# DIARIO DELLE LEZIONI DEL CORSO DI MECCANICA RAZIONALE A.A. 2022-2023 CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA

DANIELE ANDREUCCI
DIP. SCIENZE DI BASE E APPLICATE PER L'INGEGNERIA
UNIVERSITÀ LA SAPIENZA
VIA A.SCARPA 16, 00161 ROMA, ITALY

Le dimostrazioni fanno parte del programma, salvo che quando viene esplicitamente indicato il contrario con il simbolo (s.d.).

I richiami al testo MMM si riferiscono al testo *Meccanica Razionale, Modelli Matematici per l'Ingegneria*, D. Andreucci, (Independently published (5 settembre 2022) disponibile su www.amazon.it).
La numerazione $n/m$ relativa agli esercizi si riferisce all'esercizio $n$ del gruppo $m$, nella raccolta pubblicata sul sito del corso prima dell'inizio del corso.

## 1. Martedì 27/09/2021
(Aula 14: 16-18)

Presentazione del corso.
*Richiami:* Basi ortonormali e componenti in esse.
Matrici di cambiamento di base $\boldsymbol{\Gamma}_{\mathcal{M}\mathcal{N}}$. Si ha $\boldsymbol{\Gamma}_{\mathcal{M}\mathcal{N}} = \boldsymbol{\Gamma}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}{}^{\mathrm{t}}$.

**Teorema 1.1.** *Se $\boldsymbol{a}$ ha componenti $\boldsymbol{\lambda}$ in $\mathcal{M}$ e $\boldsymbol{\mu}$ in $\mathcal{N}$, allora $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\Gamma}_{\mathcal{M}\mathcal{N}}\boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\Gamma}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}\boldsymbol{\lambda}$.*

Definizione di matrice ortogonale.

**Teorema 1.2.** (s.d.) *Le matrici di cambiamento di base sono ortogonali: $\boldsymbol{\Gamma}_{\mathcal{M}\mathcal{N}} = (\boldsymbol{\Gamma}_{\mathcal{N}\mathcal{M}})^{-1}$. Quindi il loro determinante ha valore assoluto pari a* 1.

Definizione di base ortonormale positiva.

**Teorema 1.3.** (s.d.) *Composizione delle matrici del cambiamento di base: $\boldsymbol{\Gamma}_{\mathcal{M}\mathcal{P}} = \boldsymbol{\Gamma}_{\mathcal{M}\mathcal{N}}\boldsymbol{\Gamma}_{\mathcal{N}\mathcal{P}}$.*

**Esercizio 1.4.** Caratterizzazione delle matrici ortogonali in $\boldsymbol{R}^2$. □

**Per casa 1.5.** Si considerino la base ortonormale standard $(\boldsymbol{e}_h)$ e quella data da:

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{5}{6}\boldsymbol{e}_1 + \frac{\sqrt{11}}{6}\boldsymbol{e}_2 , \quad \boldsymbol{u}_2 = -\frac{\sqrt{11}}{6}\boldsymbol{e}_1 + \frac{5}{6}\boldsymbol{e}_2 , \quad \boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{e}_3 .$$

Si esprima il vettore

$$\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{e}_1 + \beta\boldsymbol{e}_2 + \gamma\boldsymbol{e}_3$$

nella base $(\boldsymbol{u}_h)$, sia calcolando e usando la matrice di cambiamento di base, sia usando direttamente la definizione di $(\boldsymbol{u}_h)$. □

Prodotto triplo in $\boldsymbol{R}^3$.

**Teorema 1.6.** *Se $(\boldsymbol{u}_h)$ è una base ortonormale positiva di $\boldsymbol{R}^3$, allora*

$$\boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u}_3 , \quad \boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_3 = -\boldsymbol{u}_2 , \quad \boldsymbol{u}_2 \times \boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{u}_1 .$$

**Corollario 1.7.** *Se $(\boldsymbol{u}_h)$ è una base ortonormale positiva,*

$$\boldsymbol{a} = \sum_{h=1}^{3} \alpha_h \boldsymbol{u}_h , \quad \boldsymbol{b} = \sum_{h=1}^{3} \beta_h \boldsymbol{u}_h , \quad \textit{si ha} \quad \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{u}_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} .$$

**Per casa 1.8.** Si consideri la base ortonormale data da:

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{5}{6}\boldsymbol{e}_1 + \frac{\sqrt{11}}{6}\boldsymbol{e}_2 , \quad \boldsymbol{u}_2 = -\frac{\sqrt{11}}{6}\boldsymbol{e}_1 + \frac{5}{6}\boldsymbol{e}_2 , \quad \boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{e}_3 .$$

Si calcoli il prodotto vettoriale

$$(3\boldsymbol{u}_1 + 7\boldsymbol{u}_2) \times (4\boldsymbol{u}_2 - 5\boldsymbol{u}_3) .$$

□

*Paragrafi di riferimento sul testo:* MMM: 1.4, 9.1, 10.1.

## 2. Giovedì 29/09/2022
(Aula 14: 14-17)

Definizione di sistema di riferimento in $\boldsymbol{R}^3$. Cambiamento di coordinate. Definizione di sistema di riferimento mobile in $\boldsymbol{R}^3$.

**Esempio 2.1.** 1) Moto $\boldsymbol{X}(t) = R\boldsymbol{e}_1$ nel sistema mobile $\mathcal{S}$ con origine mobile nell'origine del sistema fisso e base ruotante intorno all'asse $\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{u}_3$:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,.
\end{aligned}$$

2) Moto $\boldsymbol{X}(t) = (L+ct)\boldsymbol{e}_1$ nel sistema mobile $\mathcal{S}$ dell'esempio precedente. □

Derivata di un vettore relativa a una terna mobile. Regole di derivazione per la derivata relativa; derivata relativa di uno scalare. Funzioni vettoriali costanti in una terna mobile (e quindi di lunghezza costante); moti solidali con un sistema di riferimento mobile.
Definizione di velocità e accelerazione relativa a un sistema di riferimento mobile.

**Per casa 2.2.** 1) Calcolare velocità e accelerazione relativa nell'Esempio precedente.
2) 5/100. □

**Teorema 2.3.** *Data una terna mobile $(\boldsymbol{u}_h)$ esiste una unica funzione $\boldsymbol{\omega}$ tale che*

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_h}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{u}_h\,, \qquad h = 1\,,2\,,3\,.$$

$\boldsymbol{\omega}$ si dice velocità angolare della terna.

**Teorema 2.4.** *Per ogni $\boldsymbol{a} \in C^1(I)$ si ha*

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t} = \left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{M}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{a}\,.$$

Teorema del moto relativo sulla scomposizione della velocità nel sistema fisso. Velocità di trascinamento.

**Esercizio 2.5.** 1) La terna

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi(t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi(t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin\varphi(t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi(t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,,
\end{aligned}$$

ha $\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\boldsymbol{e}_3$.
2) Se una funzione vettoriale ha all'istante $\bar{t}$ derivata assoluta e relativa uguali, allora è parallelo a $\boldsymbol{\omega}(\bar{t})$. □

**Per casa 2.6.** 9/340, 24/340, 29/340, 37/340
MMM/10.36 Trovare la velocità angolare della rotazione intorno a $\boldsymbol{u}_1$ e a $\boldsymbol{u}_2$. □



*Paragrafi di riferimento sul testo:* MMM: 10.2, 10.3, 10.4, 10.5.

## 3. Lunedì 03/10/2022
(Aula 14: 14-17)

Teorema di Coriolis sulla scomposizione dell'accelerazione nel sistema fisso. Accelerazione di trascinamento e di Coriolis.

**Esercizio 3.1.** Calcolare le velocità e accelerazioni relative nell'esempio MMM/10.12. □

**Per casa 3.2.** 1/340; MMM/10.44 (epiciclo); MMM/10.43 (sistema di riferimento terrestre). □

**Teorema 3.3.** *La velocità angolare di $\mathcal{M}$ è costante in $\mathcal{M}$ se e solo se è costante; ha direzione costante in $\mathcal{M}$ se e solo se ha direzione costante.*

Definizione di rotazione e rotazione costante per una terna. Definizione di moto polare e rotazione (e rotazione costante) per un sistema mobile di riferimento.
Teorema della ricostruzione di terne mobili data la velocità angolare (s.d.).

**Esercizio 3.4.** Una terna si muove di rotazione (intorno a $\boldsymbol{u}_3$) se e solo se $\boldsymbol{\omega} = \alpha(t)\boldsymbol{u}_3$ o $\boldsymbol{\omega} = \alpha(t)\boldsymbol{e}_3$ (terna fissa e mobile coincidenti a $t = 0$).
29/340 □

Velocità angolare relativa di una terna mobile rispetto a un'altra.

**Teorema 3.5.** *Date due terne mobili $\mathcal{N}$ e $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_h)$ esiste un'unica $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}$ tale che*

$$\left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_h}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{N}} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}} \times \boldsymbol{u}_h \,.$$

**Teorema 3.6.** *Per ogni $\boldsymbol{a} \in C^1(I)$ si ha*

$$\left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{N}} = \left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{M}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}} \times \boldsymbol{a} \,.$$

Dalla definizione segue $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{M}\mathcal{M}} = 0$, $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}} = -\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{M}\mathcal{N}}$.

**Teorema 3.7** (Composizione di velocità angolari)**.** *Se $\mathcal{P}$, $\mathcal{N}$, $\mathcal{M}$ sono terne mobili, vale*

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{P}\mathcal{M}} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{P}\mathcal{N}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}} \,.$$

**Esempio 3.8.** Esempio di calcolo di $\boldsymbol{\omega}$ mediante il teorema di composizione. □

**Per casa 3.9.** 5/340, 6/340, 26/340, 27/340 □

*Paragrafi di riferimento sul testo:* MMM: 10.6, 10.7.

## 4. Martedì 04/10/2022
(Aula 14: 16-18)

Il moto di un punto come funzione vettoriale.
Velocità e accelerazione. Passaggio dall'accelerazione alla velocità e al moto, condizioni iniziali.
Grafico (linea di universo) e orbita (traiettoria) di un moto.
Moti piani, rettilinei, circolari.
Esempio di un moto di classe $C^2$ ma con orbita con uno spigolo:

$$\boldsymbol{X}(t) = t^3 \boldsymbol{e}_1 + |t|^3 \boldsymbol{e}_2 \,.$$

Confronto con il caso del grafico di una funzione scalare.
Definizione di retta tangente per la traiettoria di un moto (mediante la dipendenza da $t$).

**Teorema 4.1.** *Se un moto ammette retta tangente, allora la sua derivata è il vettore tangente. Viceversa, se un moto ha derivata diversa da zero, allora ammette retta tangente.*

**Esercizio 4.2.** Dimostrare che se $x \in C^1(\boldsymbol{R})$, $\dot{x} \geq -kx$, $k > 0$, e $x(0) > 0$, allora $x(t) > 0$ per ogni $t > 0$. □

**Per casa 4.3.** Trovare un moto tale che $\boldsymbol{X}(t) \to 0$ ma $\dot{\boldsymbol{X}}(t) \not\to 0$ per $t \to +\infty$.
MMM/1.3, MMM/1.6, MMM/1.9, MMM/1.32.
Dimostrare che se $x \in C^1(\boldsymbol{R})$, $\dot{x} = -k\sqrt{x}$, $k > 0$, e $x(0) > 0$, allora $x(t) \to 0$ per $t \to t_0- < +\infty$.
Consideriamo la curva data dall'intersezione di due superficie:

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = 0 \,, \qquad f_2(x_1, x_2, x_3) = 0 \,;$$

dare una definizione di vettore tangente alla curva indipendente da una sua eventuale parametrizzazione (senza dimostrazioni).
1/100. □

*Paragrafi di riferimento sul testo:* MMM: 1.1, 1.2.

## 5. Giovedì 06/10/2022
(Aula 14: 14-17)

Definizione di punto materiale. Legge del moto.
Problema di Cauchy o ai valori iniziali. Funzioni localmente lipschitziane. Criterio di lipschitzianità mediante le derivate. Soluzioni massimali.

**Esercizio 5.1.** Soluzione massimale per

$$\dot{x} = x^2 \,, \qquad x(0) = c > 0 \,.$$

$\square$

**Teorema 5.2.** (s.d.) *La soluzione massimale del problema di Cauchy per l'equazione* $m\ddot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{X}, \dot{\boldsymbol{X}})$ *esiste ed è unica se* $\boldsymbol{F}$ *è continua in un aperto* $A \subset \boldsymbol{R}^7$ *e localmente lipschitziana rispetto a* $\boldsymbol{X}$, $\dot{\boldsymbol{X}}$.
*Il suo intervallo di definizione* $(\sigma, \Sigma)$ *è aperto e per* $t \to \Sigma-$ *si deve avere che* $(t, \boldsymbol{X}(t), \dot{\boldsymbol{X}}(t))$ *diventa illimitata oppure la sua distanza da* $\partial A$ *tende a* 0.

**Esercizio 5.3.** 1) Non unicità per il problema

$$\dot{x} = -k\sqrt{|x|} \,, \qquad x(\bar{t}) = 0 \,,$$

in cui non è soddisfatta l'ipotesi di lipschitzianità.
2) MMM/1.24: Risoluzione completa del problema

$$m\ddot{\boldsymbol{X}} = -k\boldsymbol{X} \,, \qquad \boldsymbol{X}(0) = \boldsymbol{x}_0 \,, \qquad \dot{\boldsymbol{X}}(0) = \boldsymbol{v}_0 \,.$$

Le orbite sono curve piane. $\square$

Riduzione dell'ordine di un sistema differenziale, aumentando il numero delle variabili.

**Esercizio 5.4.** MMM/1.25: Prima integrazione del problema

$$m\ddot{\boldsymbol{X}} = -\gamma m \frac{\boldsymbol{X}}{|\boldsymbol{X}|^3} \,, \qquad \boldsymbol{X}(0) = L\boldsymbol{e}_1 \,, \qquad \dot{\boldsymbol{X}}(0) = -c\boldsymbol{e}_1 \,.$$

Uso del teorema di unicità. L'intervallo di definizione è limitato a destra ($\Sigma < +\infty$). $\square$

**Per casa 5.5.** 1) Trovare tutte le soluzioni di

$$\dot{X}_1 = X_2 \,, \qquad \dot{X}_2 = -X_1 \,.$$

2) Riduzione del problema precedente in coordinate polari.
3) 2/100, 3/100, 4/100. $\square$

*Paragrafi di riferimento sul testo:* MMM: 1.3, 1.8.

## 6. Lunedì 10/10/2022
(Aula 14: 14-17)

Energia cinetica $T$ di un punto materiale.

**Teorema 6.1** (del lavoro o dell'energia cinetica)**.** *Se* $m\ddot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{F}$, *allora*

$$T(t_1) - T(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{F} \cdot \dot{\boldsymbol{X}} \, \mathrm{d}t \,.$$

**Esercizio 6.2.** MMM/1.45: Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{aligned} m\ddot{\boldsymbol{X}} &= \boldsymbol{B} \times \dot{\boldsymbol{X}} \,, \\ \boldsymbol{X}(0) &= L\boldsymbol{e}_1 \,, \\ \dot{\boldsymbol{X}}(0) &= c\boldsymbol{e}_2 \,. \end{aligned}$$

Qui $L > 0$, $c > 0$. Integrale dell'energia cinetica. □

Dipendenza continua. Necessità di assumere intervalli limitati.

**Esercizio 6.3.** Il caso $\dot{x} = x$.
Il caso $\dot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$, $\boldsymbol{F}$ globalmente lipschitziana. □

**Esercizio 6.4.** Integrale generale del sistema lineare a coefficienti costanti del primo ordine

$$\dot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{X} \,,$$

nell'ipotesi che la matrice $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ abbia una base di autovettori. Studio della stabilità dell'origine (è stabile se e solo se tutti gli autovalori sono non positivi o con parte reale non positiva se complessi). □

**Per casa 6.5.** Dimostrare la dipendenza continua per $m\ddot{\boldsymbol{X}} = -k\boldsymbol{X}$ e per $m\ddot{\boldsymbol{X}} = k\boldsymbol{X}$, $m$, $k > 0$.
MMM/1.49 □

Sistemi differenziali autonomi. Traslazione nel tempo delle soluzioni.
Definizione di punto di equilibrio $\boldsymbol{x}_{\mathrm{eq}} \in \boldsymbol{R}^3$ per un sistema autonomo di primo o di secondo ordine.
Il punto $\boldsymbol{x}_{\mathrm{eq}}$ è di equilibrio se e solo se la funzione costante $\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{x}_{\mathrm{eq}}$ è soluzione.

**Esercizio 6.6.** Andamento qualitativo delle soluzioni di $\dot{x} = x(1 - x)$. □

**Per casa 6.7.** Andamento qualitativo delle soluzioni di $\dot{x} = \sin x$.
MMM/1.69: Si dimostri che le sole soluzioni periodiche di

$$\dot{x} = f(x) \,, \qquad f \in C^1(\boldsymbol{R}) \,,$$

sono le costanti. □

*Paragrafi di riferimento sul testo:* MMM: 1.5, 1.6, 1.7.

## 7. Martedì 11/10/2022
(Aula 14: 16-18)

Definizione di equilibrio stabile.

**Esercizio 7.1.** Il caso $\boldsymbol{F} = 0$.
MMM/1.58: Tutti i punti di $\boldsymbol{R}^3$ sono di equilibrio stabile per $m\ddot{\boldsymbol{X}} = -\mu\dot{\boldsymbol{X}}$, $m$, $\mu > 0$. □

**Per casa 7.2.** 1) MMM/1.59: Studiare la stabilità dell'equilibrio per $m\ddot{X} = -\mu\dot{X}^{1+q}$, $m$, $\mu$, $q > 0$. Si assuma $\dot{X} > 0$.
2) I casi $m\ddot{\boldsymbol{X}} = \pm k\boldsymbol{X}$, $k > 0$.
3) MMM/1.64
4) MMM/1.46: Risolvere tutti i problemi di Cauchy

$$m\ddot{\boldsymbol{X}} = -\mu(t)\dot{\boldsymbol{X}}\,, \quad \boldsymbol{X}(0) = \boldsymbol{x}_0\,, \quad \dot{\boldsymbol{X}}(0) = \boldsymbol{v}_0\,;$$

qui $\mu(t) > 0$ è una funzione continua su $\boldsymbol{R}$. Dare una condizione su $\mu$ tale che $T(t) \not\to 0$ per $t \to +\infty$. □

Esempio di integrazione completa nel teorema dell'energia cinetica. Definizione di forza conservativa.

**Teorema 7.3.** *Se* $\boldsymbol{F} = \nabla U$*, allora*

$$T(t_1) - T(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}(\tau)) \cdot \dot{\boldsymbol{X}}(\tau)\,\mathrm{d}\tau = U(\boldsymbol{X}(t_1)) - U(\boldsymbol{X}(t_0))\,.$$

Definizione di energia (meccanica).

**Teorema 7.4.** *Se un moto* $\boldsymbol{X}$ *soddisfa* $m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}$ *e* $\boldsymbol{F}$ *è conservativa con potenziale* $U$*, allora l'energia*

$$\mathcal{E}(t) = \frac{m}{2}|\dot{\boldsymbol{X}}(t)|^2 - U(\boldsymbol{X}(t))$$

*si mantiene costante durante il moto.*

**Teorema 7.5.** *Se un moto* $\boldsymbol{X}$ *soddisfa* $m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_0$*, con* $\boldsymbol{F}$ *conservativa con potenziale* $U$*, e* $\boldsymbol{F}_0 \cdot \dot{\boldsymbol{X}} = 0$*, allora l'energia*

$$\mathcal{E}(t) = \frac{m}{2}|\dot{\boldsymbol{X}}(t)|^2 - U(\boldsymbol{X}(t))$$

*si mantiene costante durante il moto.*

**Esercizio 7.6.** Conservazione dell'energia come strumento per ottenere informazioni sul moto; caso del moto armonico.
9/120 □

**Per casa 7.7.** MMM/2.9
1/120, 3/120, 7/120, 8/120 □

*Paragrafi di riferimento sul testo:* MMM: 1.7, 2.1, 2.2.

## 8. Giovedì 13/10/2022

(Aula 14: 14-17)

Campi di forze posizionali e conservativi (potenziali). Esempi. Un campo conservativo è chiuso, ma non vale l'implicazione contraria.

**Teorema 8.1** (Criterio necessario e sufficiente della circuitazione nulla.)**.** (s.d.) *Un campo $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \in A \subset \boldsymbol{R}^3$ è conservativo in $A$ se e solo se il suo integrale su tutte le curve chiuse contenute in $A$ è nullo.*

Semplicemente connessi in $\boldsymbol{R}^2$ e $\boldsymbol{R}^3$.

**Teorema 8.2.** (s.d.) *Un campo chiuso in un aperto semplicemente connesso $A$ è conservativo in $A$.*

Integrali primi.

**Per casa 8.3.** MMM/2.22 (esempio), MMM/2.23
Sia $\varphi(x, y)$ un'anomalia polare in $\boldsymbol{R}^2$; si trovi $\nabla \varphi$ e se ne deduca che il campo

$$-\frac{y}{x^2 + y^2}\boldsymbol{e}_1 + \frac{x}{x^2 + y^2}\boldsymbol{e}_2 \,, \qquad (x, y) \neq (0, 0) \,,$$

ha per potenziale locale l'anomalia polare, ma non in tutto $\boldsymbol{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. $\square$

Piano delle fasi di moti 1-dimensionali conservativi. Passaggio da $m\ddot{x} = f(x) = U'(x)$ al sistema equivalente

$$\dot{x} = p \,, \qquad \dot{p} = \frac{1}{m} f(x) \,.$$

Orbite. Le orbite giacciono sulle curve che hanno la forma

$$p = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E + U(x))} \,, \quad x \in J(E) = \{x \in \boldsymbol{R} \mid E + U(x) \geq 0\} \,.$$

Ciascuna curva può contenere più orbite.

**Esercizio 8.4.** Il diagramma di fase di $m\ddot{x} = -kx$ e di $m\ddot{x} = -k \sin x$.
Punti di inversione, di equilibrio stabili e instabili riconosciuti dal ritratto di fase. $\square$

**Per casa 8.5.** 21/150, 25/150 $\square$

*Paragrafi di riferimento sul testo:* MMM: 2.3, 2.4, 2.5.

## 9. Lunedì 17/10/2022
(Aula 14: 14-17)

**Teorema 9.1.** *Se due orbite si intersecano, allora coincidono.*

**Teorema 9.2.** *Se un'orbita si autointerseca, allora corrisponde a una soluzione periodica.*

**Teorema 9.3.** (s.d.) *Se $X \in C^2((\sigma, \Sigma))$ è una soluzione massimale di $m\ddot{X} = F(X)$ e*

$$X(t) \to x_0 \,, \qquad t \to \Sigma- \,, \qquad |\dot{X}(t)| \le C \,, \qquad t \in (\delta, \Sigma) \,,$$

*allora $\Sigma = +\infty$ e $F(x_0) = 0$. Se anche $\dot{\boldsymbol{X}}(t) \to \boldsymbol{p}$ per $t \to +\infty$, allora $\boldsymbol{p} = 0$.*

**Esercizio 9.4.** 27/150 □

**Per casa 9.5.** È possibile fare tutti gli esercizi del gruppo 150.
6/150, 16/150, 18/150 □

Energia come funzione di due variabili:

$$W(x, p) = \frac{m}{2} p^2 - U(x) \,;$$

uguaglianza $W(X(t), \dot{X}(t)) = \mathcal{E}(t)$.
Punti di equilibrio di $m\ddot{x} = U'(x)$ sono i punti critici del potenziale e corrispondono ai punti $(\boldsymbol{x}_{\rm eq}, 0)$ critici per $W$. Questi ultimi possono essere sella o minimi. Le orbite del piano delle fasi $(x, p)$ giacciono su curve di livello di $W$. Curve di livello di $W$ vicino a massimi e minimi di $U$ e confronto con il diagramma di fase.

**Teorema 9.6.** *(Dirichlet) Punti di massimo isolato di $U$ corrispondono a punti di equilibrio stabile di $m\ddot{X} = U'(X)$.*

**Per casa 9.7.** Dimostrare che se $U(x) = U(0)$ per ogni $x \in [0, 1]$ allora ogni $x \in [0, 1]$ è di equilibrio instabile. □

**Teorema 9.8.** *Punti di massimo isolato di $U$ corrispondono a punti di equilibrio stabile di $m\ddot{X} = U'(X) - r(X, \dot{X})\dot{X}$, ove $r \ge 0$.*

**Teorema 9.9.** *(Dimensione $N > 1$). Punti di massimo isolato di $U$ corrispondono a punti di equilibrio stabile di $m\ddot{\boldsymbol{X}} = \nabla U(\boldsymbol{X}) + \boldsymbol{h}(\boldsymbol{X}, \dot{\boldsymbol{X}})$, ove $\boldsymbol{h} \cdot \dot{\boldsymbol{X}} \le 0$.*

**Esercizio 9.10.** 17/660 □

**Per casa 9.11.** 19/660, 32/660, 39/660, 50/660, 52/660, 56/660
Sia $f \in C^2(\boldsymbol{R})$. Trovare condizioni sufficienti su $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$ perché il moto piano $m\boldsymbol{a} = \nabla U$ abbia in $(0, 0)$ un punto di equilibrio stabile, ove

$$U(x_1, x_2) = f(x_1^2 + x_2^2) \,, \qquad (x_1, x_2) \in \boldsymbol{R}^2 \,.$$

□



*Paragrafi di riferimento sul testo:* MMM: 2.5, 2.6.

## 10. Martedì 18/10/2022
(Aula 14: 16-18)

Forze a direzione radiale. Moti centrali.

**Teorema 10.1.** *In un moto centrale il vettore* $\boldsymbol{X}(t) \times \dot{\boldsymbol{X}}(t)$ *è costante.*

**Teorema 10.2.** *Sia* $\boldsymbol{X}$ *un moto centrale.*
*1) Se* $\boldsymbol{X}(0) \times \dot{\boldsymbol{X}}(0) \neq 0$*, allora il moto avviene nel piano per* $\boldsymbol{X}(t_0)$ *perpendicolare al vettore* $\boldsymbol{X}(0) \times \dot{\boldsymbol{X}}(0)$*.*
*2) Se* $\boldsymbol{X}(0) \times \dot{\boldsymbol{X}}(0) = 0$*, allora il moto avviene sulla retta per* $\boldsymbol{X}(t_0)$ *e l'origine.*

Moti piani e coordinate polari; versori radiale e trasversale. Velocità e accelerazione radiale e trasversale. Equazioni del moto centrale scomposte nella base dei versori radiale e trasversale; l'accelerazione trasversale è nulla, quindi la velocità areolare è costante.

**Per casa 10.3.** 3/220, 5/220, 7/220 □

La formula di Binet (s.d.).

**Teorema 10.4.** *Una forza a direzione radiale è conservativa se e solo se è nella forma*

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = f(|\boldsymbol{x}|)\frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|} \,,$$

*e allora il suo potenziale è (per* $d > 0$ *arbitrario)*

$$U(\boldsymbol{x}) = \int_d^{|\boldsymbol{x}|} f(s)\,\mathrm{d}s \,.$$

**Esercizio 10.5.** La formula di Binet nel caso della forza gravitazionale. □

**Per casa 10.6.** 1/220 □

*Paragrafi di riferimento sul testo:* MMM: 2.8.

## 11. Giovedì 20/10/2022
(Aula 14: 14-17)

Disuguaglianza del modulo per gli integrali; formula di Taylor per funzioni vettoriali.
Definizione di lunghezza $L$ della traiettoria di un moto come estremo superiore delle lunghezze delle approssimazioni con spezzate. Si ha

$$L \leq \int_{t_0}^{t_1} |\dot{\boldsymbol{X}}(\tau)| \, \mathrm{d}\tau \,.$$

In effetti

**Teorema 11.1.** (s.d.)

$$L = \int_{t_0}^{t_1} |\dot{\boldsymbol{X}}(\tau)| \, \mathrm{d}\tau \,.$$

Definizione di lunghezza d'arco $s$. Funzione inversa della lunghezza d'arco per moti regolari. Parametrizzazione mediante $s$.
Moto dato mediante la traiettoria e la legge oraria.

**Esercizio 11.2.** 1) Lunghezza d'arco nell'elica cilindrica (definita nell'Esempio MMM 3.22).
2) Lunghezza d'arco nell'ellisse. □

**Per casa 11.3.** 1) Scrivere il moto che ha per traiettoria l'elica cilindrica e legge oraria $s(t) = bt^2$.
2) Scrivere la legge oraria per il moto sull'elica cilindrica che ha per prima coordinata $R\cos(bt^3)$. □

Versore tangente, versore normale principale, curvatura, raggio di curvatura.

**Teorema 11.4.** *Una curva è un segmento di retta per $s \in (a, b)$ se e solo se la curvatura è nulla per $s \in (a, b)$.*

Scomposizione di velocità e accelerazione:

$$\boldsymbol{v} = \dot{s}\boldsymbol{T}(s) \,, \qquad \boldsymbol{a} = \ddot{s}\boldsymbol{T}(s) + \dot{s}^2 k(s)\boldsymbol{N}(s) \,.$$

Accelerazione tangente e normale.
La terna intrinseca $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ (se $k > 0$).

**Esercizio 11.5.** 1) Traiettoria rettilinea.
2) Traiettoria circolare. □

**Per casa 11.6.** Determinare la terna intrinseca dell'elica cilindrica.
6/100 □

Moto vincolato a una curva, reazioni vincolari. Necessità di ipotesi costitutive. Legge di attrito di Coulomb-Morin e problema ai valori iniziali per il sistema del moto per un punto vincolato a una curva scabra.

**Per casa 11.7.** 15/560, 19/560, 20/560 □

*Paragrafi di riferimento sul testo:* MMM: 3.1, 3.2, 3.3, 3.5, 3.6.

## 12. Lunedì 24/10/2022
(Aula 14: 14-17)

**Teorema 12.1.** *Il problema ai valori iniziali per il sistema del moto per un punto vincolato a una curva scabra, se le forze sono continue e localmente lipschitziane in* $(s, \dot{s})$*, ammette unica soluzione.*

**Esercizio 12.2.** 15/560
MMM/3.28, MMM/3.31 □

**Teorema 12.3.** *Una curva è piana se e solo se* $\boldsymbol{B}(s)$ *è costante.*

**Per casa 12.4.** 2/120, 3/120, 12/120, 11/560, 13/560, 16/560, 22/560, 23/560, 24/560, 10/620 □

Superfici regolari e loro parametrizzazioni; i vettori derivate rispetto ai due parametri; la normale.
Definizione di piano tangente. Le velocità dei moti vincolati alla superficie appartengono al piano tangente.

*Paragrafi di riferimento sul testo:* MMM: 3.5, 3.7, 4.1.

## 13. Martedì 25/10/2022 (Aula 14: 16-18)

Il piano tangente in realtà è indipendente dalla parametrizzazione (per superfici di livello).

**Esempio 13.1.** Parametrizzazione della sfera con longitudine e colatitudine. □

Scomposizione dell'accelerazione in termini dei vettori tangenti coordinati e delle loro derivate.
L'equazione di moto di un punto vincolato alla superficie nella base data dai vettori tangenti coordinati e dalla normale. La reazione vincolare. Vincolo liscio per una superficie.

**Teorema 13.2.** *Sia $S$ una superficie con parametrizzazione di classe $C^3$, e $\boldsymbol{F}(\varphi, \theta, \dot{\varphi}, \dot{\theta}, t)$ una forza continua e localmente lipschitziana in $(\varphi, \theta, \dot{\varphi}, \dot{\theta})$. Allora il problema del moto del punto vincolato a una superficie liscia ha unica soluzione massimale.*

Nel caso del vincolo liscio il moto si determina indipendentemente dalla reazione vincolare che scompare dalle equazioni di moto.

**Esercizio 13.3.** Parametrizzazione delle superfici di rotazione ottenute ruotando intorno all'asse $x_3$ la curva

$$x_3 = f(x_2) \,, \qquad x_1 = 0 \,.$$

1/620 □

**Per casa 13.4.** 1) Parametrizzare la superficie data dalla rotazione intorno all'asse $x_3$ della curva

$$x_2 = a(\sin(bx_3) + 2) \,, \qquad x_1 = 0 \,.$$

2) Scrivere le equazioni di moto per il punto pesante vincolato alla sfera.
5/120, 3/620, 7/620 □

*Paragrafi di riferimento sul testo:* MMM: 4.1, 4.2.

## 14. Giovedì 27/10/2022
(Aula 14: 14-17)

Vincolo scabro per una superficie: attrito dinamico.
Attrito statico; motivi della disuguaglianza nella legge di Coulomb-Morin.
Coni di attrito per la superficie e la curva.

**Esercizio 14.1.** MMM/4.18, MMM/4.19: Punti di equilibrio per un punto pesante vincolato a una sfera scabra, e poi a un suo meridiano scabro. □

**Per casa 14.2.** 1/520, 2/520, 5/520, 6/520
27/560, 29/560 □

Dinamica relativa; le forze apparenti di trascinamento e di Coriolis.

**Esercizio 14.3.** MMM/12.6 (ellisse scabra ruotante) □

**Per casa 14.4.** 1/350, 4/350, 8/350, 3/580, 5/580, 10/580 □

*Paragrafi di riferimento sul testo:* MMM: 4.4, 4.5, 12.1.

## 15. Giovedì 3/11/2022
(Aula 14: 14-17)

Sistemi di punti materiali $(\boldsymbol{X}_h, m_h)$, $h = 1, \dots, n$ e sistema differenziale delle loro equazioni di moto.
Centro di massa e involucro convesso. Quantità di moto, coincidente con $m\boldsymbol{v}_G$; momento delle quantità di moto.
Definizione di forza totale $\boldsymbol{F}$ e momento delle forze $\boldsymbol{M}_A$.

**Teorema 15.1.** *(Equazioni globali) Valgono:*

$$m\ddot{\boldsymbol{X}}_G = \boldsymbol{F}\,, \qquad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_A}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M}_A + \boldsymbol{P} \times \dot{\boldsymbol{X}}_A\,.$$

Le equazioni globali in genere non determinano il moto del sistema di punti materiali.

**Esercizio 15.2.** Due punti che si attraggono a vicenda con forze elastiche.
9/620 □

**Per casa 15.3.** 8/620, 59/620 □

Sotto le ipotesi opportune sulle forze interne, le equazioni globali valgono ancora se in $\boldsymbol{F}$ e $\boldsymbol{M}_A$ si tiene conto solo delle forze esterne.

**Esercizio 15.4.** 3/580 □

Sistemi di forze conservative $\boldsymbol{F}_i$, cioè tali che

$$\boldsymbol{F}_i = \nabla_{\boldsymbol{x}_i} U(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n)\,.$$

**Per casa 15.5.** 12/620, 16/620, 21/620 □

Energia cinetica e meccanica del sistema.

**Esempio 15.6.** Potenziale e conservazione dell'energia per due punti materiali che si attraggono con forze elastiche. □

Conservazione dell'energia, anche in presenza di forze non conservative di lavoro complessivo nullo.

**Teorema 15.7.** *Se un sistema di punti materiali liberi è soggetto alle equazioni di moto $m_i\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{F}_i^0$ ove il sistema delle forze $\boldsymbol{F}_i$ è conservativo con potenziale $U$, e*

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i^0 \cdot \boldsymbol{v}_i = 0 \qquad \text{in ogni istante}$$

*allora l'energia meccanica $T - U$ si conserva lungo i moti.*

**Esercizio 15.8.** 10/620 □

**Per casa 15.9.** MMM/5.19
64/620, 66/620 □

*Paragrafi di riferimento sul testo:* MMM: 5.1, 5.2.

## 16. Lunedì 7/11/2022
(Aula 14: 14-17)

Esempi di vincoli per un singolo moto: superficie, curva come intersezione di due superficie.
Calcolo dei gradi di libertà mediante i parametri necessari o mediante le equazioni vincolari. Vincolo per due moti di essere paralleli, cioè allineati con l'origine; una delle componenti del prodotto vettoriale (che devono essere tutte nulle) risulta combinazione lineare delle altre.
Vincoli in generale. Configurazioni compatibili. Esempi.

**Esercizio 16.1.** Piano e sfera: i 3 casi possibili. □

Teorema del Dini per 1 vincolo scalare e per $m > 1$ vincoli scalari (s.d.).
Coordinate dipendenti e indipendenti. Esempi di applicazione del teorema del Dini. Calcolo dei gradi di libertà.

**Per casa 16.2.** Vincolo di parallelismo per due moti (4 gradi di libertà) con il teorema del Dini.
Coordinate dipendenti e indipendenti sulla sfera e sull'iperboloide

$$x_3^2 + 1 = x_1^2 + x_2^2 \,.$$

□

Definizione di vincolo olonomo regolare. Vincoli fissi e mobili.

**Esercizio 16.3.** MMM/5.38
Vincolo di rigidità per due punti.
21/620 □

**Per casa 16.4.** MMM/5.25, MMM/5.32, MMM/5.39, MMM/5.40
1/310, 2/310, 3/310, 4/310 □

*Paragrafi di riferimento sul testo:* MMM: 5.3, 5.4, 5.5, 5.6.

## 17. Martedì 8/11/2022
(Aula 14: 16-18)

Coordinate lagrangiane e rappresentazione lagrangiana del moto. Moto lagrangiano. Il vettore $\dot{\boldsymbol{q}}$ può assumere qualunque valore.

**Esempio 17.1.** La sfera. □

Velocità in coordinate lagrangiane per vincoli fissi e mobili.

**Esercizio 17.2.** MMM/6.5: Esempio di un punto vincolato a una sfera di raggio variabile e di un punto vincolato a essere allineato con il primo e con l'origine. □

**Per casa 17.3.** 1/630 (scrittura della velocità in rappresentazione lagrangiana)
Mostrare che le coordinate indipendenti sono anche coordinate lagrangiane.
MMM/5.44
26/620, 9/630, 15/630 □

Definizione di spazio tangente.

**Per casa 17.4.** 1) Trovare lo spazio tangente per: i) due punti vincolati a essere a distanza costante; ii) MMM/6.24 un punto vincolato al piano ruotante

$$-x_1 \sin(\alpha t) + x_2 \cos(\alpha t) = 0\,.$$

2) 66/620 (spazio tangente) □

*Paragrafi di riferimento sul testo:* MMM: 5.7, 6.1, 6.3.

## 18. Giovedì 10/11/2022
(Aula 14: 14-17)

Spostamenti virtuali. Atti di moto (ossia derivata nel tempo del vettore delle coordinate locali $\boldsymbol{z}$).

**Teorema 18.1.** *Gli atti di moto costituiscono lo spazio affine*

$$V_{\boldsymbol{z},t}\boldsymbol{f} + \frac{\partial \boldsymbol{z}^{\mathrm{L}}}{\partial t}\,.$$

Spostamenti virtuali e effettivi, e loro significato. Coincidono per i vincoli fissi.

**Esempio 18.2.** Spostamenti virtuali e effettivi per la circonferenza che trasla. □

**Per casa 18.3.** 66/620 (spazio tangente) □

Vale per ogni $j \in \{1\,,\dots\,,\ell\}$, $k \in \{1\,,\dots\,,m\}$

$$\nabla_{\boldsymbol{z}}\, f_k \cdot \frac{\partial \boldsymbol{z}^{\mathrm{L}}}{\partial q_j} = 0\,.$$

Definizione di spazio normale come sottospazio di $\boldsymbol{R}^{n_c}$ generato dai $\nabla_z\, f_k$.

**Teorema 18.4.** *Lo spazio normale è l'ortogonale dello spazio tangente.*

**Esercizio 18.5.** MMM/6.21 Calcolo dello spazio normale e tangente nei casi:
1) superficie ($n_c = 3$, $m = 1$),
2) curva ($n_c = 3$, $m = 2$),
3) due punti vincolati a avere uguale quota ($n_c = 6$, $m = 1$). □

**Esercizio 18.6.** MMM/3.37 (con la dinamica relativa)
15/630, 9/630 □

**Per casa 18.7.** Trovare gli spazi tangente e normale per: i) due punti vincolati a essere a distanza costante; ii) MMM/6.24 un punto vincolato al piano ruotante

$$-x_1 \sin(\alpha t) + x_2 \cos(\alpha t) = 0\,.$$

□

*Paragrafi di riferimento sul testo:* MMM: 6.3.

## 19. Lunedì 14/11/2022
(Aula 14: 14-17)

Lo spazio tangente è indipendente dalla parametrizzazione lagrangiana.

**Esercizio 19.1.** MMM/7.1 Sistema vincolato di due punti, con $n_c = 6$, $m = 1$,
$$f_1(z_1, \dots, z_6) = 2z_1 - z_4 = 0\,.$$
Inoltre le forze sono $\boldsymbol{F}_1 = \alpha_1 \boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{F}_2 = \alpha_2 \boldsymbol{e}_1$. Equazioni di moto; ipotesi sulle reazioni vincolari $\mathbf{f}_{\mathrm{vin}} \in N_{\boldsymbol{z},t}\boldsymbol{f}$. Lavoro complessivo nullo delle rezioni vincolari in questo caso, ma ciascuna ${\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}}^i$ fa lavoro non nullo sul moto $\boldsymbol{X}_i$. □

Lavoro virtuale e effettivo delle reazioni vincolari nel caso dei vincoli fissi e mobili.
Ipotesi dei lavori virtuali (ILV).

**Esercizio 19.2.** 15/620 (modificato: asta omogenea → asta composta da due punti materiali), risolto con l'ipotesi $\mathbf{f}_{\mathrm{vin}} \in N_{\boldsymbol{z},t}\boldsymbol{f}$. □

ILV per la curva liscia e la superficie liscia.

**Per casa 19.3.** 1) Scrivere le equazioni di moto con l'ipotesi dei lavori virtuali:
9/620, 36/620, 57/620, 59/620, 23/630
3) Mostrare che nel caso del vincolo di rigidità tra due moti, la ILV implica che le reazioni vincolari si possono considerare forze interne. □

*Paragrafi di riferimento sul testo:* MMM: 7.1.

## 20. Martedì 15/11/2022
(Aula 14: 16-18)

Energia cinetica $T^{\mathrm{L}}$ in forma lagrangiana.

**Teorema 20.1.** *Vale*

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{p}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{p} + \boldsymbol{b}_1 \cdot \boldsymbol{p} + b_0 \,.$$

$\boldsymbol{\mathcal{A}}$ *è la matrice simmetrica e definita positiva data da*

$$a_{hk} = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\partial \boldsymbol{X}_i^{\mathrm{L}}}{\partial q_h} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{X}_i^{\mathrm{L}}}{\partial q_k} \,,$$

*e* $\boldsymbol{b}_1$ *e* $b_0$ *si annullano se* $\partial \boldsymbol{z}^{\mathrm{L}}/\partial t = 0$*.*

**Per casa 20.2.** Calcolare le energie cinetiche negli esercizi:
9/620, 36/620, 57/620, 59/620, 23/630 □

Forze in coordinate lagrangiane. L'ipotesi dei lavori virtuali (ILV) in diverse forme.

**Teorema 20.3.** *L'ipotesi dei lavori virtuali determina il moto.*

**Esercizio 20.4.** 57/620 □

**Per casa 20.5.** 66/620
Scrivere le equazioni di moto di un punto libero con la ILV.
Punto su piano ruotante, in assenza di forze direttamente applicate. □

*Paragrafi di riferimento sul testo:* MMM: 7.2, 7.3, 7.5.

## 21. Giovedì 17/11/2022
(Aula 14: 14-17)

**Lemma 21.1.** *Valgono*

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}_i^{\mathrm{L}}}{\partial p_h}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t) = \frac{\partial \boldsymbol{X}_i^{\mathrm{L}}}{\partial q_h}(\boldsymbol{q},t)\,,$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\frac{\partial \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}}{\partial q_h}(\boldsymbol{q}(t),t)\Big) = \frac{\partial \boldsymbol{v}_i^{\mathrm{L}}}{\partial q_h}(\boldsymbol{q}(t),\dot{\boldsymbol{q}}(t),t)\,.$$

Notazione

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_h} = \frac{\partial}{\partial p_h}\,.$$

Le componenti lagrangiane delle forze $Q_h$.

**Teorema 21.2.** *(Equazioni di Lagrange) Le $\ell$ equazioni*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\frac{\partial T^{\mathrm{L}}}{\partial \dot{q}_h}\Big] - \frac{\partial T^{\mathrm{L}}}{\partial q_h} = Q_h\,,\quad h = 1\,,\dots\,,\ell\,,$$

*sono equivalenti all'ipotesi dei lavori virtuali.*

**Esercizio 21.3.** MMM 7.1 con le equazioni di Lagrange.
57/620 □

**Per casa 21.4.** (Non usare lagrangiana né passaggio al sistema di riferimento mobile)
1/620, 37/620, 61/620 (senza potenziale lagrangiano)
17/630, 29/630, 31/630, 37/630 □

Forze conservative e componenti lagrangiane delle forze.

**Teorema 21.5.** *Se il sistema di punti materiali è soggetto a sollecitazioni conservative di potenziale $U(\boldsymbol{z})$, si ha*

$$Q_h = \frac{\partial}{\partial q_h}[U(\boldsymbol{z}^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q},t))]\,,\qquad h = 1\,,\dots\,,\ell\,.$$

**Esercizio 21.6.** Componenti lagrangiane delle forze per un punto materiale $(\boldsymbol{X},m)$ vincolato alla sfera

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2\,,$$

e soggetto alla forza elastica

$$\boldsymbol{F} = -k(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_A)\,,\qquad \boldsymbol{X}_A = R\boldsymbol{e}_3\,.$$

□

**Per casa 21.7.** Calcolare le componenti lagrangiane delle forze per il punto materiale $(\boldsymbol{X},m)$ vincolato alla circonferenza mobile

$$x_1^2 + x_2^2 = r(t)^2\,,\qquad r > 0\,, r \in C^2(\boldsymbol{R})\,,$$

e soggetto alla forza

$$\boldsymbol{F} = -k(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_A)\,,\qquad \boldsymbol{X}_A = R\boldsymbol{e}_2\,,\qquad R > 0\,.$$

□

Definizione di potenziale lagrangiano e forze conservative in senso lagrangiano. Definizione di lagrangiana. Equazioni di Lagrange in forma conservativa.

**Esercizio 21.8.** 1/620 (Punto pesante vincolato a superficie di rotazione) □

**Per casa 21.9.** 32/620, 35/620, 40/620, 56/620, 59/620, 64/620, 65/620, 68/620, 71/620; 6/630 □

*Paragrafi di riferimento sul testo:* MMM: 7.6, 8.1, 8.2.

# 22. Lunedì 21/11/2022
(Aula 14: 14-17)

Coordinate cicliche e integrale primo associato.

**Teorema 22.1.** *Se i vincoli sono fissi e il sistema di punti materiali è soggetto a sollecitazioni conservative di potenziale $U(\boldsymbol{z})$, l'energia*

$$T^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) - U(\boldsymbol{z}^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}))\,,$$

*si conserva lungo un moto lagrangiano che soddisfa l'ipotesi dei lavori virtuali.*

Se i vincoli sono mobili l'energia in genere non si conserva anche se le forze direttamente applicate sono conservative.

**Esercizio 22.2.** MMM/8.19 Un moto con potenziale lagrangiano ma con forze non conservative (punto vincolato a circonferenza con forza tangente). □

**Per casa 22.3.** MMM/8.17, MMM/8.20 □

**Teorema 22.4.** *Consideriamo un sistema di punti materiali vincolato da vincoli olonomi fissi, con componenti lagrangiane delle forze conservative in senso lagrangiano e $U^{\mathrm{L}} = U^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q})$. Allora se*

$$\frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial q_h}(\boldsymbol{q}_0) = 0\,, \qquad h = 1\,, \dots\,, \ell\,,$$

*la funzione costante $\boldsymbol{q}(t) = \boldsymbol{q}_0$ risolve le equazioni di Lagrange.*

**Teorema 22.5.** *Consideriamo un sistema di punti materiali vincolato da vincoli olonomi fissi, con componenti lagrangiane delle forze conservative in senso lagrangiano e $U^{\mathrm{L}} = U^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q})$ e inoltre le forze direttamente applicate siano conservative in senso tradizionale, con $\boldsymbol{q}_0$ punto di massimo isolato per $U^{\mathrm{L}}$. Allora $\boldsymbol{q}_0$ è di equilibrio stabile.*

**Esercizio 22.6.** 8/660, 40/660 □

**Per casa 22.7.** 60/620
9/630, 15/630
53/660 □

**Per casa 22.8.** 14/660, 20/660, 27/660, 41/660, 46/660, 47/660, 48/660 □

Piccole oscillazioni in punti di equilibrio, con hessiana del potenziale definita negativa, per sistemi vincolati da vincoli olonomi fissi e soggetti a forze conservative.
Energia cinetica ridotta, potenziale ridotto, lagrangiana ridotta.
Il caso 1-dimensionale: moto armonico.
Equazioni di Lagrange delle piccole oscillazioni nel caso $\ell > 1$:

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}\ddot{\boldsymbol{q}} - \boldsymbol{\mathcal{U}}\boldsymbol{q} = 0\,.$$

Ricerca delle frequenze delle piccole oscillazioni con la sostituzione $\boldsymbol{q}(t) = \boldsymbol{q}_0 \cos(\omega t)$; equazione $\det(\omega^2\boldsymbol{\mathcal{A}} + \boldsymbol{\mathcal{U}}) = 0$.
Teorema di esistenza delle coordinate normali (s.d.).

*Paragrafi di riferimento sul testo:* MMM: 8.1, 8.2, 8.4, 9.3.

## 23. Martedì 22/11/2022
(Aula 14: 16-18)

Le equazioni di Lagrange in un sistema di riferimento mobile: i vincoli regolari restano regolari; le forze fittizie soddisfano le necessarie ipotesi di regolarità; l'ILV nel sistema fisso è equivalente a quella nel sistema mobile (s.d.).
Le coordinate lagrangiane valide in uno dei due sistemi di riferimento lo sono anche nell'altro.

**Teorema 23.1.** *La forza di Coriolis ha componenti lagrangiane nulle se nel sistema mobile i vincoli sono fissi e* $\ell = 1$.

**Teorema 23.2.** *La forza di Coriolis ha componenti lagrangiane nulle se nel sistema mobile i moti sono vincolati a un piano solidale cui appartiene anche la velocità angolare.*

**Esercizio 23.3.** 6/680 □

**Per casa 23.4.** MMM/12.18 (piano che ruota intorno a un asse esterno)
1/630, 3/630, 5/630, 8/630, 14/630, 25/630, 42/630, 54/630, 63/630, 65/630, 69/630
10/350, 2/660, 23/680 □

Le formule di Frenet-Serret. Una curva è piana se e solo se la sua torsione è nulla.

**Teorema 23.5.** *La velocità angolare della terna intrinseca di una curva descritta da un moto di legge oraria* $s(t)$ *è*

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{s}[-\tau \boldsymbol{T} + k\boldsymbol{B}]\,.$$

**Esercizio 23.6.** MMM/12.12 Vincoli mobili: punto materiale vincolato a circonferenza che trasla:

$$R\cos\varphi \boldsymbol{e}_1 + R\sin\varphi \boldsymbol{e}_2 + \frac{ct^2}{2}\boldsymbol{e}_1\,,$$

soggetto al peso $-mg\boldsymbol{e}_2$.
Determinazione della lagrangiane e delle equazioni di Lagrange nel sistema mobile e in quello fisso. □

**Per casa 23.7.** Calcolare la torsione dell'elica cilindrica.
66/630, 68/630
72/620 □

*Paragrafi di riferimento sul testo:* MMM: 10.8, 12.2, 12.3, 12.4.

## 24. GIOVEDÌ 24/11/2022
(AULA 14: 14-17)

Vincoli di rigidità per $n$ moti $\boldsymbol{X}_i$. Numero dei gradi di libertà per 3 moti non allineati ($\ell = 6$).

**Teorema 24.1.** (s.d.) *Risultano costanti nel tempo le quantità:*

$$(\boldsymbol{X}_j - \boldsymbol{X}_i) \cdot (\boldsymbol{X}_k - \boldsymbol{X}_h)\,,$$
$$|(\boldsymbol{X}_j - \boldsymbol{X}_i) \times (\boldsymbol{X}_k - \boldsymbol{X}_h)|\,.$$

**Teorema 24.2.** (s.d.) *Per ogni $r \geq 4$ esistono $\lambda_h \in \boldsymbol{R}$ costanti tali che*

$$\boldsymbol{X}_r(t) - \boldsymbol{X}_1(t) = \sum_{h=1}^{3} \lambda_h \boldsymbol{u}_h(t)\,, \qquad t \in I\,.$$

*Qui $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{X}_2 - \boldsymbol{X}_1$, $\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{X}_3 - \boldsymbol{X}_1$, $\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_2$.*

Dunque $\ell = 6$ per ogni $n \geq 3$.

**Per casa 24.3.** 44/630, 52/630
MMM/7.10 □

Sistema rigido non degenere. Sistema di riferimento solidale. Moti del sistema rigido e moti solidali al sistema rigido.
Angoli di Eulero.
Velocità angolare nella forma

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\phi}\boldsymbol{e}_3 + \dot{\theta}\boldsymbol{w}_1 + \dot{\psi}\boldsymbol{u}_3\,.$$

**Esercizio 24.4.** 4/340, 5/310 □

**Per casa 24.5.** MMM/13.10 (deduzione di $\boldsymbol{\omega}$ dal teorema di composizione delle velocità angolari)
5/310, 6/310, 11/340, 76/620 □

Corpo rigido degenere rettilineo.

**Lemma 24.6.** *Se $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}^3$, $\boldsymbol{a} \neq 0$, allora $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = -|\boldsymbol{a}|^2 [\boldsymbol{b}]_\perp$.*

**Teorema 24.7.** *Dato un versore $\boldsymbol{u} \in C^1(I)$ esiste unico $\boldsymbol{\omega}$ tale che*

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{u}\,, \qquad \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{u} = 0\,.$$

**Esercizio 24.8.** 13/340 □

**Per casa 24.9.** 11/340, 35/340, 38/340 □

*Paragrafi di riferimento sul testo:* MMM: 6.6, 13.1, 13.2, 13.3.

## 25. Lunedì 28/11/2022
(Aula 14: 14-17)

Corpi rigidi continui (e non continui). Distribuzioni di massa: solidi, superfici, curve, punti isolati. Definizione di corpo rigido non degenere e degenere rettilineo. Massa.
Definizione di moto del centro di massa $\boldsymbol{X}_G$.

**Teorema 25.1.** *($\boldsymbol{X}_G$ è solidale) Si ha $\boldsymbol{X}_G(t) = \boldsymbol{X}(t, \boldsymbol{\lambda}_G)$, con*

$$\boldsymbol{\lambda}_G = \frac{1}{m} \int\limits_C \boldsymbol{\lambda} \rho(\boldsymbol{\lambda}) \,\mathrm{d}\mu \,.$$

**Teorema 25.2.** *(additività)* (s.d.) *Se $C = C_1 \cup C_2$, con $\int_{C_1 \cap C_2} \rho \,\mathrm{d}\mu = 0$, allora*

$$\boldsymbol{\lambda}_G = \frac{m_1}{m} \boldsymbol{\lambda}_G^1 + \frac{m_2}{m} \boldsymbol{\lambda}_G^2 \,,$$

*con $m_i$ e $\boldsymbol{\lambda}_G^i$ rispettivamente massa e coordinate del centro di massa di $C_i$.*

**Esempio 25.3.** Centro di massa di sfera forata. □

Definizione di piano di simmetria materiale ortogonale.

**Teorema 25.4.** (s.d.) *Se $\Pi$ è di simmetria materiale ortogonale per $C$ allora $\boldsymbol{\lambda}_G \in \Pi$.*

**Esempio 25.5.** Centro di massa di cono e cilindro. □

**Per casa 25.6.** MMM/14.18 (proprietà di minimo del centro di massa)
7/580, 8/580 □

Sistemi di corpi rigidi vincolati. Coordinate locali. Moti solidali a un corpo rigido del sistema; velocità di moti solidali in forma lagrangiana; energia cinetica di un corpo rigido e del sistema di corpi rigidi. Ipotesi dei lavori virtuali.

**Teorema 25.7.** (s.d.) *Le equazioni date dall'ipotesi dei lavori virtuali determinano il moto.*

Le equazioni di Lagrange per sistemi di corpi rigidi.

**Esercizio 25.8.** 63/620 □

**Per casa 25.9.** 7/330, 10/330
11/620, 14/620, 20/620, 28/620, 30/620, 51/620, 58/620
1/660, 5/660, 13/660, 25/660, 36/660, 44/660, 57/660
10/680, 18/680, 22/680 □

*Paragrafi di riferimento sul testo:* MMM: 14.1, 14.2, 16.1, 16.2.

## 26. Martedì 29/11/2022 (Aula 14: 16-18)

Definizione di quantità di moto e momento delle quantità di moto di polo $Z$. Quantità di moto e momento delle quantità di moto in cui si sostituisce la formula della velocità di trascinamento (per il sistema di riferimento solidale).
Definizione del tensore d'inerzia $\boldsymbol{\sigma}_Z$ di polo $Z$.

**Teorema 26.1.** *Vale per ogni moto* $\boldsymbol{X}_Z$

$$\boldsymbol{L}_Z = \boldsymbol{\sigma}_Z \boldsymbol{\omega} + m(\boldsymbol{X}_G - \boldsymbol{X}_Z) \times \boldsymbol{V}_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{X}_Z, t) \,.$$

*In particolare* $\boldsymbol{L}_Z = \boldsymbol{\sigma}_Z \boldsymbol{\omega}$ *se* $\boldsymbol{X}_G = \boldsymbol{X}_Z$ *o se* $\boldsymbol{X}_Z$ *è sia fisso che solidale.*

**Per casa 26.2.** 19/330, 31/330, 48/330, 59/330 □

Calcolo degli elementi della matrice di inerzia in un sistema qualunque. La matrice è simmetrica. Definizione di momenti di inerzia e deviatori.

**Teorema 26.3.** *Le quantità* $\boldsymbol{\sigma u} \cdot \boldsymbol{u}$ *e* $\boldsymbol{\sigma u} \cdot \boldsymbol{w}$ *(con* $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w} = 0$*) espresse in funzione di distanze da rette e piani (mediante integrali).*
*La* $\boldsymbol{\sigma}$ *è definita positiva se il corpo è non degenere, e semidefinita positiva nel caso dell'asta rigida.*

**Esempio 26.4.** Calcolo di $\boldsymbol{\sigma}$ per l'asta rigida. La matrice $\boldsymbol{\sigma}$ nel caso delle lamine. □

**Esercizio 26.5.** 26/330 □

*Paragrafi di riferimento sul testo:* MMM: 14.3, 14.4.

## 27. Giovedì 1/12/2022
(Aula 14: 14-17)

**Teorema 27.1.** *Vale per un corpo rigido $C$ e un moto $\boldsymbol{X}_Z$*

$$T(t) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_Z\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega} + \frac{m}{2}|\boldsymbol{V}_{\mathcal{T}}(\boldsymbol{X}_Z,t)|^2 + m\boldsymbol{V}_{\mathcal{T}}(\boldsymbol{X}_Z,t)\cdot\boldsymbol{\omega}\times[\boldsymbol{X}_G-\boldsymbol{X}_Z]\,.$$

**Corollario 27.2.** *(König)*

$$T(t) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_G\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega} + \frac{m}{2}|\boldsymbol{v}_G|^2\,.$$

**Corollario 27.3.** *In un moto polare di polo $Z$*

$$T(t) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_Z\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega}\,.$$

**Per casa 27.4.** 9/330, 25/330, 29/330, 41/330, 45/330, 57/330
28/620, 38/620, 41/620, 44/620, 47/620, 55/620
21/630, 27/630, 49/630 □

Definizione di vettori principali di inerzia, assi principali di inerzia, terne principali di inerzia.

**Teorema 27.5.** *Se $\mathcal{M}$ e $\boldsymbol{X}_Z$ sono solidali con il corpo rigido, allora la matrice $\boldsymbol{\sigma}_Z^{\mathcal{M}}$ è costante nel tempo.*

**Teorema 27.6.** *Sia $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_h)$ una terna ortonormale. Allora se $\boldsymbol{u}_1$ è principale si ha $I_{12} = I_{13} = 0$.*

**Teorema 27.7.** *Sia $C$ un rigido non degenere. In ogni punto esiste una terna ortonormale principale, che rende la matrice di $\boldsymbol{\sigma}$ diagonale.*
*Se $\boldsymbol{X}_Z$ è un moto solidale, esiste una base solidale principale $\mathcal{M}$ in $\boldsymbol{X}_Z$ (ossia tale che $\boldsymbol{\sigma}_Z^{\mathcal{M}}$ sia diagonale e costante).*

**Per casa 27.8.** 35/630, 46/630, 55/630 □

Ricerca di assi principali (s.d.):
la normale a un piano di simmetria materiale ortogonale è principale (in un punto del piano);
corpi con simmetria di rotazione;
traslabilità di terne principali centrali lungo gli assi;
teorema di Huygens.

**Esercizio 27.9.** Ricerca degli assi principali:
Cono, parallepipedo (nel centro di massa);
Sfera e cubo (in un punto qualsiasi).
5/330, 1/330 □

**Per casa 27.10.** 39/330, 52/330 □

*Paragrafi di riferimento sul testo:* MMM: 14.5, 14.6, 15.7.

## 28. Lunedì 5/12/2022 (Aula 14: 14-17)

Proprietà di minimo e massimo dei momenti principali.

**Teorema 28.1.** *1) Dati due versori ortogonali principali, il loro prodotto vettoriale è principale.*
*2) Se in un punto tutti i momenti d'inerzia principali sono uguali, tutti i vettori sono principali in quel punto.*
*3) Se in un punto due momenti d'inerzia principali sono uguali, tutti i versori del piano generato dai due versori principali corrispondenti sono principali.*

**Esercizio 28.2.** Ricerca degli assi principali nel parallepipedo a base quadrata.
Ricerca di assi principali per la lamina usando le proprietà di minimo e massimo.
La diagonale del rettangolo non è principale nel centro del rettangolo (se il rettangolo non è quadrato).
19/330 □

**Teorema 28.3.** *Se due lagrangiane soddisfano*

$$\mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F(\boldsymbol{q}, t) \,,$$

*allora hanno equazioni di Lagrange equivalenti.*

**Esercizio 28.4.** 44/620 □

*Paragrafi di riferimento sul testo:* MMM: 12.3, 14.5, 14.6.

## 29. Martedì 6/12/2022
(Aula 14: 16-18)

Distribuzioni di forze su un corpo rigido. Esempi.
Risultante e momento risultante delle forze.

**Per casa 29.1.** MMM/15.13 (potenziale gravitazionale terrestre, Terra non sferica)
MMM/15.15 (forze solidali e non solidali) □

Equazioni globali per un corpo rigido. Forze esterne.

**Esercizio 29.2.** Velocità angolare nella forma

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\phi}\boldsymbol{e}_3 + \dot{\theta}\boldsymbol{w}_1 + \dot{\psi}\boldsymbol{u}_3 \,.$$

□

**Teorema 29.3.** *Le due equazioni globali determinano il moto di un corpo rigido non degenere.*

Cenno al caso dell'asta rigida.

**Esercizio 29.4.** 21/630 □

**Per casa 29.5.** 5/470, 8/470 □

*Paragrafi di riferimento sul testo:* MMM: 15.1, 15.2, 15.3, 15.4.

## 30. Lunedì 12/12/2022
(Aula 14: 14-17)

**Teorema 30.1.** *(Equazioni di Eulero) Supponiamo che l'origine $O$ del sistema solidale con il rigido non degenere sia fissa o coincida con il centro di massa. Vale*

$$\boldsymbol{\sigma}_O \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\sigma}_O \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{M}_O^{\mathrm{ext}} \, . \tag{30.1}$$

**Corollario 30.2.** *In componenti, in una terna principale ($\boldsymbol{u}_h$), denotando*

$$\boldsymbol{\omega} = \sum_{h=1}^{3} \omega_h \boldsymbol{u}_h \, , \qquad \boldsymbol{M}_O^{\mathrm{ext}} = \sum_{h=1}^{3} M_h \boldsymbol{u}_h \, ,$$

*la* (30.1) *equivale a*

$$\begin{aligned}
I_{11}\dot{\omega}_1 &= (I_{22} - I_{33})\omega_2\omega_3 + M_1 \, , \\
I_{22}\dot{\omega}_2 &= (I_{33} - I_{11})\omega_1\omega_3 + M_2 \, , \\
I_{33}\dot{\omega}_3 &= (I_{11} - I_{22})\omega_1\omega_2 + M_3 \, .
\end{aligned}$$

Le equazioni di Eulero in genere vanno accoppiate con la prima equazione globale. Nel caso del moto polare determinano il moto. Sono sempre un sistema del II ordine negli angoli di Eulero, e possono essere considerate un sistema del I ordine nelle $\omega_h$ se $\boldsymbol{M}_O^{\mathrm{ext}}$ dipende solo dalle $\omega_h$ e da $t$.
Nel caso del corpo vincolato a ruotare intorno a un asse fisso con vincolo liscio (cioè se vale l'ipotesi dei lavori virtuali), il momento della reazione vincolare ha componente nulla lungo l'asse di rotazione.
Nel caso del corpo vincolato a muoversi di moto polare con vincolo liscio (cioè se vale l'ipotesi dei lavori virtuali), il momento della reazione vincolare è nullo.

**Esercizio 30.3.** 1/470
Integrale primo nel caso di corpi con due momenti d'inerzia uguali. □

**Per casa 30.4.** MMM/15.26 (forza non solidale su sfera)
2/470, 6/470, 10/470 □

**Teorema 30.5.** *In un moto polare di polo $Z$*

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M}_Z^{\mathrm{ext}} \cdot \boldsymbol{\omega} \, .$$

**Esercizio 30.6.** 1/450, 4/450 □

**Per casa 30.7.** MMM/15.42 (derivata della $T$ di un corpo rigido nel caso generale)
7/450, 9/450, 11/450, 13/450 □

*Paragrafi di riferimento sul testo:* MMM: 15.5, 15.7.

## 31. Martedì 13/12/2022
(Aula 14: 16-18)

Sia $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ un sistema solidale al rigido non degenere.

**Teorema 31.1.** *Sia $O$ fisso.*
*Se il moto è una rotazione intorno a un asse principale allora $\boldsymbol{M}_O^{\text{ext}}$ è parallelo all'asse di rotazione.*
*Se viceversa $\boldsymbol{M}_O^{\text{ext}}$ è parallelo a un asse principale, il moto è di rotazione intorno a quell'asse per le opportune condizioni iniziali.*

**Teorema 31.2.** *Sia $O$ fisso.*
*Se il moto è una rotazione intorno a un asse non principale, allora il momento $\boldsymbol{M}_O^{\text{ext}}$ ha componente ortogonale all'asse non nulla in ogni istante in cui $\boldsymbol{\omega}(t) \neq 0$.*

Motivazione della denominazione di momenti deviatori.

**Esercizio 31.3.** 26/450, 21/450 □

**Per casa 31.4.** 32/450, 65/450, 84/450 □

*Paragrafi di riferimento sul testo:* MMM: 15.6.

## 32. Giovedì 15/12/2022
(Aula 14: 14-17)

Moti polari per inerzia di polo $O$.

**Teorema 32.1.** *In un moto polare per inerzia valgono gli integrali primi:*
*1) $\boldsymbol{L}_O(t) = \boldsymbol{\sigma}_O\boldsymbol{\omega}(t) = \boldsymbol{L}(t_0)$.*
*2) $T(t) = \boldsymbol{\sigma}_O\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}/2 = T(t_0)$.*

Il vettore $\boldsymbol{\sigma}_O\boldsymbol{\omega}$ è costante nella terna fissa ma in genere non solidale al rigido.

**Esercizio 32.2.** 41/450, 45/450 □

Ellissoide d'inerzia solidale e mobile. Normale all'ellissoide.

**Teorema 32.3.** *(Moto alla Poinsot) Consideriamo un corpo rigido non degenere che si muove di moto polare per inerzia di polo $O$.*
*Allora l'ellissoide d'inerzia mobile si muove rotolando senza strisciare su un piano fisso, che ha normale $\boldsymbol{L}_O(t)$.*

**Esercizio 32.4.** 29/450 □

Definizione di contatto senza strisciamento.

**Esercizio 32.5.** MMM/16.11 □

**Per casa 32.6.** 31/450, 35/450 □

*Paragrafi di riferimento sul testo:* MMM: 15.8, 16.4.

## 33. Lunedì 19/12/2022
(Aula 14: 14-17)

**Teorema 33.1.** *Se $C$ si muove di moto polare per inerzia, e di rotazione, allora la rotazione è uniforme e l'asse di rotazione è principale d'inerzia. Viceversa le rotazioni uniformi intorno a assi principali sono moti polari per inerzia.*

Precessioni regolari.

**Teorema 33.2.** *Se un corpo è un giroscopio in $\boldsymbol{X}_O$, allora i moti polari per inerzia sono precessioni regolari.*

**Esercizio 33.3.** 35/450 □

**Per casa 33.4.** 56/450, 57/450, 63/450, 64/450, 69/450 □

Definizioni di poloidi ed erpoloidi. Casi dell'ellissoide di rotazione e sferico. Caso dell'ellissoide non di rotazione: rotazioni per inerzia stabili e instabili; moti per inerzia non periodici (corrispondono alle 4 polodie separatrici).

**Esercizio 33.5.** 71/450 □

Campo delle velocità di trascinamento di un sistema di riferimento mobile $\boldsymbol{V}_{\mathrm{T}}$. Studio del campo della velocità di trascinamento.
Scomposizione della velocità di trascinamento in componente parallela e ortogonale a $\boldsymbol{\omega}(t) \neq 0$. Centro istantaneo del moto. Asse istantaneo di moto e sue proprietà (asse di istantanea rotazione).

**Lemma 33.6.** *Vale*

$$\boldsymbol{V}_{T}(\boldsymbol{x}_1, t) - \boldsymbol{V}_{T}(\boldsymbol{x}_2, t) = \boldsymbol{\omega}(t) \times (\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2)\,,$$

*e quindi $\boldsymbol{V}_{T}$ per $t$ fissato è costante sulle rette parallele a $\boldsymbol{\omega}(t)$.*

**Per casa 33.7.** 16/340, 17/340, 18/340, 19/340 □

*Paragrafi di riferimento sul testo:* MMM: 11.1, 15.8, 15.9.

## 34. Martedì 20/12/2022
(Aula 14: 16-18)

Rigate del moto.
Teorema di Chasles.
Moti rigidi piani. Base e rulletta.

**Esercizio 34.1.** MMM/11.20 Il compasso ellittico.
55/620 □

**Per casa 34.2.** 42/660 □

*Paragrafi di riferimento sul testo:* MMM: 11.2, 11.3.

Fine del corso