DIARIO DELLE LEZIONI DEL CORSO DI MECCANICA RAZIONALE A.A. 2023-2024 CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA

DANIELE ANDREUCCI
DIP. SCIENZE DI BASE E APPLICATE PER L'INGEGNERIA
UNIVERSITÀ LA SAPIENZA
VIA A.SCARPA 16, 00161 ROMA, ITALY

Le dimostrazioni fanno parte del programma, salvo che quando viene esplicitamente indicato il contrario con il simbolo (s.d.).

I richiami al testo MMM si riferiscono al testo *Meccanica Razionale, Modelli Matematici per l'Ingegneria*, D. Andreucci, (Independently published (5 settembre 2022) disponibile su www.amazon.it).
La numerazione n/m relativa agli esercizi si riferisce all'esercizio n del gruppo m, nella raccolta pubblicata sul sito del corso prima dell'inizio del corso.

1. Lunedì 25/9/2023
(Aula 14: 14-17)

Presentazione del corso.
Basi ortonormali. Matrici di cambiamento di base $\boldsymbol{\Gamma}_{\mathcal{M}\mathcal{N}}$. Si ha $\boldsymbol{\Gamma}_{\mathcal{M}\mathcal{N}} = \boldsymbol{\Gamma}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}{}^{\mathrm{t}}$.

Teorema 1.1. (s.d.) *Se $\boldsymbol{a}$ ha componenti $\boldsymbol{\lambda}$ in $\mathcal{M}$ e $\boldsymbol{\mu}$ in $\mathcal{N}$, allora $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\Gamma}_{\mathcal{M}\mathcal{N}}\boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\Gamma}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}\boldsymbol{\lambda}$.*

Definizione di matrice ortogonale.

Teorema 1.2. (s.d.) *Le matrici di cambiamento di base sono ortogonali: $\boldsymbol{\Gamma}_{\mathcal{M}\mathcal{N}} = (\boldsymbol{\Gamma}_{\mathcal{N}\mathcal{M}})^{-1}$. Quindi il loro determinante ha valore assoluto pari a 1.*

Definizione di base ortonormale positiva.

Teorema 1.3. (s.d.) *Composizione delle matrici del cambiamento di base: $\boldsymbol{\Gamma}_{\mathcal{M}\mathcal{P}} = \boldsymbol{\Gamma}_{\mathcal{M}\mathcal{N}}\boldsymbol{\Gamma}_{\mathcal{N}\mathcal{P}}$.*

Esercizio 1.4. 1) cambiamento di base in $\boldsymbol{R}^3$.
2) Caratterizzazione delle matrici ortogonali in $\boldsymbol{R}^2$. □

Per casa 1.5. Si considerino la base ortonormale standard $(\boldsymbol{e}_h)$ e quella data da:

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{5}{6}\boldsymbol{e}_1 + \frac{\sqrt{11}}{6}\boldsymbol{e}_2\,, \quad \boldsymbol{u}_2 = -\frac{\sqrt{11}}{6}\boldsymbol{e}_1 + \frac{5}{6}\boldsymbol{e}_2\,, \quad \boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{e}_3\,.$$

Si esprima il vettore

$$\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{e}_1 + \beta\boldsymbol{e}_2 + \gamma\boldsymbol{e}_3$$

nella base $(\boldsymbol{u}_h)$, sia calcolando e usando la matrice di cambiamento di base, sia usando direttamente la definizione di $(\boldsymbol{u}_h)$. □

Prodotto vettoriale e triplo in $\boldsymbol{R}^3$.

Teorema 1.6. *Se $(\boldsymbol{u}_h)$ è una base ortonormale positiva di $\boldsymbol{R}^3$, allora*

$$\boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u}_3\,, \quad \boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_3 = -\boldsymbol{u}_2\,, \quad \boldsymbol{u}_2 \times \boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{u}_1\,.$$

Corollario 1.7. *Se $(\boldsymbol{u}_h)$ è una base ortonormale positiva,*

$$\boldsymbol{a} = \sum_{h=1}^{3}\alpha_h\boldsymbol{u}_h\,, \quad \boldsymbol{b} = \sum_{h=1}^{3}\beta_h\boldsymbol{u}_h\,, \quad \textit{si ha} \quad \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{u}_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}\,.$$

Per casa 1.8. Si consideri la base ortonormale data da:

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{5}{6}\boldsymbol{e}_1 + \frac{\sqrt{11}}{6}\boldsymbol{e}_2\,, \quad \boldsymbol{u}_2 = -\frac{\sqrt{11}}{6}\boldsymbol{e}_1 + \frac{5}{6}\boldsymbol{e}_2\,, \quad \boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{e}_3\,.$$

Si calcoli il prodotto vettoriale

$$(3\boldsymbol{u}_1 + 7\boldsymbol{u}_2) \times (4\boldsymbol{u}_2 - 5\boldsymbol{u}_3)\,.$$

□

Integrazione per separazione delle variabili. Uso nel caso di disequazione differenziale $\dot{x} \le x$ con $x(t) > 0$.

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 9.1, 10.1, 10.2.

2. Martedì 26/9/2023
(Aula 14: 15-17)

Definizione di sistema di riferimento in $\boldsymbol{R}^3$. Cambiamento di coordinate. Definizione di sistema di riferimento mobile in $\boldsymbol{R}^3$.

Esempio 2.1. 1) Moto $\boldsymbol{X}(t) = R\boldsymbol{e}_1$ nel sistema mobile $\mathcal{S}$ con origine mobile nell'origine del sistema fisso e base ruotante intorno all'asse $\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{u}_3$:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,.
\end{aligned}$$

2) Moto $\boldsymbol{X}(t) = (L+ct)\boldsymbol{e}_1$ nel sistema mobile $\mathcal{S}$ dell'esempio precedente. □

Derivata di un vettore relativa a una terna mobile. Definizione di velocità e accelerazione relativa a un sistema di riferimento mobile.
Regole di derivazione per la derivata relativa; derivata relativa di uno scalare. Funzioni vettoriali costanti in una terna mobile (e quindi di lunghezza costante); moti solidali con un sistema di riferimento mobile.

Esercizio 2.2. Moti solidali nel caso dell'Esempio sopra. □

Per casa 2.3. 1) Calcolare velocità e accelerazione relativa nell'Esempio precedente.
2) 1/100, 2/100, 3/100, 4/100, 5/100. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 10.2, 10.3.

3. Giovedì 28/9/2023
(Aula 14: 14-17)

Teorema 3.1. *Data una terna mobile* $(\boldsymbol{u}_h)$ *esiste una unica funzione* $\boldsymbol{\omega}$ *tale che*

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_h}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{u}_h \,, \qquad h = 1\,,2\,,3\,.$$

$\boldsymbol{\omega}$ si dice velocità angolare della terna.

Teorema 3.2. *Per ogni* $\boldsymbol{a} \in C^1(I)$ *si ha*

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t} = \left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{M}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{a}\,.$$

Esercizio 3.3. La terna

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi(t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi(t)\,\boldsymbol{e}_2\,, \\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin\varphi(t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi(t)\,\boldsymbol{e}_2\,, \\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,, \end{aligned}$$

ha $\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\boldsymbol{e}_3$. □

Esercizio 3.4. 9/340 □

Per casa 3.5. 24/340, 29/340, 37/340
MMM/10.36 Trovare la velocità angolare della rotazione intorno a $\boldsymbol{u}_1$ e a $\boldsymbol{u}_2$. □

Teorema del moto relativo sulla scomposizione della velocità nel sistema fisso. Velocità di trascinamento.

Teorema 3.6. *La velocità angolare di* $\mathcal{M}$ *è costante in* $\mathcal{M}$ *se e solo se è costante; ha direzione costante in* $\mathcal{M}$ *se e solo se ha direzione costante.*

Definizione di rotazione e rotazione costante per una terna.
Teorema della ricostruzione di terne mobili data la velocità angolare (s.d.).
Velocità del moto circolare e velocità angolare.

Esercizio 3.7. MMM/10.44 (epiciclo) □

Studio qualitativo di e.d.o..

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 10.3, 10.4, 10.5, 10.6.

4. Lunedì 2/10/2023
(Aula 14: 14-17)

Teorema di Coriolis sulla scomposizione dell'accelerazione nel sistema fisso. Accelerazione di trascinamento e di Coriolis.
Definizione di moto polare e rotazione (e rotazione costante) per un sistema mobile di riferimento. Moti solidali sull'asse di rotazione.
Velocità angolare relativa di una terna mobile rispetto a un'altra.

Teorema 4.1. *Date due terne mobili $\mathcal{N}$ e $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_h)$ esiste un'unica $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}$ tale che*

$$\left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_h}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{N}} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}} \times \boldsymbol{u}_h\,.$$

Teorema 4.2. *Per ogni $\boldsymbol{a} \in C^1(I)$ si ha*

$$\left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{N}} = \left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{M}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}} \times \boldsymbol{a}\,.$$

Dalla definizione segue $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{M}\mathcal{M}} = 0$, $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}} = -\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{M}\mathcal{N}}$.

Teorema 4.3 (Composizione di velocità angolari)**.** *Se $\mathcal{P}$, $\mathcal{N}$, $\mathcal{M}$ sono terne mobili, vale*

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{P}\mathcal{M}} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{P}\mathcal{N}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}\,.$$

Esercizio 4.4. 1/330 □

Sistema di e.d.o. $\dot{x}_1 = -x_2$, $\dot{x}_2 = x_1$ e sua riduzione in coordinate polari.

Esercizio 4.5. MMM/10.62 Precessioni regolari □

Moti, orbita, grafico. Esempio di un moto di classe C^2 ma con orbita con uno spigolo:

$$\boldsymbol{X}(t) = t^3\boldsymbol{e}_1 + |t|^3\boldsymbol{e}_2\,.$$

Confronto con il caso del grafico di una funzione scalare.

Per casa 4.6. 5/340, 6/340, 26/340, 27/340
MMM/10.43 (sistema di riferimento terrestre)
15/340, 21/340 □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 1.2, 10.5, 10.7.

5. Martedì 3/10/2023
(Aula 14: 15-17)

Definizione di retta tangente per la traiettoria di un moto (mediante la dipendenza da t).

Teorema 5.1. *Se un moto ammette retta tangente, allora la sua derivata è il vettore tangente. Viceversa, se un moto ha derivata diversa da zero, allora ammette retta tangente.*

La retta tangente e il vettore tangente sono unici.

Per casa 5.2. Consideriamo la curva data dall'intersezione di due superficie:

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = 0\,, \qquad f_2(x_1, x_2, x_3) = 0\,;$$

dare una definizione di vettore tangente alla curva indipendente da una sua eventuale parametrizzazione (senza dimostrazioni).
1/340 $\square$

Definizione di punto materiale. Legge del moto.
Problema di Cauchy o ai valori iniziali. Funzioni localmente lipschitziane. Criterio di lipschitzianità mediante le derivate. Soluzioni massimali.

Teorema 5.3. (s.d.) *La soluzione massimale del problema di Cauchy per l'equazione $m\ddot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}, \dot{\boldsymbol{X}}, t)$ esiste ed è unica se $\boldsymbol{F}$ è continua in un aperto $A \subset \boldsymbol{R}^7$ e localmente lipschitziana rispetto a $\boldsymbol{X}$, $\dot{\boldsymbol{X}}$.*
Il suo intervallo di definizione (σ, Σ) è aperto e per $t \to \Sigma-$ si deve avere che $(t, \boldsymbol{X}(t), \dot{\boldsymbol{X}}(t))$ diventa illimitata oppure la sua distanza da ∂A tende a 0.

Per casa 5.4. Non unicità di soluzioni per il problema

$$\dot{x} = -k\sqrt{|x|}\,, \qquad x(\bar{t}) = 0\,,$$

in cui non è soddisfatta l'ipotesi di lipschitzianità. $\square$

Esercizio 5.5. MMM/1.24: Risoluzione completa del problema

$$m\ddot{\boldsymbol{X}} = -k\boldsymbol{X}\,, \qquad \boldsymbol{X}(0) = \boldsymbol{x}_0\,, \qquad \dot{\boldsymbol{X}}(0) = \boldsymbol{v}_0\,.$$

$\square$

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 1.2, 1.3.

6. Giovedì 5/10/2023
(Aula 14: 14-17)

La traiettoria del moto soggetto a forza elastica è un'ellisse.
Riduzione dell'ordine di un sistema differenziale, aumentando il numero delle variabili. Teorema di esistenza e unicità di soluzioni al problema di Cauchy del primo ordine.

Esercizio 6.1. MMM/1.25: Prima integrazione del problema

$$m\ddot{\boldsymbol{X}} = -\gamma m \frac{\boldsymbol{X}}{|\boldsymbol{X}|^3}\,, \qquad \boldsymbol{X}(0) = L\boldsymbol{e}_1\,, \qquad \dot{\boldsymbol{X}}(0) = -c\boldsymbol{e}_1\,.$$

Uso del teorema di unicità. L'intervallo di definizione è limitato a destra ($\varSigma < +\infty$). □

Energia cinetica T di un punto materiale.

Teorema 6.2 (del lavoro o dell'energia cinetica)**.** *Se* $m\ddot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{F}$*, allora*

$$T(t_1) - T(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{F} \cdot \dot{\boldsymbol{X}}\,\mathrm{d}t\,.$$

Esercizio 6.3. Integrale generale del sistema lineare a coefficienti costanti del primo ordine

$$\dot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{X}\,,$$

nell'ipotesi che la matrice $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ abbia una base di autovettori. □

Esercizio 6.4. MMM/1.45: Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{aligned} m\ddot{\boldsymbol{X}} &= \boldsymbol{B} \times \dot{\boldsymbol{X}}\,, \\ \boldsymbol{X}(0) &= L\boldsymbol{e}_1\,, \\ \dot{\boldsymbol{X}}(0) &= c\boldsymbol{e}_2\,. \end{aligned}$$

Qui $\boldsymbol{B} = B\boldsymbol{e}_3$, $B > 0$, $L > 0$, $c > 0$. Integrale dell'energia cinetica. □

Esercizio 6.5. Consideriamo la curva data dall'intersezione di due superficie:

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = 0\,, \qquad f_2(x_1, x_2, x_3) = 0\,;$$

dare una definizione di vettore tangente alla curva indipendente da una sua eventuale parametrizzazione (senza dimostrazioni). □

Per casa 6.6. Non unicità per il problema

$$\dot{x} = -k\sqrt{|x|}\,, \qquad x(\bar{t}) = 0\,,$$

in cui non è soddisfatta l'ipotesi di lipschitzianità. Trovare tutte le soluzioni. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 1.3, 1.5.

7. Lunedì 9/10/2023
(Aula 14: 14-17)

Dipendenza continua. Necessità di assumere intervalli limitati.

Esercizio 7.1. Il caso $\dot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$, $\boldsymbol{F}$ globalmente lipschitziana. $\square$

Per casa 7.2. Dimostrare la dipendenza continua per $m\ddot{\boldsymbol{X}} = -k\boldsymbol{X}$ e per $m\ddot{\boldsymbol{X}} = k\boldsymbol{X}$, m, $k > 0$.
MMM/1.49 $\square$

Sistemi differenziali autonomi. Traslazione nel tempo delle soluzioni.
Definizione di punto di equilibrio $\boldsymbol{x}_{\mathrm{eq}} \in \boldsymbol{R}^3$ per un sistema autonomo di secondo ordine.
Il punto $\boldsymbol{x}_{\mathrm{eq}}$ è di equilibrio se e solo se la funzione costante $\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{x}_{\mathrm{eq}}$ è soluzione.
Definizione di equilibrio stabile.

Esercizio 7.3. Il caso $\boldsymbol{F} = 0$.
MMM/1.58: Tutti i punti di $\boldsymbol{R}^3$ sono di equilibrio stabile per $m\ddot{\boldsymbol{X}} = -\mu\dot{\boldsymbol{X}}$, m, $\mu > 0$. $\square$

Per casa 7.4. 1) MMM/1.59: Studiare la stabilità dell'equilibrio per $m\ddot{X} = -\mu\dot{X}^{1+q}$, m, μ, $q > 0$. Si assuma $\dot{X} > 0$.
2) Il caso $m\ddot{\boldsymbol{X}} = k\boldsymbol{X}$, $k > 0$.
3) MMM/1.64
4) MMM/1.46: Risolvere tutti i problemi di Cauchy

$$m\ddot{\boldsymbol{X}} = -\mu(t)\dot{\boldsymbol{X}}\,, \quad \boldsymbol{X}(0) = \boldsymbol{x}_0\,, \quad \dot{\boldsymbol{X}}(0) = \boldsymbol{v}_0\,;$$

qui $\mu(t) > 0$ è una funzione continua su $\boldsymbol{R}$. Dare una condizione su μ tale che $T(t) \not\to 0$ per $t \to +\infty$. $\square$

Equilbrio per sistemi differenziali del primo ordine.

Esercizio 7.5. 1) Andamento qualitativo delle soluzioni di $\dot{x} = x$, $\dot{x} = -x$, $\dot{x} = x(1-x)$.
2) Caso della forza elastica, $\boldsymbol{F} = -k\boldsymbol{X}$, $k > 0$, $\boldsymbol{x}_{\mathrm{eq}} = 0$.
3) Nell'ipotesi che la matrice $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ abbia una base di autovettori il sistema lineare a coefficienti costanti del primo ordine

$$\dot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{X}\,,$$

ha un punto di equilibrio stabile nell'origine se e solo se tutti gli autovalori sono non positivi o con parte reale non positiva se complessi. $\square$

Per casa 7.6. Andamento qualitativo delle soluzioni di $\dot{x} = \sin x$.
MMM/1.69: Si dimostri che le sole soluzioni periodiche di

$$\dot{x} = f(x)\,, \qquad f \in C^1(\boldsymbol{R})\,,$$

sono le costanti. $\square$

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 1.6, 1.7.

8. Martedì 10/10/2023
(Aula 14: 15-17)

Esempio di integrazione completa nel teorema dell'energia cinetica. Definizione di potenziale di una forza.

Teorema 8.1. *Se $\boldsymbol{F} = \nabla U$, allora*

$$T(t_1) - T(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}(\tau)) \cdot \dot{\boldsymbol{X}}(\tau) \,\mathrm{d}\tau = U(\boldsymbol{X}(t_1)) - U(\boldsymbol{X}(t_0)) \,.$$

Definizione di energia (meccanica).

Teorema 8.2. *Se un moto $\boldsymbol{X}$ soddisfa $m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}$ e $\boldsymbol{F}$ è conservativa con potenziale U, allora l'energia*

$$\mathcal{E}(t) = \frac{m}{2} |\dot{\boldsymbol{X}}(t)|^2 - U(\boldsymbol{X}(t))$$

si mantiene costante durante il moto.

Teorema 8.3. *Se un moto $\boldsymbol{X}$ soddisfa $m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_0$, con $\boldsymbol{F}$ conservativa con potenziale U, e $\boldsymbol{F}_0 \cdot \dot{\boldsymbol{X}} = 0$, allora l'energia*

$$\mathcal{E}(t) = \frac{m}{2} |\dot{\boldsymbol{X}}(t)|^2 - U(\boldsymbol{X}(t))$$

si mantiene costante durante il moto.

Esercizio 8.4. Conservazione dell'energia come strumento per ottenere informazioni sul moto.
9/120 □

Per casa 8.5. MMM/2.9
1/120, 3/120, 7/120, 8/120 □

Definizione di forza conservativa. Campi di forze posizionali e conservativi (potenziali). Esempi. Un campo conservativo è chiuso, ma non vale l'implicazione contraria.
Semplicemente connessi in $\boldsymbol{R}^2$ e $\boldsymbol{R}^3$.

Teorema 8.6. (s.d.) *Un campo chiuso in un aperto semplicemente connesso A è conservativo in A.*

Esercizio 8.7. Sia $\varphi(x, y) \in (-\pi, \pi)$ l'usuale anomalia polare in $\boldsymbol{R}^2$; allora φ è un potenziale del campo

$$-\frac{y}{x^2 + y^2} \boldsymbol{e}_1 + \frac{x}{x^2 + y^2} \boldsymbol{e}_2 \,, \qquad \text{in } \boldsymbol{R}^2 \setminus \{(x, 0) \mid x \leq 0\}.$$

□

Per casa 8.8. MMM/2.22 (esempio), MMM/2.23 □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 2.1, 2.2, 2.3, 2.4.

9. Giovedì 12/10/2023
(Aula 14: 14-17)

Piano delle fasi di moti 1-dimensionali conservativi. Passaggio da $m\ddot{x} = f(x) = U'(x)$ al sistema equivalente

$$\dot{x} = p\,, \qquad \dot{p} = \frac{1}{m} f(x)\,.$$

Orbite. Le orbite giacciono sulle curve che hanno la forma

$$p = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E + U(x))}\,, \quad x \in J(E) = \{x \in \boldsymbol{R} \mid E + U(x) \geq 0\}\,.$$

Ciascuna curva può contenere più orbite.

Esercizio 9.1. Il diagramma di fase di $m\ddot{x} = -kx$.
Punti di inversione, di equilibrio stabili e instabili riconosciuti dal ritratto di fase. □

Per casa 9.2. 21/150, 25/150 □

Teorema 9.3. *Se due orbite si intersecano, allora coincidono.*

Teorema 9.4. *Se un'orbita si autointerseca, allora corrisponde a una soluzione periodica.*

Esercizio 9.5. Il diagramma di fase di $m\ddot{x} = -k \sin x$. □

Teorema 9.6. (s.d.) *Se $X \in C^2((\sigma, \Sigma))$ è una soluzione massimale di $m\ddot{X} = F(X)$ e*

$$X(t) \to x_0\,, \qquad t \to \Sigma-\,, \qquad |\dot{X}(t)| \leq C\,, \qquad t \in (\delta, \Sigma)\,,$$

allora $\Sigma = +\infty$ e $F(x_0) = 0$. Se anche $\dot{\boldsymbol{X}}(t) \to \boldsymbol{p}$ per $t \to +\infty$, allora $\boldsymbol{p} = 0$.

Per casa 9.7. È possibile fare tutti gli esercizi del gruppo 150.
6/150, 16/150, 18/150, 27/150 □

Energia come funzione di due variabili:

$$W(x, p) = \frac{m}{2} p^2 - U(x)\,;$$

uguaglianza $W(X(t), \dot{X}(t)) = \mathcal{E}(t)$.
Punti di equilibrio di $m\ddot{x} = U'(x)$ sono i punti critici del potenziale e corrispondono ai punti $(\boldsymbol{x}_{\text{eq}}, 0)$ critici per W. Questi ultimi possono essere sella o minimi. Le orbite del piano delle fasi (x, p) giacciono su curve di livello di W. Curve di livello di W vicino a massimi e minimi di U e confronto con il diagramma di fase.

Esercizio 9.8. Dimostrare che se $U(x) = U(0)$ per ogni $x \in [-1, 1]$ allora ogni $x \in [-1, 1]$ è di equilibrio instabile. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 2.5, 2.6.

10. Giovedì 19/10/2023
(Aula 14: 14-16)

Teorema 10.1. *(Dirichlet) Punti di massimo isolato di U corrispondono a punti di equilibrio stabile di $m\ddot{X} = U'(X)$.*

Teorema 10.2. *Punti di massimo isolato di U corrispondono a punti di equilibrio stabile di $m\ddot{X} = U'(X) - r(X, \dot{X})\dot{X}$, ove $r \geq 0$.*

Teorema 10.3. *(Dimensione $N > 1$). Punti di massimo isolato di U corrispondono a punti di equilibrio stabile di $m\ddot{\boldsymbol{X}} = \nabla U(\boldsymbol{X}) + \boldsymbol{h}(\boldsymbol{X}, \dot{\boldsymbol{X}})$, ove $\boldsymbol{h} \cdot \dot{\boldsymbol{X}} \leq 0$.*

Esercizio 10.4. 17/660, 39/660, 20/150 □

Per casa 10.5. 19/660, 50/660, 52/660, 56/660
Sia $f \in C^2(\boldsymbol{R})$. Trovare condizioni sufficienti su $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$ perché il moto piano $m\boldsymbol{a} = \nabla U$ abbia in $(0,0)$ un punto di equilibrio stabile, ove

$$U(x_1, x_2) = f(x_1^2 + x_2^2)\,, \qquad (x_1, x_2) \in \boldsymbol{R}^2\,.$$

□

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 2.6.

11. Lunedì 23/10/2023
(Aula 14: 14-17)

Forze a direzione radiale. Moti centrali.

Teorema 11.1. *In un moto centrale il vettore $\boldsymbol{X}(t) \times \dot{\boldsymbol{X}}(t)$ è costante.*

Teorema 11.2. *Sia $\boldsymbol{X}$ un moto centrale.*
1) Se $\boldsymbol{X}(0) \times \dot{\boldsymbol{X}}(0) \neq 0$, allora il moto avviene nel piano per $\boldsymbol{X}(t_0)$ perpendicolare al vettore $\boldsymbol{X}(0) \times \dot{\boldsymbol{X}}(0)$.
2) Se $\boldsymbol{X}(0) \times \dot{\boldsymbol{X}}(0) = 0$, allora il moto avviene sulla retta per $\boldsymbol{X}(t_0)$ e l'origine.

Moti piani e coordinate polari; versori radiale e trasversale. Velocità e accelerazione radiale e trasversale. Equazioni del moto centrale scomposte nella base dei versori radiale e trasversale; l'accelerazione trasversale è nulla, quindi la velocità areolare è costante.

Esercizio 11.3. 3/220 □

La formula di Binet (s.d.).

Esercizio 11.4. MMM/2.43 La formula di Binet nel caso della forza gravitazionale. □

Teorema 11.5. *Una forza a direzione radiale è conservativa se e solo se è nella forma*

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = f(|\boldsymbol{x}|)\frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|}\,,$$

e allora il suo potenziale è (per $d > 0$ arbitrario)

$$U(\boldsymbol{x}) = \int_d^{|\boldsymbol{x}|} f(s)\,\mathrm{d}s\,.$$

Esercizio 11.6. 5/220, 8/120 □

Per casa 11.7. 1/220, 7/220 □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 2.8.

12. Martedì 24/10/2023
(Aula 14: 15-17)

Disuguaglianza del modulo per gli integrali; formula di Taylor per funzioni vettoriali.
Definizione di lunghezza L della traiettoria di un moto come estremo superiore delle lunghezze delle approssimazioni con spezzate. Si ha

$$L \leq \int_{t_0}^{t_1} |\dot{\boldsymbol{X}}(\tau)| \, \mathrm{d}\tau \, .$$

In effetti

Teorema 12.1. (s.d.)

$$L = \int_{t_0}^{t_1} |\dot{\boldsymbol{X}}(\tau)| \, \mathrm{d}\tau \, .$$

Definizione di lunghezza d'arco s. Funzione inversa della lunghezza d'arco per moti regolari. Parametrizzazione mediante s.
Moto dato mediante la traiettoria e la legge oraria.
Scomposizione di velocità e accelerazione:

$$\boldsymbol{v} = \dot{s}\boldsymbol{T}(s) \, , \qquad \boldsymbol{a} = \ddot{s}\boldsymbol{T}(s) + \dot{s}^2 k(s)\boldsymbol{N}(s) \, .$$

Accelerazione tangente e normale. Versore tangente, versore normale principale, curvatura. La terna intrinseca $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ (se $k > 0$).

Esercizio 12.2. Lunghezza d'arco e scomposizione di velocità e accelerazione nella circonferenza e nell'elica cilindrica (definita nell'Esempio MMM 3.22). □

Per casa 12.3. 1) Scrivere il moto che ha per traiettoria l'elica cilindrica e legge oraria $s(t) = bt^2$.
2) Scrivere la legge oraria per il moto sull'elica cilindrica che ha per prima coordinata $R\cos(bt^3)$.
3) Lunghezza d'arco nell'ellisse $(a\cos\varphi, b\sin\varphi, 0)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ e significato geometrico di φ.
4) 6/100, 11/560, 22/560, 23/560 □

Moto vincolato a una curva, reazioni vincolari. Necessità di ipotesi costitutive. La legge di vincolo liscio.
Il caso del vincolo liscio per le curve; la componente tangente dell'equazione del moto è indipendente dalle altre 2, che servono a determinare la reazione vincolare.

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 3.1, 3.2, 3.3, 3.5, 3.7.

13. Giovedì 26/10/2023
(Aula 14: 14-17)

Il caso del vincolo liscio per le curve. Necessità di ipotesi costitutive. La $\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{B} = 0$ non va bene, la $\mathbf{f}_{\text{vin}} \cdot \boldsymbol{T} = 0$ sì.

Esercizio 13.1. 23/560 (uso degli integrali primi) □

Legge di attrito dinamico di Coulomb-Morin.

Teorema 13.2. *Il problema ai valori iniziali per il sistema del moto per un punto vincolato a una curva di classe C^3 con vincolo scabro, se le forze sono continue e localmente lipschitziane in $(s, \dot{s})$, ammette unica soluzione.*

Espressione della curvatura in termini di $\dot{\boldsymbol{X}}$, $\ddot{\boldsymbol{X}}$.

Esercizio 13.3. 15/560, 22/560 □

Per casa 13.4. 2/120, 3/120, 12/120, 7/560, 9/560, 13/560, 16/560, 19/560, 24/560, 10/620
MMM/3.31 □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 3.6, 3.7.

14. Lunedì 30/10/2023
(Aula 14: 14-17)

Superfici regolari e loro parametrizzazioni; i vettori derivate rispetto ai due parametri; la normale.
Definizione di piano tangente.
Il piano tangente in realtà è indipendente dalla parametrizzazione (per superfici di livello).

Esercizio 14.1. Parametrizzazione delle superfici di rotazione ottenute ruotando intorno all'asse x_3 la curva

$$x_3 = f(x_2)\,, \qquad x_1 = 0\,.$$

□

Per casa 14.2. Parametrizzare la superficie data dalla rotazione intorno all'asse x_3 della curva

$$x_2 = a(\sin(bx_3) + 2)\,, \qquad x_1 = 0\,.$$

□

Le velocità dei moti vincolati alla superficie appartengono al piano tangente.
Scomposizione dell'accelerazione in termini dei vettori tangenti coordinati e delle loro derivate.
L'equazione di moto di un punto vincolato alla superficie nella base data dai vettori tangenti coordinati e dalla normale. La reazione vincolare. Vincolo liscio per una superficie.

Teorema 14.3. *Sia S una superficie con parametrizzazione di classe C^3, e $\boldsymbol{F}(\varphi, \theta, \dot{\varphi}, \dot{\theta}, t)$ una forza continua e localmente lipschitziana in $(\varphi, \theta, \dot{\varphi}, \dot{\theta})$. Allora il problema del moto del punto vincolato a una superficie liscia ha unica soluzione massimale.*

Nel caso del vincolo liscio il moto si determina indipendentemente dalla reazione vincolare che scompare dalle equazioni di moto.

Esercizio 14.4. MMM/4.10, 1/620 □

Per casa 14.5. Scrivere le equazioni di moto per il punto pesante vincolato alla sfera.
5/120, 3/620, 7/620 □

Vincolo scabro per una superficie: attrito dinamico.

Esercizio 14.6. Esempio di conservazione dell'energia in presenza di vincolo scabro.
7/120 □

Per casa 14.7. 27/560, 29/560 □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 4.1, 4.2, 4.4.

15. Martedì 31/10/2023
(Aula 14: 15-17)

Dinamica relativa; le forze apparenti di trascinamento e di Coriolis.
Lemma sul prodotto vettoriale ripetuto.

Esempio 15.1. La forza di trascinamento nel caso della rotazione costante. □

Attrito statico; motivi della disuguaglianza nella legge di Coulomb-Morin.
Coni di attrito per la superficie e la curva.

Esercizio 15.2. MMM/4.18, MMM/4.19: Punti di equilibrio per un punto pesante vincolato a una sfera scabra, e poi a un suo meridiano scabro.
MMM/12.6 (punto materiale vincolato a ellisse scabra ruotante) □

Per casa 15.3. 4/350, 10/350, 3/580, 5/580, 10/580, 2/660
1/520, 2/520, 5/520, 6/520 □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 4.5, 11.1, 12.1.

16. Giovedì 2/11/2023
(Aula 14: 14-17)

Sistemi di punti materiali $(\boldsymbol{X}_h, m_h)$, $h = 1, \dots, n$ e sistema differenziale delle loro equazioni di moto.
Centro di massa e involucro convesso. Quantità di moto, coincidente con $m\boldsymbol{v}_G$; momento delle quantità di moto.
Definizione di forza totale $\boldsymbol{F}$ e momento delle forze $\boldsymbol{M}_A$.

Teorema 16.1. *(Equazioni globali) Valgono:*

$$m\ddot{\boldsymbol{X}}_G = \boldsymbol{F}\,, \qquad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_A}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M}_A + \boldsymbol{P} \times \dot{\boldsymbol{X}}_A\,.$$

Le equazioni globali in genere non determinano il moto del sistema di punti materiali.

Esercizio 16.2. Due punti che si attraggono a vicenda con forze elastiche. □

Sotto le ipotesi opportune sulle forze interne, le equazioni globali valgono ancora se in $\boldsymbol{F}$ e $\boldsymbol{M}_A$ si tiene conto solo delle forze esterne.

Esercizio 16.3. 4/350 □

Sistemi di forze conservative $\boldsymbol{F}_i$, cioè tali che

$$\boldsymbol{F}_i = \nabla_{\boldsymbol{x}_i} U(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n)\,.$$

Energia cinetica e meccanica del sistema.
Conservazione dell'energia, anche in presenza di forze non conservative di lavoro complessivo nullo.

Teorema 16.4. *Se un sistema di punti materiali liberi è soggetto alle equazioni di moto $m_i\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{F}_i^0$ ove il sistema delle forze $\boldsymbol{F}_i$ è conservativo con potenziale U, e*

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i^0 \cdot \boldsymbol{v}_i = 0 \qquad \textit{in ogni istante}$$

allora l'energia meccanica $T - U$ si conserva lungo i moti.

Esercizio 16.5. 10/580 □

Per casa 16.6. MMM/5.19
8/620, 9/620, 10/620, 12/620, 16/620, 21/620, 59/620, 64/620, 66/620 □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 5.1, 5.2.

17. Lunedì 6/11/2023
(Aula 14: 14-17)

Esempi di vincoli per un singolo moto: superficie, curva come intersezione di due superficie.
Calcolo dei gradi di libertà mediante i parametri necessari o mediante le equazioni vincolari. Vincolo per due moti di essere allineati con l'origine; una delle componenti del prodotto vettoriale (che devono essere tutte nulle) risulta combinazione lineare delle altre.
Vincoli in generale, fissi e mobili. Configurazioni compatibili. Esempi.

Esercizio 17.1. MMM/5.28 Piano e sfera: i 3 casi possibili. □

Caso delle due superfici che si intersecano.

Per casa 17.2. MMM/5.21, MMM/5.25 □

Teorema del Dini per 1 vincolo scalare e per $m > 1$ vincoli scalari (s.d.). Coordinate dipendenti e indipendenti.

Per casa 17.3. Coordinate dipendenti e indipendenti sulla sfera e sull'iperboloide

$$x_3^2 + 1 = x_1^2 + x_2^2 \,.$$

MMM/5.32 (Due superfici) □

Definizione di vincolo olonomo regolare. Numero dei gradi di libertà.

Esercizio 17.4. MMM/5.38, MMM/5.39
26/560 □

Per casa 17.5. 1/310, 2/310, 3/310, 4/310
MMM/5.40 □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 5.3, 5.4, 5.5, 5.6.

18. Martedì 7/11/2023
(Aula 14: 15-17)

Coordinate lagrangiane e rappresentazione lagrangiana del moto. Moto lagrangiano. Velocità in coordinate lagrangiane per vincoli fissi e mobili. Il vettore $\dot{\boldsymbol{q}}$ può assumere qualunque valore.

Esercizio 18.1. MMM/6.5: Esempio di un punto vincolato a una sfera di raggio variabile e di un punto vincolato a essere allineato con il primo e con l'origine. □

Per casa 18.2. Mostrare che le coordinate indipendenti sono anche coordinate lagrangiane.
MMM/5.44
26/620, 9/630, 15/630 □

Atti di moto (ossia derivata nel tempo del vettore delle coordinate locali $\boldsymbol{z}$). Definizione di spazio tangente; spostamenti virtuali.

Teorema 18.3. *Gli atti di moto costituiscono lo spazio affine*

$$V_{\boldsymbol{z},t}\boldsymbol{f} + \frac{\partial \boldsymbol{z}^{\mathrm{L}}}{\partial t}\,.$$

Spostamenti virtuali e effettivi, e loro significato. Coincidono per i vincoli fissi.

Esercizio 18.4. 1/630 (scrittura della velocità in rappresentazione lagrangiana e spazio tangente) □

Per casa 18.5. 1) Trovare lo spazio tangente per: i) due punti vincolati a essere a distanza costante; ii) MMM/6.24 un punto vincolato al piano ruotante

$$-x_1 \sin(\alpha t) + x_2 \cos(\alpha t) = 0\,.$$

2) 66/620 (spazio tangente) □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 5.7, 6.1, 6.3.

19. Giovedì 9/11/2023
(Aula 14: 14-17)

Vale per ogni $j \in \{1, \dots, \ell\}$, $k \in \{1, \dots, m\}$

$$\nabla_{\boldsymbol{z}} f_k \cdot \frac{\partial \boldsymbol{z}^{\mathrm{L}}}{\partial q_j} = 0 .$$

Definizione di spazio normale come sottospazio di $\boldsymbol{R}^{n_c}$ generato dai $\nabla_z f_k$.

Teorema 19.1. *Lo spazio normale è l'ortogonale dello spazio tangente.*

In particolare lo spazio tangente è indipendente dalla parametrizzazione lagrangiana.

Esercizio 19.2. MMM/6.21 Calcolo dello spazio normale e tangente nei casi:
1) superficie ($n_c = 3$, $m = 1$),
2) curva ($n_c = 3$, $m = 2$),
3) due punti vincolati a avere uguale quota ($n_c = 6$, $m = 1$). □

Esercizio 19.3. 15/630 □

Per casa 19.4. Trovare lo spazio normale per: i) due punti vincolati a essere a distanza costante; ii) MMM/6.24 un punto vincolato al piano ruotante

$$-x_1 \sin(\alpha t) + x_2 \cos(\alpha t) = 0 .$$

□

Esercizio 19.5. MMM/7.1 Sistema vincolato di due punti, con $n_c = 6$, $m = 1$,

$$f_1(z_1, \dots, z_6) = 2z_1 - z_4 = 0 .$$

Inoltre le forze sono $\boldsymbol{F}_1 = \alpha_1 \boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{F}_2 = \alpha_2 \boldsymbol{e}_1$. Equazioni di moto; ipotesi sulle reazioni vincolari $\mathbf{f}_{\mathrm{vin}} \in N_{\boldsymbol{z},t}\boldsymbol{f}$. Lavoro complessivo nullo delle rezioni vincolari in questo caso, ma ciascuna ${\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}}^i$ fa lavoro non nullo sul moto $\boldsymbol{X}_i$. □

Esercizio 19.6. 15/620 (modificato: asta omogenea → asta composta da due punti materiali), risolto con l'ipotesi $\mathbf{f}_{\mathrm{vin}} \in N_{\boldsymbol{z},t}\boldsymbol{f}$. □

Per casa 19.7. 1) MMM/6.25 Spostamenti virtuali e effettivi per la circonferenza che trasla.
2) Scrivere le equazioni di moto con l'ipotesi dei lavori virtuali:
9/620, 36/620, 57/620, 59/620, 23/630 □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 6.3, 7.1.

20. Lunedì 13/11/2023
(Aula 14: 14-17)

Energia cinetica T^{L} in forma lagrangiana.

Teorema 20.1. *Vale*

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{p}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{p} + \boldsymbol{b}_1 \cdot \boldsymbol{p} + b_0 \,.$$

$\boldsymbol{\mathcal{A}}$ *è la matrice simmetrica e definita positiva data da*

$$a_{hk} = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\partial \boldsymbol{X}_i^{\mathrm{L}}}{\partial q_h} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{X}_i^{\mathrm{L}}}{\partial q_k} \,,$$

e $\boldsymbol{b}_1$ *e* b_0 *si annullano se* $\partial \boldsymbol{z}^{\mathrm{L}}/\partial t = 0$.

Esercizio 20.2. Energia cinetica del sistema in 15/620 (modificato come nell'ultima lezione). □

Per casa 20.3. 1) Calcolare le energie cinetiche negli esercizi:
57/620, 59/620, 23/630
2) MMM/7.9 Ricavare dalla ILV la precedente definizione di vincolo liscio per il singolo punto vincolato a una curva. □

L'ipotesi dei lavori virtuali (ILV) in diverse forme; caso del singolo punto vincolato a una superficie. Forze in coordinate lagrangiane.

Teorema 20.4. *L'ipotesi dei lavori virtuali determina il moto.*

Esercizio 20.5. 9/620, 36/620 □

Per casa 20.6. 66/620
Scrivere le equazioni di moto di un punto libero con la ILV. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 7.2, 7.3, 7.5.

21. Martedì 14/11/2023
(Aula 14: 15-17)

Lemma 21.1. *Valgono*

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}_i^{\mathrm{L}}}{\partial p_h}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t) = \frac{\partial \boldsymbol{X}_i^{\mathrm{L}}}{\partial q_h}(\boldsymbol{q},t)\,,$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\frac{\partial \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}}{\partial q_h}(\boldsymbol{q}(t),t)\Big) = \frac{\partial \boldsymbol{v}_i^{\mathrm{L}}}{\partial q_h}(\boldsymbol{q}(t),\dot{\boldsymbol{q}}(t),t)\,.$$

Notazione

$$\frac{\partial}{\partial \dot q_h} = \frac{\partial}{\partial p_h}\,.$$

Le componenti lagrangiane delle forze Q_h.

Teorema 21.2. *(Equazioni di Lagrange) Le ℓ equazioni*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\frac{\partial T^{\mathrm{L}}}{\partial \dot q_h}\Big] - \frac{\partial T^{\mathrm{L}}}{\partial q_h} = Q_h\,,\quad h = 1\,,\dots\,,\ell\,,$$

sono equivalenti all'ipotesi dei lavori virtuali.

Esercizio 21.3. 1/620, 57/620 □

Teorema 21.4. *Una curva è piana se e solo se $\boldsymbol{B}(s)$ è costante.*

Per casa 21.5. MMM 7.1 con le equazioni di Lagrange. □

Per casa 21.6. (Non usare lagrangiana né passaggio al sistema di riferimento mobile)
37/620, 61/620 (senza potenziale lagrangiano)
17/630, 29/630, 31/630, 37/630 □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 7.6.

22. Giovedì 16/11/2023
(Aula 14: 14-17)

Forze conservative e componenti lagrangiane delle forze.

Teorema 22.1. *Se il sistema di punti materiali è soggetto a sollecitazioni conservative di potenziale $U(\boldsymbol{z})$, si ha*

$$Q_h = \frac{\partial}{\partial q_h}[U(\boldsymbol{z}^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}, t))] , \qquad h = 1 , \dots , \ell .$$

Definizione di potenziale lagrangiano e forze conservative in senso lagrangiano.

Per casa 22.2. Componenti lagrangiane delle forze per un punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ vincolato alla sfera

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2 ,$$

e soggetto alla forza elastica

$$\boldsymbol{F} = -k(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_A) , \qquad \boldsymbol{X}_A = R\boldsymbol{e}_3 .$$

□

Esercizio 22.3. Calcolare le componenti lagrangiane delle forze per il punto materiale $(\boldsymbol{X}, m)$ vincolato alla circonferenza mobile

$$x_1^2 + x_2^2 = r(t)^2 , \qquad r > 0 , r \in C^2(\boldsymbol{R}) ,$$

e soggetto alla forza

$$\boldsymbol{F} = -k(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_A) , \qquad \boldsymbol{X}_A = R\boldsymbol{e}_2 , \qquad R > 0 .$$

□

Se i vincoli sono mobili l'energia in genere non si conserva anche se le forze direttamente applicate sono conservative.

Teorema 22.4. *Se i vincoli sono fissi e il sistema di punti materiali è soggetto a sollecitazioni conservative di potenziale $U(\boldsymbol{z})$, l'energia*

$$T^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) - U(\boldsymbol{z}^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q})) ,$$

si conserva lungo un moto lagrangiano che soddisfa l'ipotesi dei lavori virtuali.

Esercizio 22.5. 64/620 □

Definizione di lagrangiana.
Equazioni di Lagrange in forma conservativa.
Coordinate cicliche e integrale primo associato.

Esercizio 22.6. MMM/8.17
MMM/8.19 Un moto con potenziale lagrangiano ma con forze non conservative (punto vincolato a circonferenza con forza tangente).
17/630 □

Per casa 22.7. 1/620, 32/620, 35/620, 40/620, 56/620, 59/620, 64/620, 65/620, 68/620, 71/620
6/630
MMM/8.20 □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 8.1, 8.2, 8.3.

23. Lunedì 20/11/2023
(Aula 14: 14-17)

Teorema 23.1. *Consideriamo un sistema di punti materiali vincolato da vincoli olonomi fissi, con componenti lagrangiane delle forze conservative in senso lagrangiano e* $U^{\mathrm{L}} = U^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q})$*. Allora se*

$$\frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial q_h}(\boldsymbol{q}_0) = 0\,, \qquad h = 1\,, \dots\,, \ell\,,$$

la funzione costante $\boldsymbol{q}(t) = \boldsymbol{q}_0$ *risolve le equazioni di Lagrange.*

Teorema 23.2. *Consideriamo un sistema di punti materiali vincolato da vincoli olonomi fissi, con componenti lagrangiane delle forze conservative in senso lagrangiano e* $U^{\mathrm{L}} = U^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q})$ *e inoltre le forze direttamente applicate siano conservative in senso tradizionale, con* $\boldsymbol{q}_0$ *punto di massimo isolato per* U^{L}*. Allora* $\boldsymbol{q}_0$ *è di equilibrio stabile.*

Esercizio 23.3. 8/660, 40/660 □

Piccole oscillazioni in punti di equilibrio, con hessiana del potenziale definita negativa, per sistemi vincolati da vincoli olonomi fissi e soggetti a forze conservative. Energia cinetica ridotta, potenziale ridotto, lagrangiana ridotta.
Il caso 1-dimensionale: moto armonico.
Equazioni di Lagrange delle piccole oscillazioni nel caso $\ell > 1$:

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}\ddot{\boldsymbol{q}} - \boldsymbol{\mathcal{U}}\boldsymbol{q} = 0\,.$$

Ricerca delle frequenze delle piccole oscillazioni con la sostituzione $\boldsymbol{q}(t) = \boldsymbol{q}_0 \cos(\omega t)$; equazione $\det(\omega^2\boldsymbol{\mathcal{A}} + \boldsymbol{\mathcal{U}}) = 0$.
Teorema di esistenza delle coordinate normali.(s.d.)
Condizioni di periodicità.

Esercizio 23.4. 6/680 □

Per casa 23.5. 14/660, 20/660, 27/660, 41/660, 42/660, 46/660, 47/660, 48/660
4/680, 16/680, 20/680, 25/680, 37/680 □

Per casa 23.6. 60/620
9/630, 15/630
53/660 □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 8.4, 9.3.

24. Martedì 21/11/2023 (Aula 14: 14-17)

Le equazioni di Lagrange in un sistema di riferimento mobile: i vincoli regolari restano regolari; le forze fittizie soddisfano le necessarie ipotesi di regolarità; l'ILV nel sistema fisso è equivalente a quella nel sistema mobile (s.d.).
Le coordinate lagrangiane valide in uno dei due sistemi di riferimento lo sono anche nell'altro.

Teorema 24.1. *La forza di Coriolis ha componenti lagrangiane nulle se nel sistema mobile i vincoli sono fissi e* $\ell = 1$.

Teorema 24.2. *La forza di Coriolis ha componenti lagrangiane nulle se nel sistema mobile i moti sono vincolati a un piano solidale cui appartiene anche la velocità angolare.*

Esercizio 24.3. 54/630
MMM/12.12 Vincoli mobili: punto materiale vincolato a circonferenza che trasla:

$$R\cos\varphi \boldsymbol{e}_1 + R\sin\varphi \boldsymbol{e}_2 + \frac{ct^2}{2}\boldsymbol{e}_1\,,$$

soggetto al peso $-mg\boldsymbol{e}_2$.
Determinazione della lagrangiana e delle equazioni di Lagrange nel sistema mobile e in quello fisso. □

Teorema 24.4. *Se due lagrangiane soddisfano*

$$\mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(\boldsymbol{q}, t)\,,$$

allora hanno equazioni di Lagrange equivalenti.

Per casa 24.5. MMM/12.18 (piano che ruota intorno a un asse esterno)
1/630, 3/630, 5/630, 8/630, 14/630, 25/630, 42/630, 63/630
23/680 □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 12.2, 12.3, 12.4.

25. Giovedì 23/11/2023
(Aula 14: 14-17)

Vincoli di rigidità per n moti $\boldsymbol{X}_i$. Numero dei gradi di libertà per 3 moti non allineati ($\ell = 6$).

Teorema 25.1. (s.d.) *Risultano costanti nel tempo le quantità:*

$$(\boldsymbol{X}_j - \boldsymbol{X}_i) \cdot (\boldsymbol{X}_k - \boldsymbol{X}_h)\,,$$
$$|(\boldsymbol{X}_j - \boldsymbol{X}_i) \times (\boldsymbol{X}_k - \boldsymbol{X}_h)|\,.$$

Teorema 25.2. (s.d.) *Per ogni $r \geq 4$ esistono $\lambda_h \in \boldsymbol{R}$ costanti tali che*

$$\boldsymbol{X}_r(t) - \boldsymbol{X}_1(t) = \sum_{h=1}^{3} \lambda_h \boldsymbol{u}_h(t)\,, \qquad t \in I\,.$$

Qui $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{X}_2 - \boldsymbol{X}_1$, $\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{X}_3 - \boldsymbol{X}_1$, $\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_2$.

Dunque $\ell = 6$ per ogni $n \geq 3$.

Per casa 25.3. 52/630
MMM/7.10 □

Sistema rigido non degenere. Sistema di riferimento solidale.
Angoli di Eulero.
(MMM/13.10) Velocità angolare nella forma

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\phi}\boldsymbol{e}_3 + \dot{\theta}\boldsymbol{w}_1 + \dot{\psi}\boldsymbol{u}_3\,.$$

Esercizio 25.4. 4/340, 13/340, 44/630 □

Per casa 25.5. 5/310, 6/310, 11/340, 76/620 □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 6.6, 13.1, 13.2.

26. Lunedì 27/11/2023
(Aula 14: 14-17)

Moti solidali al rigido $\boldsymbol{X}(t,\boldsymbol{\lambda})$. Scomposizione

$$\boldsymbol{X}(t,\boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{X}_O(t) + \sum_{h=1}^{3} \lambda_h \boldsymbol{u}_h(t)\,.$$

Campo della velocità di trascinamento.
Sistema rigido degenere rettilineo.

Teorema 26.1. *Dato un versore $\boldsymbol{u} \in C^1(I)$ esiste unico $\boldsymbol{\omega}$ tale che*

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{u}\,, \qquad \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{u} = 0\,.$$

Corpi rigidi continui (e non continui). Distribuzioni di massa: solidi, superfici, curve, punti isolati. Definizione di corpo rigido non degenere e degenere rettilineo. Massa.
Definizione di moto del centro di massa $\boldsymbol{X}_G$.

Teorema 26.2. *($\boldsymbol{X}_G$ è solidale) Si ha $\boldsymbol{X}_G(t) = \boldsymbol{X}(t,\boldsymbol{\lambda}_G)$, con*

$$\boldsymbol{\lambda}_G = \frac{1}{m}\int_C \boldsymbol{\lambda}\rho(\boldsymbol{\lambda})\,\mathrm{d}\mu\,.$$

Teorema 26.3. *(additività)* (s.d.) *Se $C = C_1 \cup C_2$, con $\int_{C_1\cap C_2} \rho\,\mathrm{d}\mu = 0$, allora*

$$\boldsymbol{\lambda}_G = \frac{m_1}{m}\boldsymbol{\lambda}_G^1 + \frac{m_2}{m}\boldsymbol{\lambda}_G^2\,,$$

con m_i e $\boldsymbol{\lambda}_G^i$ rispettivamente massa e coordinate del centro di massa di C_i.

Uso del teorema di attività nel caso di rigidi forati.
Definizione di quantità di moto e momento delle quantità di moto di polo Z. Quantità di moto e momento delle quantità di moto in cui si sostituisce la formula della velocità di trascinamento (per il sistema di riferimento solidale).
Definizione del tensore d'inerzia $\boldsymbol{\sigma}_Z$ di polo Z.

Teorema 26.4. *Vale per ogni moto $\boldsymbol{X}_Z$*

$$\boldsymbol{L}_Z = \boldsymbol{\sigma}_Z\boldsymbol{\omega} + m(\boldsymbol{X}_G - \boldsymbol{X}_Z) \times \boldsymbol{V}_{\scriptscriptstyle T}(\boldsymbol{X}_Z,t)\,.$$

In particolare $\boldsymbol{L}_Z = \boldsymbol{\sigma}_Z\boldsymbol{\omega}$ se $\boldsymbol{X}_G = \boldsymbol{X}_Z$ o se $\boldsymbol{X}_Z$ è sia fisso che solidale.

Esercizio 26.5. Momento della quantità di moti in un disco vincolato a avere il centro nell'origine e a giacere nel piano $x_3 = 0$.
27/340 □

Le formule di Frenet-Serret.

Teorema 26.6. *La velocità angolare della terna intrinseca di una curva descritta da un moto di legge oraria $s(t)$ è*

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{s}[-\tau\boldsymbol{T} + k\boldsymbol{B}]\,.$$

Corollario 26.7. *Una curva è piana se e solo se ha torsione nulla.*

Per casa 26.8. MMM/14.18 (proprietà di minimo del centro di massa)
7/580, 8/580 □

Per casa 26.9. 19/330, 26/330, 31/330, 48/330, 59/330
11/340, 13/340, 35/340, 38/340 □

Per casa 26.10. Calcolare la torsione dell'elica cilindrica.
66/630 □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 10.8, 13.3, 14.1, 14.2, 14.3.

27. Martedì 28/11/2023
(Aula 14: 15-17)

Calcolo degli elementi della matrice di inerzia in un sistema qualunque. La matrice è simmetrica. Definizione di momenti di inerzia e deviatori.

Teorema 27.1. *Le quantità $\boldsymbol{\sigma u} \cdot \boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{\sigma u} \cdot \boldsymbol{w}$ (con $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w} = 0$) espresse in funzione di distanze da rette e piani (mediante integrali).*

Corollario 27.2. *La $\boldsymbol{\sigma}$ è definita positiva se il corpo è non degenere, e semidefinita positiva nel caso dell'asta rigida.*

Calcolo di $\boldsymbol{\sigma}$ per l'asta rigida. La matrice $\boldsymbol{\sigma}$ nel caso delle lamine.
Momenti d'inerzia e deviatori possono dipendere dal tempo. Però:

Teorema 27.3. *Se $\mathcal{M}$ e $\boldsymbol{X}_Z$ sono solidali con il corpo rigido, allora la matrice $\boldsymbol{\sigma}_Z^{\mathcal{M}}$ è costante nel tempo.*

Definizione di energia cinetica di un corpo rigido.

Esercizio 27.4. Calcolo dell'energia cinetica di un disco vincolato a giacere su un piano.
Calcolo della velocità angolare di un disco vincolato al piano osculatore di un'elica. □

Per casa 27.5. 26/330, 31/330 □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 14.4.

28. Giovedì 29/11/2023
(Aula 14: 14-17)

Definizione di vettori principali di inerzia, assi principali di inerzia, terne principali di inerzia.

Teorema 28.1. *Sia C un rigido non degenere. In ogni punto esiste una terna ortonormale principale, che rende la matrice di $\boldsymbol{\sigma}$ diagonale.*
Se $\boldsymbol{X}_Z$ è un moto solidale, esiste una base solidale principale $\mathcal{M}$ in $\boldsymbol{X}_Z$ (ossia tale che $\boldsymbol{\sigma}_Z^{\mathcal{M}}$ sia diagonale e costante).

Teorema 28.2. *Sia $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_h)$ una terna ortonormale. Allora se $\boldsymbol{u}_1$ è principale si ha $I_{12} = I_{13} = 0$.*

Proprietà di minimo e massimo dei momenti principali.

Teorema 28.3. *1) Dati due versori ortogonali principali, il loro prodotto vettoriale è principale.*
2) Se in un punto tutti i momenti d'inerzia principali sono uguali, tutti i vettori sono principali in quel punto.
3) Se in un punto due momenti d'inerzia principali sono uguali, tutti i versori del piano generato dai due versori principali corrispondenti sono principali.

Esercizio 28.4. Ricerca di assi principali per la lamina usando le proprietà di minimo e massimo. □

Definizione di piano di simmetria materiale ortogonale.

Teorema 28.5. (s.d.) *Se Π è di simmetria materiale ortogonale per C allora $\boldsymbol{\lambda}_G \in \Pi$.*

Ricerca di assi principali (s.d.):
la normale a un piano di simmetria materiale ortogonale è principale (in un punto del piano);
traslabilità di terne principali centrali lungo gli assi;
teorema di Huygens;
corpi con simmetria di rotazione.

Esercizio 28.6. Ricerca degli assi principali:
Cono (in poli sull'asse di rotazione);
La diagonale del rettangolo non è principale nel centro del rettangolo (se il rettangolo non è quadrato).
Sfera e cubo (in un punto qualsiasi). □

Esercizio 28.7. 39/330, 52/330 □

Per casa 28.8. MMM/14.18 (proprietà di minimo del centro di massa)
7/580, 8/580 □

Esercizio 28.9. 19/330, 35/630, 46/630, 55/630 □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 14.2, 14.4, 14.5, 14.6.

29. Lunedì 4/12/2023 (Aula 14: 14-17)

Distribuzioni di forze su un corpo rigido. Esempi.

Per casa 29.1. MMM/15.13 (potenziale gravitazionale terrestre, Terra non sferica)
MMM/15.15 (forze solidali e non solidali) □

Sistemi di corpi rigidi vincolati. Moti solidali a un corpo rigido del sistema; velocità di moti solidali in forma lagrangiana; energia cinetica di un corpo rigido e del sistema di corpi rigidi. Ipotesi dei lavori virtuali.

Teorema 29.2. (s.d.) *Le equazioni date dall'ipotesi dei lavori virtuali determinano il moto.*

Le equazioni di Lagrange per sistemi di corpi rigidi.

Esercizio 29.3. 11/620 □

Teorema 29.4. *Vale per un corpo rigido C e un moto $\boldsymbol{X}_Z$*

$$T(t) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_Z\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega} + \frac{m}{2}|\boldsymbol{V}_{\mathcal{T}}(\boldsymbol{X}_Z,t)|^2 + m\boldsymbol{V}_{\mathcal{T}}(\boldsymbol{X}_Z,t)\cdot\boldsymbol{\omega}\times[\boldsymbol{X}_G - \boldsymbol{X}_Z]\,.$$

Corollario 29.5. *(König)*

$$T(t) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_G\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega} + \frac{m}{2}|\boldsymbol{v}_G|^2\,.$$

Corollario 29.6. *In un moto polare di polo Z*

$$T(t) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_Z\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega}\,.$$

Esercizio 29.7. 63/620, 41/620 □

Per casa 29.8. 9/330, 25/330, 29/330, 41/330, 45/330, 57/330
38/620, 44/620, 47/620, 55/620
21/630, 27/630, 49/630 □

Per casa 29.9. 1/330, 5/330, 7/330, 10/330
11/620, 14/620, 20/620, 28/620, 30/620, 51/620, 58/620
1/660, 5/660, 13/660, 25/660, 36/660, 44/660, 57/660
10/680, 18/680, 22/680 □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 15.1, 15.3, 15.7, 16.1, 16.2.

30. Martedì 5/12/2023 (Aula 14: 15-17)

Equazioni globali per un corpo rigido. Forze esterne.

Teorema 30.1. *Le due equazioni globali determinano il moto di un corpo rigido non degenere.*

Cenno al caso dell'asta rigida.

Teorema 30.2. *(Equazioni di Eulero) Supponiamo che l'origine O del sistema solidale con il rigido non degenere sia fissa o coincida con il centro di massa. Vale*

$$\boldsymbol{\sigma}_O \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\sigma}_O \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{M}_O^{\text{ext}} . \tag{30.1}$$

Corollario 30.3. *In componenti, in una terna principale $(\boldsymbol{u}_h)$, denotando*

$$\boldsymbol{\omega} = \sum_{h=1}^{3} \omega_h \boldsymbol{u}_h , \qquad \boldsymbol{M}_O^{\text{ext}} = \sum_{h=1}^{3} M_h \boldsymbol{u}_h ,$$

la (30.1) *equivale a*

$$\begin{aligned} I_{11}\dot{\omega}_1 &= (I_{22} - I_{33})\omega_2\omega_3 + M_1 , \\ I_{22}\dot{\omega}_2 &= (I_{33} - I_{11})\omega_1\omega_3 + M_2 , \\ I_{33}\dot{\omega}_3 &= (I_{11} - I_{22})\omega_1\omega_2 + M_3 . \end{aligned}$$

Le equazioni di Eulero in genere vanno accoppiate con la prima equazione globale. Nel caso del moto polare determinano il moto. Sono sempre un sistema del II ordine negli angoli di Eulero, e possono essere considerate un sistema del I ordine nelle ω_h se $\boldsymbol{M}_O^{\text{ext}}$ dipende solo dalle ω_h e da t.

Esercizio 30.4. 8/470, 1/470 □

Per casa 30.5. MMM/15.26 (forza non solidale su sfera)
2/470, 5/470, 6/470, 10/470 □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 15.2, 15.4, 15.5.

31. Giovedì 7/12/2023
(Aula 14: 14-17)

Teorema 31.1. *In un moto polare di polo Z*

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M}_Z^{\mathrm{ext}} \cdot \boldsymbol{\omega} \,.$$

Sia $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ un sistema solidale al rigido non degenere.

Teorema 31.2. *Sia O fisso.*
Se il moto è una rotazione intorno a un asse principale allora $\boldsymbol{M}_O^{\mathrm{ext}}$ è parallelo all'asse di rotazione.
Se viceversa $\boldsymbol{M}_O^{\mathrm{ext}}$ è parallelo a un asse principale, il moto è di rotazione intorno a quell'asse per le opportune condizioni iniziali.

Teorema 31.3. *Sia O fisso.*
Se il moto è una rotazione intorno a un asse non principale, allora il momento $\boldsymbol{M}_O^{\mathrm{ext}}$ ha componente ortogonale all'asse non nulla in ogni istante in cui $\boldsymbol{\omega}(t) \neq 0$.

Motivazione della denominazione di momenti deviatori.
Caso del corpo vincolato a ruotare intorno a un asse fisso: si possono usare le equazioni di Eulero, quella relativa alla direzione dell'asse di rotazione dà l'equazione del moto, le altre due danno il momento della reazione vincolare.
Nel caso del corpo vincolato a ruotare intorno a un asse fisso con vincolo liscio (cioè se vale l'ipotesi dei lavori virtuali), il momento della reazione vincolare ha componente nulla lungo l'asse di rotazione.
Nel caso del corpo vincolato a muoversi di moto polare con vincolo liscio (cioè se vale l'ipotesi dei lavori virtuali), il momento della reazione vincolare è nullo.

Esercizio 31.4. 1/450, 7/450, 32/450 □

Per casa 31.5. 4/450, 17/450, 21/450, 23/450, 26/450, 47/450, 49/450, 65/450, 84/450 □

Per casa 31.6. MMM/15.42 (derivata della T di un corpo rigido nel caso generale)
9/450, 11/450, 13/450 □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 15.6, 15.7, 16.5.

32. Giovedì 14/12/2023
(Aula 14: 14-17)

Moti polari per inerzia di polo O.

Teorema 32.1. *In un moto polare per inerzia valgono gli integrali primi:*
1) $\boldsymbol{L}_O(t) = \boldsymbol{\sigma}_O\boldsymbol{\omega}(t) = \boldsymbol{L}(t_0)$.
2) $T(t) = \boldsymbol{\sigma}_O\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}/2 = T(t_0)$.

Il vettore $\boldsymbol{\sigma}_O\boldsymbol{\omega}$ è costante nella terna fissa ma in genere non solidale al rigido. Se $\boldsymbol{\omega}(t) \neq 0$ per un t allora non si annulla mai.

Esercizio 32.2. 41/450, 45/450 □

Ellissoide d'inerzia solidale e mobile. Normale all'ellissoide. Contatto senza strisciamento.

Teorema 32.3. *(Moto alla Poinsot) Consideriamo un corpo rigido non degenere che si muove di moto polare per inerzia di polo O.*
Allora l'ellissoide d'inerzia mobile si muove rotolando senza strisciare su un piano fisso, che ha normale $\boldsymbol{L}_O(t)$.

Esercizio 32.4. 29/450 □

Per casa 32.5. 31/450, 35/450 □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 15.8.

Fine del corso