: potenziale elettrostatico nel vuoto</i>	89
4.5. <i>Equazione delle onde per il campo elettromagnetico</i>	90
4.6. <i>Equazione di d'Alambert per le onde elettromagnetiche piane</i>	91
4.7. <i>Equazione di d'Alambert per la corda sottile</i>	92
4.8. <i>Oscillazioni non lineari ed equazione di Burger</i>	94
4.9. <i>Oscillazioni non lineari ed equazione di Korteweg–de Vries</i>	96
5. Caratteristiche delle equazioni alle derivate parziali del primo ordine	97
5.1. <i>Equazioni differenziali alle derivate parziali lineari omogenee</i>	98
5.2. <i>Equazioni differenziali alle derivate parziali semilineari</i>	98
5.3. <i>Equazioni differenziali alle derivate parziali quasilineari</i>	99
6. Esercizi sulle equazioni alle derivate parziali del secondo ordine	100
6.1. <i>Classificazione e forma canonica</i>	101
6.2. <i>Alcuni semplici esempi preliminari</i>	102

6.3. <i>Equazione di Laplace: funzioni armoniche</i>	102
6.4. <i>Equazione di Laplace: dominio rettangolare</i>	103
6.5. <i>Equazione di Laplace: dominio a simmetria cilindrica</i>	105
6.6. <i>Equazione di Helmholtz</i>	106
6.7. <i>Equazione delle onde: corda illimitata e semi-illimitata</i>	106
6.8. <i>Equazione delle onde: corda e sbarra limitata</i>	109
6.9. <i>Equazione delle onde: membrana rettangolare</i>	113
6.10. <i>Equazione del calore: sbarra limitata</i>	114
6.11. <i>Equazione del calore: sbarra illimitata</i>	116

Bibliografia	117
---------------------	------------