TEOREMA DI WEIERSTRASS APPUNTI PER LE LEZIONI DEL CORSO DI ANALISI MATEMATICA I (L–Z) CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA AEROSPAZIALE

DANIELE ANDREUCCI
DIP. SCIENZE DI BASE E APPLICATE PER L'INGEGNERIA
UNIVERSITÀ LA SAPIENZA
VIA A.SCARPA 16, 00161 ROMA, ITALY

1. Limitatezza di funzioni continue

Lemma 1.1. *Sia* $f \in C([a,b])$*,* a*,* $b \in \mathbb{R}$*. Allora* f *è limitata su* $[a,b]$*.*

Dimostrazione. Se l'asserto non è vero, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste un punto $x_n \in [a,b]$ tale che

$$|f(x_n)| \geq n \,.$$

È noto dal teorema di Bolzano-Weierstrass che dalla successione $\{x_n\}$ si può estrarre una sottosuccessione convergente $x_{n_k} \to y \in [a,b]$, per $k \to \infty$.
Tuttavia per la continuità di f, esiste un $\delta > 0$ tale che

$$|f(x)| \leq |f(y)| + 1 \,, \qquad x \in [y-\delta, y+\delta] \cap [a,b] =: I_\delta .$$

Per la convergenza $x_{n_k} \to y \in [a,b]$, si ha $x_{n_k} \in I_\delta$ per $k \geq k_\delta$ opportuno, e dunque

$$n_k \leq |f(x_{n_k})| \leq |f(y)| + 1 \,, \qquad k \geq k_\delta \,,$$

in contrasto con $n_k \to \infty$ per $k \to \infty$. □

Teorema 1.2. (Weierstrass) *Se* $f \in C([a,b])$*,* a*,* $b \in \mathbb{R}$*, allora*

$$\sup_{[a,b]} f = \max_{[a,b]} f \,, \qquad \inf_{[a,b]} f = \min_{[a,b]} f \,. \tag{1.1}$$

Dimostrazione. Basta dimostrare la prima delle (1.1), potendosi procedere in modo analogo per la seconda.
Se per assurdo

$$M := \sup_{[a,b]} f > f(x) \,, \qquad \text{per ogni } a \leq x \leq b,$$

osservato che $M < \infty$ per il Lemma 1.1, poniamo

$$g(x) = \frac{1}{M - f(x)}\,, \qquad \text{per ogni } a \leq x \leq b.$$

Si noti che $g \in C([a,b])$ in quanto quoziente di funzioni continue con denominatore ovunque diverso da zero (nella nostra ipotesi di assurdo). Applicando ancora il Lemma 1.1 si ha

$$g(x) \leq C\,, \qquad \text{per ogni } a \leq x \leq b,$$

per una opportuna $C > 0$. Allora si ottiene subito

$$f(x) \leq M - \frac{1}{C} < M\,,$$

contro la definizione di M. $\square$