

**DIARIO DELLE LEZIONI DEL CORSO DI
MECCANICA RAZIONALE A.A. 2024-2025
CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA**

DANIELE ANDREUCCI
DIP. SCIENZE DI BASE E APPLICATE PER L'INGEGNERIA
UNIVERSITÀ LA SAPIENZA
VIA A.SCARPA 16, 00161 ROMA, ITALY

Le dimostrazioni fanno parte del programma, salvo che quando viene esplicitamente indicato il contrario con il simbolo (s.d.).

I richiami al testo MMM si riferiscono al testo *Meccanica Razionale, Modelli Matematici per l'Ingegneria*, D. Andreucci, (Independently published (5 settembre 2022) disponibile su www.amazon.it).

La numerazione n/m relativa agli esercizi si riferisce all'esercizio n del gruppo m , nella raccolta pubblicata sul sito del corso prima dell'inizio del corso.

1. MARTEDÌ 24/09/2024
(AULA 14: 15-17)

Presentazione del corso.

Basi ortonormali. Matrici di cambiamento di base $\mathbf{\Gamma}_{\mathcal{MN}}$. Si ha $\mathbf{\Gamma}_{\mathcal{MN}} = \mathbf{\Gamma}_{\mathcal{NM}}^t$.

Teorema 1.1. (s.d.) *Se $\mathbf{a}$ ha componenti $\boldsymbol{\lambda}$ in $\mathcal{M}$ e $\boldsymbol{\mu}$ in $\mathcal{N}$, allora $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{\Gamma}_{\mathcal{MN}}\boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{\Gamma}_{\mathcal{NM}}\boldsymbol{\lambda}$.*

Definizione di matrice ortogonale.

Teorema 1.2. (s.d.) *Le matrici di cambiamento di base sono ortogonali: $\mathbf{\Gamma}_{\mathcal{MN}} = (\mathbf{\Gamma}_{\mathcal{NM}})^{-1}$. Quindi il loro determinante ha valore assoluto pari a 1.*

Definizione di base ortonormale positiva.

Esercizio 1.3. Caratterizzazione delle matrici ortogonali in $\mathbf{R}^2$. □

Per casa 1.4. Si considerino la base ortonormale standard ($\mathbf{e}_h$) e quella data da:

$$\mathbf{u}_1 = \frac{5}{6}\mathbf{e}_1 + \frac{\sqrt{11}}{6}\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{u}_2 = -\frac{\sqrt{11}}{6}\mathbf{e}_1 + \frac{5}{6}\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{u}_3 = \mathbf{e}_3.$$

Si esprima il vettore

$$\mathbf{a} = \alpha\mathbf{e}_1 + \beta\mathbf{e}_2 + \gamma\mathbf{e}_3$$

nella base ($\mathbf{u}_h$), sia calcolando e usando la matrice di cambiamento di base, sia usando direttamente la definizione di ($\mathbf{u}_h$). □

Prodotto vettoriale e triplo in $\mathbf{R}^3$.

Teorema 1.5. *Se ($\mathbf{u}_h$) è una base ortonormale positiva di $\mathbf{R}^3$, allora*

$$\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_3, \quad \mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_3 = -\mathbf{u}_2, \quad \mathbf{u}_2 \times \mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_1.$$

Corollario 1.6. *Se ($\mathbf{u}_h$) è una base ortonormale positiva,*

$$\mathbf{a} = \sum_{h=1}^3 \alpha_h \mathbf{u}_h, \quad \mathbf{b} = \sum_{h=1}^3 \beta_h \mathbf{u}_h, \quad \text{si ha} \quad \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}.$$

Per casa 1.7. Si consideri la base ortonormale data da:

$$\mathbf{u}_1 = \frac{5}{6}\mathbf{e}_1 + \frac{\sqrt{11}}{6}\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{u}_2 = -\frac{\sqrt{11}}{6}\mathbf{e}_1 + \frac{5}{6}\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{u}_3 = \mathbf{e}_3.$$

Si calcoli il prodotto vettoriale

$$(3\mathbf{u}_1 + 7\mathbf{u}_2) \times (4\mathbf{u}_2 - 5\mathbf{u}_3).$$

□

Integrazione per separazione delle variabili. Uso nel caso di equazione differenziale $\dot{x} = x$.

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 9.1, 10.1, 10.2.

2. GIOVEDÌ 26/09/2024
(AULA 14: 14-17)

Teorema 2.1. (s.d.) *Composizione delle matrici del cambiamento di base:*
 $\Gamma_{\mathcal{MP}} = \Gamma_{\mathcal{MN}} \Gamma_{\mathcal{NP}}$.

Definizione di sistema di riferimento in $\mathbf{R}^3$. Cambiamento di coordinate.
Definizione di sistema di riferimento mobile in $\mathbf{R}^3$.

Esempio 2.2. 1) Moto $\mathbf{X}(t) = R\mathbf{e}_1$ nel sistema mobile $\mathcal{S}$ con origine mobile nell'origine del sistema fisso e base ruotante intorno all'asse $\mathbf{e}_3 = \mathbf{u}_3$:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_1 &= \cos(\alpha t) \mathbf{e}_1 + \sin(\alpha t) \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{u}_2 &= -\sin(\alpha t) \mathbf{e}_1 + \cos(\alpha t) \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{u}_3 &= \mathbf{e}_3.\end{aligned}$$

2) Moto $\mathbf{X}(t) = (L+ct)\mathbf{e}_1$ nel sistema mobile $\mathcal{S}$ dell'esempio precedente. $\square$

Definizione di velocità e accelerazione relativa a un sistema di riferimento mobile (usando la rappresentazione in coordinate nel sistema mobile).

Per casa 2.3. 1) Calcolare velocità e accelerazione relativa nell'Esempio precedente.

2) 5/100. $\square$

Derivata di un vettore relativa a una terna mobile (velocità e accelerazione relative).

Regole di derivazione per la derivata relativa; derivata relativa di uno scalare.

Teorema 2.4. *Data una terna mobile $(\mathbf{u}_h)$ esiste una unica funzione $\boldsymbol{\omega}$ tale che*

$$\frac{d\mathbf{u}_h}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}_h, \quad h = 1, 2, 3.$$

$\boldsymbol{\omega}$ si dice velocità angolare della terna.

Esercizio 2.5. La terna

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_1 &= \cos \varphi(t) \mathbf{e}_1 + \sin \varphi(t) \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{u}_2 &= -\sin \varphi(t) \mathbf{e}_1 + \cos \varphi(t) \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{u}_3 &= \mathbf{e}_3,\end{aligned}$$

ha $\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi} \mathbf{e}_3$. $\square$

Per casa 2.6. 9/340, 37/340

MMM/10.36 Trovare la velocità angolare della rotazione intorno a $\mathbf{u}_1$ e a $\mathbf{u}_2$. $\square$

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 10.2, 10.3, 10.4.

3. LUNEDÌ 30/09/2024
(AULA 14: 14-17)

Teorema 3.1. Per ogni $\mathbf{a} \in C^1(I)$ si ha

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \left[\frac{d\mathbf{a}}{dt} \right]_{\mathcal{M}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}.$$

Teorema del moto relativo sulla scomposizione della velocità nel sistema fisso. Velocità di trascinamento.

Teorema di Coriolis sulla scomposizione dell'accelerazione nel sistema fisso. Accelerazione di trascinamento e di Coriolis.

Per casa 3.2. 1) Calcolare le velocità e accelerazioni nell'esempio MMM/10.12.

2) MMM/10.43 (sistema di riferimento terrestre) □

Esercizio 3.3. 9/340, 1/340 □

Per casa 3.4. 15/340, 21/340, 24/340, 29/340, 4/350, 3/580, 5/580, 10/580 □

Teorema 3.5. La velocità angolare di $\mathcal{M}$ è costante in $\mathcal{M}$ se e solo se è costante; ha direzione costante in $\mathcal{M}$ se e solo se ha direzione costante.

Definizione di rotazione e rotazione costante per una terna. Definizione di moto polare, rotazione (e rotazione costante) e traslazione per un sistema mobile di riferimento.

Esercizio 3.6. Una terna si muove di rotazione (intorno a $\mathbf{u}_3$) se e solo se $\boldsymbol{\omega} = \alpha(t)\mathbf{u}_3$ o $\boldsymbol{\omega} = \alpha(t)\mathbf{e}_3$ (terna fissa e mobile coincidenti a $t = 0$).
MMM/10.44 □

Dinamica relativa; le forze apparenti di trascinamento e di Coriolis. Equilibrio relativo.

Esercizio 3.7. MMM/12.6 □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 10.4, 10.5, 10.6, 12.1.

4. MARTEDÌ 01/10/2024
(AULA 14: 15-17)

Velocità angolare relativa di una terna mobile rispetto a un'altra.

Teorema 4.1. *Date due terne mobili $\mathcal{N}$ e $\mathcal{M} = (\mathbf{u}_h)$ esiste un'unica $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}$ tale che*

$$\left[\frac{d\mathbf{u}_h}{dt} \right]_{\mathcal{N}} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}} \times \mathbf{u}_h.$$

Teorema 4.2. *Per ogni $\mathbf{a} \in C^1(I)$ si ha*

$$\left[\frac{d\mathbf{a}}{dt} \right]_{\mathcal{N}} = \left[\frac{d\mathbf{a}}{dt} \right]_{\mathcal{M}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}} \times \mathbf{a}.$$

Dalla definizione segue $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{M}\mathcal{M}} = 0$, $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}} = -\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{M}\mathcal{N}}$.

Teorema 4.3 (Composizione di velocità angolari). *Se $\mathcal{P}$, $\mathcal{N}$, $\mathcal{M}$ sono terne mobili, vale*

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{P}\mathcal{M}} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{P}\mathcal{N}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}.$$

Esercizio 4.4. MMM/10.62 Precessioni regolari

MMM/12.6 (punto materiale vincolato a ellisse scabra ruotante)

6/340

□

Per casa 4.5. 5/340, 26/340, 27/340

10/350

2/660

□

Il moto di un punto come funzione vettoriale. Grafico (linea di universo) e orbita (traiettoria) di un moto. Esempio di un moto di classe C^2 ma con orbita con uno spigolo:

$$\mathbf{X}(t) = t^3 \mathbf{e}_1 + |t|^3 \mathbf{e}_2.$$

Confronto con il caso del grafico di una funzione scalare.

Esercizio 4.6. Soluzione per separazione di variabili di $\dot{x} = -kx$.

□

Per casa 4.7. Dimostrare che se $x \in C^1(\mathbf{R})$, $\dot{x} \geq -kx$, $k > 0$, e $x(0) > 0$, allora $x(t) > 0$ per ogni $t > 0$.

MMM/1.9

Dimostrare che se $x \in C^1(\mathbf{R})$, $\dot{x} = -k\sqrt{x}$, $k > 0$, e $x(0) > 0$, allora $x(t) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow t_0 - < +\infty$.

□

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 1.1, 1.2, 10.7.

5. GIOVEDÌ 03/10/2024
(AULA 14: 14-17)

Definizione di retta tangente per la traiettoria di un moto (mediante la dipendenza da t).

Teorema 5.1. *La retta tangente e il vettore tangente sono unici.*

Teorema 5.2. *Se un moto ammette retta tangente, allora la sua derivata è il vettore tangente. Viceversa, se un moto ha derivata diversa da zero, allora ammette retta tangente.*

Definizione di punto materiale. Legge del moto.

Problema di Cauchy o ai valori iniziali. Funzioni localmente lipschitziane. Criterio di lipschitzianità mediante le derivate. Soluzioni massimali.

Teorema 5.3. (s.d.) *La soluzione massimale del problema di Cauchy per l'equazione $m\ddot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}, t)$ esiste ed è unica se $\mathbf{F}$ è continua in un aperto $A \subset \mathbf{R}^7$ e localmente lipschitziana rispetto a $\mathbf{X}$, $\dot{\mathbf{X}}$.*

Il suo intervallo di definizione (σ, Σ) è aperto e per $t \rightarrow \Sigma-$ si deve avere che $(t, \mathbf{X}(t), \dot{\mathbf{X}}(t))$ diventa illimitata oppure la sua distanza da ∂A tende a 0.

Esercizio 5.4. !) Risolvere i problemi di Cauchy

$$\dot{x} = x^2, \quad x(0) = x_0.$$

2) Non unicità per il problema

$$\dot{x} = -k\sqrt{|x|}, \quad x(\bar{t}) = 0,$$

in cui non è soddisfatta l'ipotesi di lipschitzianità. □

Per casa 5.5. 2/100, 3/100 □

Per casa 5.6. Consideriamo la curva data dall'intersezione di due superficie:

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = 0, \quad f_2(x_1, x_2, x_3) = 0;$$

dare una definizione di vettore tangente alla curva indipendente da una sua eventuale parametrizzazione (senza dimostrazioni).

1/100, 4/100 □

Esercizio 5.7. MMM/1.24: Risoluzione completa del problema

$$m\ddot{\mathbf{X}} = -k\mathbf{X}, \quad \mathbf{X}(0) = \mathbf{x}_0, \quad \dot{\mathbf{X}}(0) = \mathbf{v}_0.$$

□

Esercizio 5.8. MMM/1.25: Prima integrazione del problema

$$m\ddot{\mathbf{X}} = -\gamma m \frac{\mathbf{X}}{|\mathbf{X}|^3}, \quad \mathbf{X}(0) = L\mathbf{e}_1, \quad \dot{\mathbf{X}}(0) = -c\mathbf{e}_1.$$

Uso del teorema di unicità. L'intervallo di definizione è limitato a destra ($\Sigma < +\infty$). □

Per casa 5.9. 1) Trovare tutte le soluzioni di

$$\dot{X}_1 = -X_2, \quad \dot{X}_2 = X_1.$$

2) Riduzione del problema precedente in coordinate polari. □

6. LUNEDÌ 07/10/2024
(AULA 14: 14-17)

Energia cinetica T di un punto materiale.

Teorema 6.1 (del lavoro o dell'energia cinetica). *Se $m\ddot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}$, allora*

$$T(t_1) - T(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{X}} \, dt.$$

Per casa 6.2. MMM/1.45: Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{aligned} m\ddot{\mathbf{X}} &= \mathbf{B} \times \dot{\mathbf{X}}, \\ \mathbf{X}(0) &= L\mathbf{e}_1, \\ \dot{\mathbf{X}}(0) &= c\mathbf{e}_2. \end{aligned}$$

Qui $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_3$, $B > 0$, $L > 0$, $c > 0$. Integrale dell'energia cinetica. □

Riduzione di ordine di un sistema differenziale.

Dipendenza continua. Necessità di assumere intervalli limitati.

Esercizio 6.3. Il caso $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X})$, $\mathbf{F}$ globalmente lipschitziana. □

Esercizio 6.4. Integrale generale del sistema lineare a coefficienti costanti del primo ordine

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathcal{A}\mathbf{X},$$

nell'ipotesi che la matrice $\mathcal{A}$ abbia una base di autovettori. □

Per casa 6.5. Dimostrare la dipendenza continua per $m\ddot{\mathbf{X}} = -k\mathbf{X}$ e per $m\ddot{\mathbf{X}} = k\mathbf{X}$, $m, k > 0$.

MMM/1.49 □

Sistemi differenziali autonomi. Traslazione nel tempo delle soluzioni.

Definizione di punto di equilibrio $\mathbf{x}_{\text{eq}} \in \mathbf{R}^3$ per un sistema autonomo di primo o di secondo ordine.

Il punto $\mathbf{x}_{\text{eq}}$ è di equilibrio se e solo se la funzione costante $\mathbf{X}(t) = \mathbf{x}_{\text{eq}}$ è soluzione.

Esercizio 6.6. Andamento qualitativo delle soluzioni di $\dot{x} = x(1 - x)$.

Andamento qualitativo delle soluzioni di $\dot{x} = \sin x$.

Calcolo del gradiente dell'anomalia polare nel piano come funzione delle coordinate cartesiane. □

Per casa 6.7. MMM/1.69: Si dimostri che le sole soluzioni periodiche di

$$\dot{x} = f(x), \quad f \in C^1(\mathbf{R}),$$

sono le costanti. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 1.5, 1.6, 1.7, 1.8.

7. MARTEDÌ 08/10/2024
(AULA 14: 15-17)

Definizione di equilibrio stabile.

Esercizio 7.1. Il caso $\mathbf{F} = 0$.

MMM/1.58: Tutti i punti di $\mathbf{R}^3$ sono di equilibrio stabile per $m\ddot{\mathbf{X}} = -\mu\dot{\mathbf{X}}$, $m, \mu > 0$.

27/340

□

Per casa 7.2. 1) MMM/1.59: Studiare la stabilità dell'equilibrio per $m\ddot{\mathbf{X}} = -\mu\dot{\mathbf{X}}^{1+q}$, $m, \mu, q > 0$. Si assuma $\dot{\mathbf{X}} > 0$.

2) I casi $m\ddot{\mathbf{X}} = \pm k\mathbf{X}$, $k > 0$.

3) MMM/1.64

4) MMM/1.46: Risolvere tutti i problemi di Cauchy

$$m\ddot{\mathbf{X}} = -\mu(t)\dot{\mathbf{X}}, \quad \mathbf{X}(0) = \mathbf{x}_0, \quad \dot{\mathbf{X}}(0) = \mathbf{v}_0;$$

qui $\mu(t) > 0$ è una funzione continua su $\mathbf{R}$. Dare una condizione su μ tale che $T(t) \not\rightarrow 0$ per $t \rightarrow +\infty$. □

Esempio di integrazione completa nel teorema dell'energia cinetica.
Definizione di forza conservativa.

Teorema 7.3. Se $\mathbf{F} = \nabla U$, allora

$$T(t_1) - T(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F}(\mathbf{X}(\tau)) \cdot \dot{\mathbf{X}}(\tau) d\tau = U(\mathbf{X}(t_1)) - U(\mathbf{X}(t_0)).$$

Definizione di energia (meccanica).

Teorema 7.4. Se un moto $\mathbf{X}$ soddisfa $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$ e $\mathbf{F}$ è conservativa con potenziale U , allora l'energia

$$\mathcal{E}(t) = \frac{m}{2} |\dot{\mathbf{X}}(t)|^2 - U(\mathbf{X}(t))$$

si mantiene costante durante il moto.

Teorema 7.5. Se un moto $\mathbf{X}$ soddisfa $m\mathbf{a} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_0$, con $\mathbf{F}$ conservativa con potenziale U , e $\mathbf{F}_0 \cdot \dot{\mathbf{X}} = 0$, allora l'energia

$$\mathcal{E}(t) = \frac{m}{2} |\dot{\mathbf{X}}(t)|^2 - U(\mathbf{X}(t))$$

si mantiene costante durante il moto.

Esercizio 7.6. Conservazione dell'energia come strumento per ottenere informazioni sul moto: caso della forza elastica. □

Per casa 7.7. MMM/2.9

1/120, 3/120, 7/120, 8/120, 9/120

□

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 1.7, 2.1, 2.2.

8. GIOVEDÌ 10/10/2024
(AULA 14: 14-17)

Campi di forze posizionali e conservativi (potenziali). Esempi. Un campo conservativo è chiuso, ma non vale l'implicazione contraria.

Teorema 8.1 (Criterio necessario e sufficiente della circuitazione nulla.). (s.d.) *Un campo $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in A \subset \mathbf{R}^3$ è conservativo in A se e solo se il suo integrale su tutte le curve chiuse contenute in A è nullo.*

Semplicemente connessi in $\mathbf{R}^2$ e $\mathbf{R}^3$.

Teorema 8.2. (s.d.) *Un campo chiuso in un aperto semplicemente connesso A è conservativo in A .*

Integrali primi.

Per casa 8.3. MMM/2.22 (esempio), MMM/2.23

Sia $\varphi(x, y)$ un'anomalia polare in $\mathbf{R}^2$; si trovi $\nabla \varphi$ e se ne deduca che il campo

$$-\frac{y}{x^2 + y^2} \mathbf{e}_1 + \frac{x}{x^2 + y^2} \mathbf{e}_2, \quad (x, y) \neq (0, 0),$$

ha per potenziale locale l'anomalia polare, ma non in tutto $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. $\square$

Piano delle fasi di moti 1-dimensionali conservativi. Passaggio da $m\ddot{x} = f(x) = U'(x)$ al sistema equivalente

$$\dot{x} = p, \quad \dot{p} = \frac{1}{m} f(x).$$

Orbite. Le orbite giacciono sulle curve che hanno la forma

$$p = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E + U(x))}, \quad x \in J(E) = \{x \in \mathbf{R} \mid E + U(x) \geq 0\}.$$

Ciascuna curva può contenere più orbite.

Esercizio 8.4. Il diagramma di fase di $m\ddot{x} = -kx$ e di $m\ddot{x} = -k \sin x$.
Punti di inversione, di equilibrio stabili e instabili riconosciuti dal ritratto di fase. $\square$

Teorema 8.5. *Se due orbite si intersecano, allora coincidono.*

Teorema 8.6. *Se un'orbita si autointerseca, allora corrisponde a una soluzione periodica.*

Teorema 8.7. (s.d.) *Se $X \in C^2((\sigma, \Sigma))$ è una soluzione massimale di $m\ddot{X} = F(X)$ e*

$$X(t) \rightarrow x_0, \quad t \rightarrow \Sigma-, \quad |\dot{X}(t)| \leq C, \quad t \in (\delta, \Sigma),$$

allora $\Sigma = +\infty$ e $F(x_0) = 0$. Se anche $\dot{X}(t) \rightarrow p$ per $t \rightarrow +\infty$, allora $p = 0$.

Esercizio 8.8. 9/120 $\square$

Per casa 8.9. È possibile fare tutti gli esercizi del gruppo 150.

6/150, 16/150, 18/150, 21/150, 25/150, 27/150 $\square$

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 2.3, 2.4, 2.5.

9. LUNEDÌ 14/10/2024
(AULA 14: 14-17)

Esercizio 9.1. 27/150 □

Energia come funzione di due variabili:

$$W(x, p) = \frac{m}{2}p^2 - U(x);$$

uguaglianza $W(X(t), \dot{X}(t)) = \mathcal{E}(t)$.

Punti di equilibrio di $m\ddot{x} = U'(x)$ sono i punti critici del potenziale e corrispondono ai punti $(x_{\text{eq}}, 0)$ critici per W . Questi ultimi possono essere sella o minimi. Le orbite del piano delle fasi (x, p) giacciono su curve di livello di W . Curve di livello di W vicino a massimi e minimi di U e confronto con il diagramma di fase.

Teorema 9.2. (DIRICHLET) *Punti di massimo isolato di U corrispondono a punti di equilibrio stabile di $m\ddot{X} = U'(X)$.*

Teorema 9.3. *Punti di massimo isolato di U corrispondono a punti di equilibrio stabile di $m\ddot{X} = U'(X) - r(X, \dot{X})\dot{X}$, ove $r \geq 0$.*

Teorema 9.4. (Dimensione $N > 1$). *Punti di massimo isolato di U corrispondono a punti di equilibrio stabile di $m\ddot{\mathbf{X}} = \nabla U(\mathbf{X}) + \mathbf{h}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}})$, ove $\mathbf{h} \cdot \dot{\mathbf{X}} \leq 0$.*

Esercizio 9.5. 17/660

Dimostrare che se $U(x) = U(0)$ per ogni $x \in [0, 1]$ allora ogni $x \in [0, 1]$ è di equilibrio instabile. □

Stabilità di $x = 0$ per sistemi lineari $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X}$, quando $\mathbf{A}$ abbia una base di autovettori.

Per casa 9.6. 19/660, 39/660, 50/660, 52/660, 56/660

Sia $f \in C^2(\mathbf{R})$. Trovare condizioni sufficienti su $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$ perché il moto piano $m\mathbf{a} = \nabla U$ abbia in $(0, 0)$ un punto di equilibrio stabile, ove

$$U(x_1, x_2) = f(x_1^2 + x_2^2), \quad (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2.$$

□

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 2.6.

10. MARTEDÌ 15/10/2024
(AULA: 15-17)

Disuguaglianza del modulo per gli integrali; formula di Taylor per funzioni vettoriali.

Definizione di lunghezza L della traiettoria di un moto come estremo superiore delle lunghezze delle approssimazioni con spezzate. Si ha

$$L \leq \int_{t_0}^{t_1} |\dot{\mathbf{X}}(\tau)| d\tau.$$

In effetti

Teorema 10.1. (s.d.)

$$L = \int_{t_0}^{t_1} |\dot{\mathbf{X}}(\tau)| d\tau.$$

Definizione di lunghezza d'arco s . Funzione inversa della lunghezza d'arco per moti regolari. Parametrizzazione mediante s .

Moto dato mediante la traiettoria e la legge oraria.

Versore tangente, versore normale principale, curvatura. Scomposizione di velocità e accelerazione:

$$\mathbf{v} = \dot{s}\mathbf{T}(s), \quad \mathbf{a} = \ddot{s}\mathbf{T}(s) + \dot{s}^2 k(s)\mathbf{N}(s).$$

Accelerazione tangente e normale.

La terna intrinseca $(\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B})$ (se $k > 0$). Piano normale.

Esercizio 10.2. 1) Circonferenza e sua terna intrinseca.

2) Elica cilindrica e sua terna intrinseca. □

Teorema 10.3. *Una curva è un segmento di retta per $s \in (a, b)$ se e solo se la curvatura è nulla per $s \in (a, b)$.*

Esercizio 10.4. Ascissa curvilinea dell'ellisse. □

Per casa 10.5. 1) 6/100, 7/100

2) Scrivere il moto che ha per traiettoria l'elica cilindrica e legge oraria $s(t) = bt^2$.

3) Scrivere la legge oraria per il moto sull'elica cilindrica che ha per prima coordinata $R \cos(bt^3)$. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 3.1, 3.2, 3.3.

11. GIOVEDÌ 17/10/2024
(AULA 14: 14-17)

Moto vincolato a una curva, reazioni vincolari. Necessità di ipotesi costitutive. La $\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \mathbf{B} = 0$ non va bene, la $\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \mathbf{T} = 0$ sì. È la legge di vincolo liscio.

Il caso del vincolo liscio per le curve; la componente tangente dell'equazione del moto è indipendente dalle altre 2, che servono a determinare la reazione vincolare.

Esercizio 11.1. 66/620 □

Legge di attrito dinamico di Coulomb-Morin.

Esercizio 11.2. 8/560 □

Per casa 11.3. 9/560, 11/560, 22/560, 23/560
2/120, 12/120, 7/560, 13/560, 15/560, 16/560, 19/560, 24/560, 10/620 □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 3.5, 3.6, 3.7.

12. LUNEDÌ 21/10/2024
(AULA 14: 14-17)

Esercizio 12.1. MMM/3.28-3.31 □

Sistemi di punti materiali $(\mathbf{X}_h, m_h)$, $h = 1, \dots, n$ e sistema differenziale delle loro equazioni di moto.

Centro di massa e involucro convesso. Quantità di moto, coincidente con $m\mathbf{v}_G$; momento delle quantità di moto.

Definizione di forza totale $\mathbf{F}$ e momento delle forze $\mathbf{M}_A$.

Teorema 12.2. (EQUAZIONI GLOBALI) Valgono:

$$m\ddot{\mathbf{X}}_G = \mathbf{F}, \quad \frac{d\mathbf{L}_A}{dt} = \mathbf{M}_A + \mathbf{P} \times \dot{\mathbf{X}}_A.$$

Esercizio 12.3. MMM/14.18 □

Sotto le ipotesi opportune sulle forze interne, le equazioni globali valgono ancora se in $\mathbf{F}$ e $\mathbf{M}_A$ si tiene conto solo delle forze esterne.

Le equazioni globali in genere non determinano il moto del sistema di punti materiali.

Esercizio 12.4. Due punti che si attraggono a vicenda con forze elastiche. □

Sistemi di forze conservative $\mathbf{F}_i$, cioè tali che

$$\mathbf{F}_i = \nabla_{\mathbf{x}_i} U(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n).$$

Per casa 12.5. 9/620, 21/620 □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 5.1, 5.2.

13. MARTEDÌ 22/10/2024
(AULA 14: 15-17)

Esempi di vincoli per un singolo moto: superficie, curva come intersezione di due superficie.

Calcolo dei gradi di libertà mediante i parametri necessari o mediante le equazioni vincolari. Vincolo per due moti di essere allineati con l'origine; una delle componenti del prodotto vettoriale (che devono essere tutte nulle) risulta combinazione lineare delle altre.

Vincoli in generale. Configurazioni compatibili. Esempi.

Esercizio 13.1. MMM/5.28: Piano e sfera: i 3 casi possibili. □

Teorema del Dini per 1 vincolo scalare e per $m > 1$ vincoli scalari (s.d.). Coordinate dipendenti e indipendenti.

Esempi di applicazione del teorema del Dini.

Esercizio 13.2. 24/560 □

Per casa 13.3. MMM/5.21, MMM/5.25

Vincolo di parallelismo per due moti (4 gradi di libertà) (con il teorema del Dini).

Coordinate dipendenti e indipendenti sulla sfera e sull'iperboloide

$$x_3^2 + 1 = x_1^2 + x_2^2.$$

MMM/5.32 (Due superfici) □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 5.3, 5.4, 5.5.

14. GIOVEDÌ 24/10/2024
(AULA 14: 14-17)

Definizione di vincolo olonomo regolare. Numero dei gradi di libertà.

Vincoli fissi e mobili.

Esercizio 14.1. MMM/5.38, MMM/5.39
MMM/5.32 □

Coordinate lagrangiane e rappresentazione lagrangiana del moto. Esempi: superficie e curva in $\mathbf{R}^3$, MMM/5.32.

Per casa 14.2. 1/310, 2/310, 3/310, 4/310
MMM/5.40 □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 5.6, 5.7.

15. LUNEDÌ 28/10/2024
(AULA 14: 14-17)

Moto lagrangiano. Velocità in coordinate lagrangiane per vincoli fissi e mobili.

Esercizio 15.1. MMM/6.5: Esempio di un punto vincolato a una sfera di raggio variabile e di un punto vincolato a essere allineato con il primo e con l'origine. $\square$

Per casa 15.2. 1/630 (scrittura della velocità in rappresentazione lagrangiana)

Mostrare che le coordinate indipendenti sono anche coordinate lagrangiane.

MMM/5.44

26/620, 15/630 $\square$

Atti di moto (ossia derivata nel tempo del vettore delle coordinate locali $\mathbf{z}$). Definizione di spazio tangente; spostamenti virtuali. Se il vincolo è fisso la concatenazione di tutti i vettori velocità appartiene allo spazio tangente. Il vettore $\dot{\mathbf{q}}$ può assumere qualunque valore.

Teorema 15.3. *Gli atti di moto costituiscono lo spazio affine*

$$V_{\mathbf{z},t}\mathbf{f} + \frac{\partial \mathbf{z}^L}{\partial t}.$$

Spostamenti virtuali e effettivi, e loro significato. Coincidono per i vincoli fissi.

Esercizio 15.4. Spazio degli spostamenti virtuali e effettivi nel caso precedente dei due moti e in quello di due punti vincolati a mantenere distanza fissa.

9/630, 9/620 $\square$

Per casa 15.5. 1) Trovare lo spazio tangente per: i) due punti vincolati a essere a distanza costante; ii) MMM/6.24 un punto vincolato al piano ruotante

$$-x_1 \sin(\alpha t) + x_2 \cos(\alpha t) = 0.$$

2) 66/620 (spazio tangente) $\square$

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 5.7, 6.1, 6.3.

16. MARTEDÌ 29/10/2024
(AULA 14: 15-17)

Vale per ogni $j \in \{1, \dots, \ell\}$, $k \in \{1, \dots, m\}$

$$\nabla_z f_k \cdot \frac{\partial \mathbf{z}^L}{\partial q_j} = 0.$$

Definizione di spazio normale come sottospazio di $\mathbf{R}^{n_c}$ generato dai $\nabla_z f_k$.

Teorema 16.1. *Lo spazio normale è l'ortogonale dello spazio tangente.*

In particolare lo spazio tangente è indipendente dalla parametrizzazione lagrangiana.

Esercizio 16.2. MMM/6.21 Calcolo dello spazio normale e tangente nei casi:

- 1) superficie ($n_c = 3$, $m = 1$),
- 2) curva ($n_c = 3$, $m = 2$),
- 3) due punti vincolati a avere uguale quota ($n_c = 6$, $m = 1$). □

Per casa 16.3. 15/630

Trovare lo spazio normale per: i) due punti vincolati a essere a distanza costante; ii) MMM/6.24 un punto vincolato al piano ruotante

$$-x_1 \sin(\alpha t) + x_2 \cos(\alpha t) = 0.$$

□

Esercizio 16.4. MMM/7.1 Sistema vincolato di due punti, con $n_c = 6$, $m = 1$,

$$f_1(z_1, \dots, z_6) = 2z_1 - z_4 = 0.$$

Inoltre le forze sono $\mathbf{F}_1 = \alpha_1 \mathbf{e}_1$, $\mathbf{F}_2 = \alpha_2 \mathbf{e}_1$. Equazioni di moto; ipotesi sulle reazioni vincolari $\mathbf{f}_{\text{vin}} \in N_{z,t} \mathbf{f}$. Lavoro complessivo nullo delle reazioni vincolari in questo caso, ma ciascuna $\mathbf{f}_{\text{vin}}^i$ fa lavoro non nullo sul moto $\mathbf{X}_i$. □

Esercizio 16.5. 15/620 (modificato: asta omogenea $\rightarrow$ asta composta da due punti materiali), risolto con l'ipotesi $\mathbf{f}_{\text{vin}} \in N_{z,t} \mathbf{f}$. □

Per casa 16.6. 1) MMM/6.25 Spostamenti virtuali e effettivi per la circonferenza che trasla.

- 2) Scrivere le equazioni di moto con l'ipotesi dei lavori virtuali:
9/620, 36/620, 57/620, 59/620, 23/630 □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 6.3, 7.1.

17. GIOVEDÌ 31/10/2024
(AULA 14: 14-17)

Esercizio 17.1. 15/620 modificato. □

Energia cinetica T^L in forma lagrangiana.

Teorema 17.2. *Vale*

$$T^L = \frac{1}{2} \mathbf{p}^t \mathcal{A} \mathbf{p} + \mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{p} + b_0.$$

$\mathcal{A}$ è la matrice simmetrica e definita positiva data da

$$a_{hk} = \sum_{i=1}^n m_i \frac{\partial \mathbf{X}_i^L}{\partial q_h} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}_i^L}{\partial q_k},$$

e $\mathbf{b}_1$ e b_0 si annullano se $\partial \mathbf{z}^L / \partial t = 0$.

Esercizio 17.3. Energia cinetica in forma lagrangiana per un punto vincolato al piano in coordinate polari e per un punto vincolato a una superficie regolare. □

Teorema 17.4. *L'ipotesi dei lavori virtuali determina il moto.*

Esercizio 17.5. 59/620 □

Per casa 17.6. 1) Calcolare le energie cinetiche negli esercizi:

9/620, 36/620, 57/620, 59/620, 23/630

2) MMM/7.9 Ricavare dalla ILV la precedente definizione di vincolo liscio per il singolo punto vincolato a una curva.

3) Energia cinetica del sistema in 15/620 (modificato come nell'ultima lezione). □

Per casa 17.7. 57/620, 66/620

Punto su piano ruotante, in assenza di forze direttamente applicate.

Scrivere le equazioni di moto di un punto libero con la ILV. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 7.2, 7.3, 7.5.

18. LUNEDÌ 05/11/2024
(AULA 14: 14-17)

Lemma 18.1. *Valgono*

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i^L}{\partial p_h}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \frac{\partial \mathbf{X}_i^L}{\partial q_h}(\mathbf{q}, t),$$
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{X}^L}{\partial q_h}(\mathbf{q}(t), t) \right) = \frac{\partial \mathbf{v}_i^L}{\partial q_h}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t).$$

Notazione

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_h} = \frac{\partial}{\partial p_h}.$$

Le componenti lagrangiane delle forze Q_h .

Teorema 18.2. (EQUAZIONI DI LAGRANGE) *Le ℓ equazioni*

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T^L}{\partial \dot{q}_h} \right] - \frac{\partial T^L}{\partial q_h} = Q_h, \quad h = 1, \dots, \ell,$$

sono equivalenti all'ipotesi dei lavori virtuali.

Esercizio 18.3. 1/620 □

Per casa 18.4. (Non usare lagrangiana né passaggio al sistema di riferimento mobile)

37/620, 57/620, 61/620 (senza potenziale lagrangiano)

17/630, 29/630, 31/630, 37/630

MMM 7.1 con le equazioni di Lagrange. □

Forze conservative e componenti lagrangiane delle forze.

Teorema 18.5. *Se il sistema di punti materiali è soggetto a sollecitazioni conservative di potenziale $U(\mathbf{z})$, si ha*

$$Q_h = \frac{\partial}{\partial q_h} [U(\mathbf{z}^L(\mathbf{q}, t))], \quad h = 1, \dots, \ell.$$

Esercizio 18.6. Componenti lagrangiane delle forze per un punto materiale $(\mathbf{X}, m)$ vincolato alla sfera

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2,$$

e soggetto alla forza (elastica e peso)

$$\mathbf{F} = -mg\mathbf{e}_3 - k(\mathbf{X} - \mathbf{X}_A), \quad \mathbf{X}_A = R\mathbf{e}_3.$$

□

Per casa 18.7. Calcolare le componenti lagrangiane delle forze per il punto materiale $(\mathbf{X}, m)$ vincolato alla circonferenza mobile

$$x_1^2 + x_2^2 = r(t)^2, \quad r > 0, r \in C^2(\mathbf{R}),$$

e soggetto alla forza

$$\mathbf{F} = -k(\mathbf{X} - \mathbf{X}_A), \quad \mathbf{X}_A = R\mathbf{e}_2, \quad R > 0.$$

17

□

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 7.6, 8.1.

19. MARTEDÌ 05/11/2024
(AULA 14: 15-17)

Se i vincoli sono mobili l'energia in genere non si conserva anche se le forze direttamente applicate sono conservative.

Teorema 19.1. *Se i vincoli sono fissi e il sistema di punti materiali è soggetto a sollecitazioni conservative di potenziale $U(\mathbf{z})$, l'energia*

$$T^L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - U(\mathbf{z}^L(\mathbf{q})),$$

si conserva lungo un moto lagrangiano che soddisfa l'ipotesi dei lavori virtuali.

Definizione di potenziale lagrangiano e forze conservative in senso lagrangiano.

Esercizio 19.2. MMM/8.19 Un moto con potenziale lagrangiano ma con forze non conservative (punto vincolato a circonferenza con forza tangente). □

Per casa 19.3. MMM/8.20
MMM/8.17 □

Definizione di lagrangiana.
Equazioni di Lagrange in forma conservativa.

Esercizio 19.4. 35/620 □

Per casa 19.5. 1/620, 32/620, 40/620, 56/620, 59/620, 64/620, 65/620, 68/620, 71/620
6/630 □

Coordinate cicliche e integrale primo associato.

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 8.1, 8.2.

20. GIOVEDÌ 07/11/2024
(AULA 14: 14-17)

Teorema 20.1. Consideriamo un sistema di punti materiali vincolato da vincoli olonomi fissi, con componenti lagrangiane delle forze conservative in senso lagrangiano e $U^L = U^L(\mathbf{q})$. Allora se

$$\frac{\partial U^L}{\partial q_h}(\mathbf{q}_0) = 0, \quad h = 1, \dots, \ell,$$

la funzione costante $\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_0$ risolve le equazioni di Lagrange.

Teorema 20.2. Consideriamo un sistema di punti materiali vincolato da vincoli olonomi fissi, con componenti lagrangiane delle forze conservative in senso lagrangiano e $U^L = U^L(\mathbf{q})$ e inoltre le forze direttamente applicate siano conservative in senso tradizionale, con $\mathbf{q}_0$ punto di massimo isolato per U^L . Allora $\mathbf{q}_0$ è di equilibrio stabile.

Esercizio 20.3. I vincoli possono cambiare la stabilità dei punti di equilibrio o crearne di nuovi.

8/660

40/660

□

Per casa 20.4. 14/660, 27/660, 41/660, 42/660, 46/660, 47/660, 48/660, 53/660 (tutti senza piccole oscillazioni)

60/620

□

Le formule di Frenet-Serret.

Teorema 20.5. La velocità angolare della terna intrinseca di una curva descritta da un moto di legge oraria $s(t)$ è

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{s}[-\tau \mathbf{T} + k \mathbf{B}].$$

Teorema 20.6. Una curva è piana se e solo se la sua binormale è costante, ossia se e solo se ha torsione nulla.

Esercizio 20.7. MMM/12.12 Vincoli mobili: punto materiale vincolato a circonferenza che trasla:

$$R \cos \varphi \mathbf{e}_1 + R \sin \varphi \mathbf{e}_2 + \frac{ct^2}{2} \mathbf{e}_1,$$

soggetto al peso $-mg\mathbf{e}_2$.

Determinazione della lagrangiana e delle equazioni di Lagrange nel sistema mobile e in quello fisso. □

Teorema 20.8. Se due lagrangiane soddisfano

$$\mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_2 = \frac{d}{dt} F(\mathbf{q}, t),$$

allora hanno equazioni di Lagrange equivalenti.

Per casa 20.9. 66/630, 68/630

□

Paragrafi di riferimento sul testo: ¹⁹MMM: 8.4, 10.8, 12.3.

21. LUNEDÌ 11/11/2024
(AULA 14: 14-17)

Piccole oscillazioni in punti di equilibrio, con hessiana del potenziale definita negativa, per sistemi vincolati da vincoli olonomi fissi e soggetti a forze conservative. Energia cinetica ridotta, potenziale ridotto, lagrangiana ridotta.

Il caso 1-dimensionale: moto armonico.

Equazioni di Lagrange delle piccole oscillazioni nel caso $\ell > 1$:

$$\mathcal{A}\ddot{\mathbf{q}} - \mathcal{U}\mathbf{q} = 0.$$

Ricerca delle frequenze delle piccole oscillazioni con la sostituzione $\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_0 \cos(\omega t)$; equazione $\det(\omega^2 \mathcal{A} + \mathcal{U}) = 0$.

Teorema di esistenza delle coordinate normali. Discussione della periodicità delle piccole oscillazioni.

Esercizio 21.1. 6/680

□

Per casa 21.2. 4/680, 16/680, 20/680, 25/680, 37/680

□

Forze a direzione radiale. Moti centrali.

Teorema 21.3. *In un moto centrale il vettore $\mathbf{X}(t) \times \dot{\mathbf{X}}(t)$ è costante.*

Teorema 21.4. *Sia $\mathbf{X}$ un moto centrale.*

1) *Se $\mathbf{X}(0) \times \dot{\mathbf{X}}(0) \neq 0$, allora il moto avviene nel piano per $\mathbf{X}(0)$ perpendicolare al vettore $\mathbf{X}(0) \times \dot{\mathbf{X}}(0)$.*

2) *Se $\mathbf{X}(0) \times \dot{\mathbf{X}}(0) = 0$, allora il moto avviene sulla retta per $\mathbf{X}(0)$ e l'origine.*

Moti piani e coordinate polari; versori radiale e trasversale. Velocità e accelerazione radiale e trasversale. Equazioni del moto centrale scomposte nella base dei versori radiale e trasversale; l'accelerazione trasversale è nulla, quindi esiste l'integrale primo relativo.

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 2.8, 9.3.

22. MARTEDÌ 12/11/2024
(AULA 14: 15-17)

Velocità areolare. La velocità areolare è costante nei moti centrali.
La formula di Binet (s.d.).

Esercizio 22.1. MMM/2.43 La formula di Binet nel caso della forza gravitazionale. $\square$

Teorema 22.2. *Una forza a direzione radiale è conservativa se e solo se è nella forma*

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = f(|\mathbf{x}|) \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|},$$

e allora il suo potenziale è (per $d > 0$ arbitrario)

$$U(\mathbf{x}) = \int_d^{|\mathbf{x}|} f(s) \, ds.$$

Esercizio 22.3. 5/220 $\square$

Per casa 22.4. 1/220, 3/220, 7/220 $\square$

Vincoli di rigidità per n moti $\mathbf{X}_i$. Numero dei gradi di libertà per 3 moti non allineati ($\ell = 6$).

Teorema 22.5. (s.d.) *Risultano costanti nel tempo le quantità:*

$$\begin{aligned} &(\mathbf{X}_j - \mathbf{X}_i) \cdot (\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_h), \\ &|(\mathbf{X}_j - \mathbf{X}_i) \times (\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_h)|. \end{aligned}$$

Teorema 22.6. (s.d.) *Per ogni $r \geq 4$ esistono $\lambda_h \in \mathbf{R}$ costanti tali che*

$$\mathbf{X}_r(t) - \mathbf{X}_1(t) = \sum_{h=1}^3 \lambda_h \mathbf{u}_h(t), \quad t \in I.$$

Qui $\mathbf{u}_1 = \mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1$, $\mathbf{u}_2 = \mathbf{X}_3 - \mathbf{X}_1$, $\mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2$.

Dunque $\ell = 6$ per ogni $n \geq 3$.

Per casa 22.7. 44/630, 52/630

MMM/7.10 $\square$

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 2.8, 6.6.

23. GIOVEDÌ 14/11/2024
(AULA 14: 14-17)

Sistema rigido non degenerare. Sistema di riferimento solidale. Moti del sistema rigido e moti solidali al sistema rigido. Moti solidali al rigido $\mathbf{X}(t, \boldsymbol{\lambda})$.
Scomposizione

$$\mathbf{X}(t, \boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{X}_O(t) + \sum_{h=1}^3 \lambda_h \mathbf{u}_h(t).$$

Angoli di Eulero.

MMM/13.10 (deduzione di $\boldsymbol{\omega}$ dal teorema di composizione delle velocità angolari) Velocità angolare nella forma

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\phi} \mathbf{e}_3 + \dot{\theta} \mathbf{w}_1 + \dot{\psi} \mathbf{u}_3.$$

Esercizio 23.1. 4/340

□

Per casa 23.2. 5/310, 6/310, 11/340, 13/340

□

Sistema rigido degenerare rettilineo.

Lemma 23.3. Se $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{R}^3$, $\mathbf{a} \neq 0$, allora $\mathbf{a} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = -|\mathbf{a}|^2 [\mathbf{b}]_{\perp}$.

Teorema 23.4. Dato un versore $\mathbf{u} \in C^1(I)$ esiste unico $\boldsymbol{\omega}$ tale che

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}, \quad \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{u} = 0.$$

Esercizio 23.5. 76/620

□

Per casa 23.6. 35/340, 38/340

□

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 13.1, 13.2, 13.3.

24. LUNEDÌ 18/11/2024
(AULA 14: 14-17)

Corpi rigidi continui (e non continui). Distribuzioni di massa: solidi, superfici, curve, punti isolati. Definizione di corpo rigido non degenerare e degenerare rettilineo. Massa.

Definizione di moto del centro di massa $\mathbf{X}_G$.

Teorema 24.1. ($\mathbf{X}_G$ è solidale) Si ha $\mathbf{X}_G(t) = \mathbf{X}(t, \boldsymbol{\lambda}_G)$, con

$$\boldsymbol{\lambda}_G = \frac{1}{m} \int_C \boldsymbol{\lambda} \rho(\boldsymbol{\lambda}) d\mu.$$

Teorema 24.2. (additività) (s.d.) Se $C = C_1 \cup C_2$, con $\int_{C_1 \cap C_2} \rho d\mu = 0$, allora

$$\boldsymbol{\lambda}_G = \frac{m_1}{m} \boldsymbol{\lambda}_G^1 + \frac{m_2}{m} \boldsymbol{\lambda}_G^2,$$

con m_i e $\boldsymbol{\lambda}_G^i$ rispettivamente massa e coordinate del centro di massa di C_i .

Definizione di piano di simmetria materiale ortogonale.

Teorema 24.3. (s.d.) Se Π è di simmetria materiale ortogonale per C allora $\boldsymbol{\lambda}_G \in \Pi$.

Per casa 24.4. 7/580, 8/580 □

Esercizio 24.5. MMM/14.15 (centro di massa di una sfera forata) □

Definizione di quantità di moto e momento delle quantità di moto di polo Z . Quantità di moto e momento delle quantità di moto in cui si sostituisce la formula della velocità di trascinamento (per il sistema di riferimento solidale).

Definizione del tensore d'inerzia $\boldsymbol{\sigma}_Z$ di polo Z .

Teorema 24.6. Vale per ogni moto $\mathbf{X}_Z$

$$\mathbf{L}_Z = \boldsymbol{\sigma}_Z \boldsymbol{\omega} + m(\mathbf{X}_G - \mathbf{X}_Z) \times \mathbf{V}_T(\mathbf{X}_Z, t).$$

In particolare $\mathbf{L}_Z = \boldsymbol{\sigma}_Z \boldsymbol{\omega}$ se $\mathbf{X}_G = \mathbf{X}_Z$ o se $\mathbf{X}_Z$ è sia fisso che solidale.

Per casa 24.7. 26/330, 31/330, 48/330, 59/330 □

Calcolo degli elementi della matrice di inerzia in un sistema qualunque. La matrice è simmetrica. Definizione di momenti di inerzia e deviatori.

Teorema 24.8. Le quantità $\boldsymbol{\sigma} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$ e $\boldsymbol{\sigma} \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$ (con $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = 0$) espresse in funzione di distanze da rette e piani (mediante integrali).

Esercizio 24.9. 19/330 □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 14.1, 14.2, 14.3, 14.4.

25. MARTEDÌ 19/11/2024
(AULA 14: 15-18)

Le equazioni di Lagrange in un sistema di riferimento mobile: i vincoli regolari restano regolari; le forze fittizie soddisfano le necessarie ipotesi di regolarità; l'ILV nel sistema fisso è equivalente a quella nel sistema mobile (s.d.).

Le coordinate lagrangiane valide in uno dei due sistemi di riferimento lo sono anche nell'altro.

Teorema 25.1. *La forza di Coriolis ha componenti lagrangiane nulle se nel sistema mobile i vincoli sono fissi e $\ell = 1$.*

Teorema 25.2. *La forza di Coriolis ha componenti lagrangiane nulle se nel sistema mobile i moti sono vincolati a un piano solidale cui appartiene anche la velocità angolare.*

Per casa 25.3. MMM/12.18 (piano che ruota intorno a un asse esterno)

1/630, 3/630, 5/630, 8/630, 14/630, 25/630, 42/630, 54/630, 63/630

23/680

□

Corollario 25.4. *La σ è definita positiva se il corpo è non degenero, e semidefinita positiva nel caso dell'asta rigida.*

Calcolo di σ per l'asta rigida. La matrice σ nel caso delle lamine.

Momenti d'inerzia e deviatori possono dipendere dal tempo. Però:

Teorema 25.5. *Se $\mathcal{M}$ e $\mathbf{X}_Z$ sono solidali con il corpo rigido, allora la matrice $\sigma_Z^{\mathcal{M}}$ è costante nel tempo.*

Definizione di vettori principali di inerzia, assi principali di inerzia, terne principali di inerzia.

Teorema 25.6. *Sia $\mathcal{M} = (\mathbf{u}_h)$ una terna ortonormale. Allora se $\mathbf{u}_1$ è principale si ha $I_{12} = I_{13} = 0$.*

Teorema 25.7. *Sia C un rigido non degenero. In ogni punto esiste una terna ortonormale principale, che rende la matrice di σ diagonale.*

Se $\mathbf{X}_Z$ è un moto solidale, esiste una base solidale principale $\mathcal{M}$ in $\mathbf{X}_Z$ (ossia tale che $\sigma_Z^{\mathcal{M}}$ sia diagonale e costante).

Proprietà di minimo e massimo dei momenti principali.

Per casa 25.8. 31/330, 59/330

35/630, 46/630, 55/630

□

Esercizio 25.9. Ricerca di assi principali per la lamina usando le proprietà di minimo e massimo. □

Teorema 25.10. 1) *Dati due versori ortogonali principali, il loro prodotto vettoriale è principale.*

2) *Se in un punto tutti i momenti d'inerzia principali sono uguali, tutti i vettori sono principali in quel punto.*

3) *Se in un punto due momenti d'inerzia principali sono uguali, tutti i versori del piano generato dai due versori principali corrispondenti sono principali.*

Esercizio 25.11. Assi principali nel centro per un quadrato e per un rettangolo. La diagonale del rettangolo non è principale₂₄ nel centro del rettangolo (se il rettangolo non è quadrato). □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 12.2, 12.4, 14.4, 14.5, 14.6.

26. LUNEDÌ 25/11/2024
(AULA 14: 14-17)

Ricerca di assi principali (s.d.):
la normale a un piano di simmetria materiale ortogonale è principale (in un punto del piano);
traslabilità di terne principali centrali lungo gli assi;
teorema di Huygens;
corpi con simmetria di rotazione.

Esercizio 26.1. Ricerca degli assi principali:

Parallelepipedo (nel centro di massa);

Cubo (in un punto qualsiasi). ☐

Per casa 26.2. 39/330, 52/330 ☐

Distribuzioni di forze su un corpo rigido. Esempi.

Sistemi di corpi rigidi vincolati. Coordinate locali. Moti solidali a un corpo rigido del sistema; velocità di moti solidali in forma lagrangiana; energia cinetica di un corpo rigido e del sistema di corpi rigidi. Ipotesi dei lavori virtuali.

Teorema 26.3. (s.d.) *Le equazioni date dall'ipotesi dei lavori virtuali determinano il moto.*

Le equazioni di Lagrange per sistemi di corpi rigidi.

Esercizio 26.4. 46/630 ☐

Per casa 26.5. 1/330, 7/330, 10/330

11/620, 14/620, 20/620, 28/620, 30/620, 51/620, 58/620, 63/620

1/660, 5/660, 13/660, 25/660, 36/660, 44/660, 57/660

10/680, 18/680, 22/680 ☐

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 14.6, 15.1, 15.3, 16.1, 16.2.

27. MARTEDÌ 26/11/2024
(AULA 14: 15-18)

Esercizio 27.1. 7/330 □

Teorema 27.2. *Vale per un corpo rigido C e un moto $\mathbf{X}_Z$*

$$T(t) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}_Z \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} + \frac{m}{2} |\mathbf{V}_T(\mathbf{X}_Z, t)|^2 + m \mathbf{V}_T(\mathbf{X}_Z, t) \cdot \boldsymbol{\omega} \times [\mathbf{X}_G - \mathbf{X}_Z].$$

Corollario 27.3. (KÖNIG)

$$T(t) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}_G \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} + \frac{m}{2} |\mathbf{v}_G|^2.$$

Corollario 27.4. *In un moto polare di polo Z*

$$T(t) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}_Z \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}.$$

Si può scrivere in un moto polare di polo Z , se $\boldsymbol{\omega}(t) \neq 0$,

$$T(t) = \frac{1}{2} I_{\mathbf{u}(t)\mathbf{u}(t)}^Z |\boldsymbol{\omega}(t)|^2, \quad \mathbf{u}(t) := \frac{\boldsymbol{\omega}(t)}{|\boldsymbol{\omega}(t)|}.$$

Esercizio 27.5. 58/620 con ricerca di T mediante il teorema di König. □

Moltiplicatori di Lagrange (fuori programma).

Per casa 27.6. 5/330, 9/330, 25/330, 29/330, 41/330, 45/330, 57/330
8/620, 38/620, 41/620, 44/620, 47/620, 55/620
21/630, 27/630, 49/630 □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 15.7.

28. GIOVEDÌ 28/11/2024
(AULA 14: 14-17)

Risultante e momento risultante delle forze.

Per casa 28.1. MMM/15.13 (potenziale gravitazionale terrestre, Terra non sferica)

MMM/15.15 (forze solidali e non solidali) $\square$

Equazioni globali per un corpo rigido. Forze esterne.

Teorema 28.2. *Le due equazioni globali determinano il moto di un corpo rigido non degenere.*

Cenno al caso dell'asta rigida.

Esercizio 28.3. 44/620 $\square$

Teorema 28.4. (EQUAZIONI DI EULERO) *Supponiamo che l'origine O del sistema solidale con il rigido non degenere sia fissa o coincida con il centro di massa. Vale*

$$\sigma_O \dot{\omega} + \omega \times \sigma_O \omega = M_O^{\text{ext}}. \quad (28.1)$$

Corollario 28.5. *In componenti, in una terna principale $(\mathbf{u}_h)$, denotando*

$$\omega = \sum_{h=1}^3 \omega_h \mathbf{u}_h, \quad M_O^{\text{ext}} = \sum_{h=1}^3 M_h \mathbf{u}_h,$$

la (28.1) equivale a

$$I_{11} \dot{\omega}_1 = (I_{22} - I_{33}) \omega_2 \omega_3 + M_1,$$

$$I_{22} \dot{\omega}_2 = (I_{33} - I_{11}) \omega_1 \omega_3 + M_2,$$

$$I_{33} \dot{\omega}_3 = (I_{11} - I_{22}) \omega_1 \omega_2 + M_3.$$

Le equazioni di Eulero in genere vanno accoppiate con la prima equazione globale. Nel caso del moto polare determinano il moto. Sono sempre un sistema del II ordine negli angoli di Eulero, e possono essere considerate un sistema del I ordine nelle ω_h se M_O^{ext} dipende solo dalle ω_h e da t .

Esercizio 28.6. Caso del cubo con centro O fisso e del corpo giroscopico nel polo O del moto, con momento delle forze esterne nullo in entrambi i casi. $\square$

Per casa 28.7. MMM/15.26 (forza non solidale su sfera)

1/470, 2/470, 5/470, 6/470, 8/470, 10/470 $\square$

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 15.1, 15.2, 15.4, 15.5.

29. LUNEDÌ 02/12/2024
(AULA 14: 14-17)

Teorema 29.1. *In un moto polare di polo Z*

$$\frac{dT}{dt} = \mathbf{M}_Z^{\text{ext}} \cdot \boldsymbol{\omega}.$$

Esercizio 29.2. 1/450 □

Per casa 29.3. MMM/15.42 (derivata della T di un corpo rigido nel caso generale)

7/450, 9/450, 11/450, 13/450 □

Collegamento tra equazioni globali e dinamica lagrangiana.

Caso del corpo vincolato a ruotare intorno a un asse fisso: si possono usare le equazioni di Eulero, quella relativa alla direzione dell'asse di rotazione dà l'equazione del moto, le altre due danno il momento della reazione vincolare. Nel caso del corpo vincolato a ruotare intorno a un asse fisso con vincolo liscio (cioè se vale l'ipotesi dei lavori virtuali), il momento della reazione vincolare ha componente nulla lungo l'asse di rotazione.

Nel caso del corpo vincolato a muoversi di moto polare con vincolo liscio (cioè se vale l'ipotesi dei lavori virtuali), il momento della reazione vincolare è nullo.

Esercizio 29.4. 4/450 □

Per casa 29.5. 17/450, 21/450, 23/450, 47/450, 49/450 □

Sia $\mathcal{S} = (\mathbf{X}_O, (\mathbf{u}_h))$ un sistema solidale al rigido non degenerare.

Teorema 29.6. *Sia O fisso.*

Se il moto è una rotazione intorno a un asse principale allora $\mathbf{M}_O^{\text{ext}}$ è parallelo all'asse di rotazione.

Se viceversa $\mathbf{M}_O^{\text{ext}}$ è parallelo a un asse principale, il moto è di rotazione intorno a quell'asse per le opportune condizioni iniziali.

Teorema 29.7. *Sia O fisso.*

Se il moto è una rotazione intorno a un asse non principale, allora il momento $\mathbf{M}_O^{\text{ext}}$ ha componente ortogonale all'asse non nulla in ogni istante in cui $\boldsymbol{\omega}(t) \neq 0$.

Motivazione della denominazione di momenti deviatori.

Esercizio 29.8. 26/450 (inizio) □

Per casa 29.9. 32/450, 65/450, 84/450 □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 15.6, 15.7, 16.5.

30. MARTEDÌ 03/12/2024
(AULA 14: 15-17)

Esercizio 30.1. 26/450 (fine) □

Moti polari per inerzia di polo O .

Teorema 30.2. *In un moto polare per inerzia valgono gli integrali primi:*

1) $\mathbf{L}_O(t) = \boldsymbol{\sigma}_O \boldsymbol{\omega}(t) = \mathbf{L}(t_0)$.

2) $T(t) = \boldsymbol{\sigma}_O \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} / 2 = T(t_0)$.

Il vettore $\boldsymbol{\sigma}_O \boldsymbol{\omega}$ è costante nella terna fissa ma in genere non solidale al rigido. Se $\boldsymbol{\omega}(t) \neq 0$ per un t allora non si annulla mai.

Per casa 30.3. 41/450 □

Ellissoide d'inerzia solidale e mobile. Normale all'ellissoide.

Teorema 30.4. *(MOTO ALLA POINSOT) Consideriamo un corpo rigido non degenerare che si muove di moto polare per inerzia di polo O .*

Allora l'ellissoide d'inerzia mobile si muove rotolando senza strisciare su un piano fisso, che ha normale $\mathbf{L}_O(t)$.

Esercizio 30.5. 45/450 □

Per casa 30.6. 29/450, 31/450, 35/450 □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 15.8.

31. GIOVEDÌ 05/12/2024
(AULA 14: 14-17)

Teorema 31.1. *Se C si muove di moto polare per inerzia, e di rotazione, allora la rotazione è uniforme e l'asse di rotazione è principale d'inerzia.*

Viceversa, se $\boldsymbol{\omega}$ è parallelo a un asse principale per un certo istante, allora il moto è di rotazione.

Limitazione di $|\boldsymbol{\omega}|$ attraverso l'integrale primo dell'energia cinetica.

Teorema 31.2. *Se un corpo è un giroscopio in $\mathbf{X}_O$, allora i moti polari per inerzia sono precessioni regolari.*

Esercizio 31.3. 56/450 □

Per casa 31.4. 35/450, 57/450, 63/450, 64/450, 71/450 □

Definizioni di poloidi ed erpoloidi. Casi dell'ellissoide di rotazione e sferico. Caso dell'ellissoide non di rotazione: rotazioni per inerzia stabili e instabili; moti per inerzia non periodici (corrispondono alle 4 polodie separatrici).

Per casa 31.5. 69/450 □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 15.8, 15.9.

32. LUNEDÌ 09/12/2024
(AULA 14: 14-17)

Esercizio 32.1. MMM/16.11 Due circonferenze che rotolano l'una sull'altra senza strisciamento (rotolamento puro).

77/630

□

Per casa 32.2. MMM/11.22 (periodo nelle precessioni regolari)

□

Campo delle velocità di trascinamento di un sistema di riferimento mobile $\mathbf{V}_T$. Studio del campo della velocità di trascinamento.

Scomposizione della velocità di trascinamento in componente parallela e ortogonale a $\boldsymbol{\omega}(t) \neq 0$. Centro istantaneo del moto. Asse istantaneo di moto e sue proprietà (asse di istantanea rotazione).

Lemma 32.3. *Vale*

$$\mathbf{V}_T(\mathbf{x}_1, t) - \mathbf{V}_T(\mathbf{x}_2, t) = \boldsymbol{\omega}(t) \times (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2),$$

e quindi $\mathbf{V}_T$ per t fissato è costante sulle rette parallele a $\boldsymbol{\omega}(t)$.

Per casa 32.4. 16/340, 17/340, 18/340, 19/340

□

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 11.1, 11.4, 16.4.