DIARIO DELLE LEZIONI DEL CORSO DI MECCANICA RAZIONALE A.A. 2021-2022 CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA

DANIELE ANDREUCCI
DIP. SCIENZE DI BASE E APPLICATE PER L'INGEGNERIA
UNIVERSITÀ LA SAPIENZA
VIA A.SCARPA 16, 00161 ROMA, ITALY

Le dimostrazioni fanno parte del programma, salvo che quando viene esplicitamente indicato il contrario con il simbolo (s.d.).

I richiami al testo MMM si riferiscono al testo *Meccanica Razionale, Modelli Matematici per l'Ingegneria*, D. Andreucci, edizioni La Dotta. La numerazione n/m relativa agli esercizi si riferisce all'esercizio n del gruppo m, nella raccolta pubblicata sul sito del corso prima dell'inizio del corso.

1. Lunedì 27/09/2021
(Aula 14: 14-17)

Presentazione del corso.
Basi ortonormali e componenti in esse.
Il moto di un punto come funzione vettoriale. Grafico (linea di universo) e orbita (traiettoria) di un moto. Velocità e accelerazione. Passaggio dall'accelerazione al moto, condizioni iniziali.
Esempio di un moto di classe C^2 ma con orbita con uno spigolo:

$$\boldsymbol{X}(t) = t^3\boldsymbol{e}_1 + |t|^3\boldsymbol{e}_2 \,.$$

Confronto con il caso del grafico di una funzione scalare.
Moti piani, rettilinei, uniformi.
Definizione di retta tangente per la traiettoria di un moto.

Teorema 1.1. *Se un moto ammette retta tangente, allora la sua derivata è il vettore tangente. Viceversa, se un moto ha derivata diversa da zero, allora ammette retta tangente.*

Esercizio 1.2. Esercizio D/R.
Dimostrare che se $x \in C^1(\boldsymbol{R})$, $\dot{x} \geq -kx$, $k > 0$, e $x(0) > 0$, allora $x(t) > 0$ per ogni $t > 0$. $\square$

Per casa 1.3. 1-4/100.
Dimostrare che se $x \in C^1(\boldsymbol{R})$, $\dot{x} = -k\sqrt{x}$, $k > 0$, e $x(0) > 0$, allora $x(t) \to 0$ per $t \to t_0- < +\infty$. $\square$

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 1.1, 1.2, 1.4.

2. Martedì 28/09/2021
(Aula 14: 16-18)

Legge del moto. Definizione di punto materiale. Problema di Cauchy o ai valori iniziali. Funzioni localmente lipschitziane. Criterio di lipschitzianità mediante le derivate. Soluzioni massimali.

Teorema 2.1. (s.d.) *La soluzione massimale del problema di Cauchy per l'equazione* $m\ddot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{X}, \dot{\boldsymbol{X}})$ *esiste ed è unica se* $\boldsymbol{F}$ *è continua in un aperto* $A \subset \boldsymbol{R}^7$ *e localmente lipschitziana rispetto a* $\boldsymbol{X}$, $\dot{\boldsymbol{X}}$.
Il suo intervallo di definizione (σ, Σ) *è aperto e per* $t \to \Sigma-$ *si deve avere che* $(t, \boldsymbol{X}(t), \dot{\boldsymbol{X}}(t))$ *diventa illimitata oppure la sua distanza da* ∂A *tende a* 0.

Esempio 2.2. Il caso di $\dot{y} = y^2$, $y(0) = c > 0$. □

Riduzione dell'ordine di un sistema differenziale, aumentando il numero delle variabili.

Esempio 2.3. Risoluzione completa del problema

$$m\ddot{\boldsymbol{X}} = -k\boldsymbol{X}\,, \qquad \boldsymbol{X}(0) = \boldsymbol{x}_0\,, \qquad \dot{\boldsymbol{X}}(0) = \boldsymbol{v}_0\,.$$

□

Esempio 2.4. Prima integrazione del problema

$$m\ddot{\boldsymbol{X}} = -\gamma m \frac{\boldsymbol{X}}{|\boldsymbol{X}|^3}\,, \qquad \boldsymbol{X}(0) = L\boldsymbol{e}_1\,, \qquad \dot{\boldsymbol{X}}(0) = -c\boldsymbol{e}_1\,.$$

Uso del teorema di unicità. L'intervallo di definizione è limitato a destra ($\Sigma < +\infty$). □

Energia cinetica T di un punto materiale.

Teorema 2.5 (del lavoro)**.** *Se* $m\ddot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{F}$, *allora*

$$T(t_1) - T(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{F} \cdot \dot{\boldsymbol{X}} \,\mathrm{d}t\,.$$

Per casa 2.6. 1) Trovare tutte le soluzioni di

$$\dot{X}_1 = -X_2\,, \qquad \dot{X}_2 = X_1\,.$$

2) Riduzione del problema precedente in coordinate polari.
3) Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{aligned} m\ddot{\boldsymbol{X}} &= \boldsymbol{B} \times \dot{\boldsymbol{X}}\,, \\ \boldsymbol{X}(0) &= L\boldsymbol{e}_1\,, \\ \dot{\boldsymbol{X}}(0) &= c\boldsymbol{e}_2\,. \end{aligned}$$

Qui $L > 0$, $c > 0$. Integrale dell'energia cinetica. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 1.3, 1.5.

3. Giovedì 30/09/2021
(Aula 14: 14-17)

Dipendenza continua. Necessità di assumere intervalli limitati.

Esempio 3.1. Il caso $\dot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$, $\boldsymbol{F}$ lipschitziana. □

Per casa 3.2. Dimostrare la dipendenza continua per $m\ddot{\boldsymbol{X}} = -k\boldsymbol{X}$, m, $k > 0$. □

Sistemi differenziali autonomi. Traslazione nel tempo delle soluzioni. Definizione di punto di equilibrio $\boldsymbol{x}_{\mathrm{eq}} \in \boldsymbol{R}^3$ per un sistema autonomo. Il punto $\boldsymbol{x}_{\mathrm{eq}}$ è di equilibrio se e solo se la funzione costante $\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{x}_{\mathrm{eq}}$ è soluzione. Definizione di equilibrio stabile.

Esercizio 3.3. Il caso $\boldsymbol{F} = 0$.
I casi $m\ddot{\boldsymbol{X}} = \pm k\boldsymbol{X}$, $k > 0$.
Tutti i punti di $\boldsymbol{R}^3$ sono di equilibrio stabile per $m\ddot{\boldsymbol{X}} = -\mu\dot{\boldsymbol{X}}$, m, $\mu > 0$. □

Per casa 3.4. Studiare la stabilità dell'equilibrio per $m\ddot{X} = -\mu\dot{X}^{1+q}$, m, μ, $q > 0$. Si assuma $\dot{X} > 0$. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 1.6, 1.7.

4. Lunedì 04/10/2021
(Aula 14: 14-17)

Campi di forze posizionali e conservativi (potenziali). Esempi. Un campo conservativo è chiuso, ma non vale l'implicazione contraria.

Teorema 4.1 (Criterio necessario e sufficiente della circuitazione nulla.)**.** (s.d.) *Un campo $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \in A \subset \boldsymbol{R}^3$ è conservativo in A se e solo se il suo integrale su tutte le curve chiuse contenute in A è nullo.*

Semplicemente connessi in $\boldsymbol{R}^2$ e $\boldsymbol{R}^3$. Criterio (s.d.): un campo chiuso in un semplicemente connesso A è conservativo in A.

Teorema 4.2. *Se $\boldsymbol{F} = \nabla U$, allora*

$$T(t_1) - T(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}(\tau)) \cdot \dot{\boldsymbol{X}}(\tau) \,\mathrm{d}\tau = U(\boldsymbol{X}(t_1)) - U(\boldsymbol{X}(t_0)) \,.$$

Definizione di energia.

Teorema 4.3. *Se un moto $\boldsymbol{X}$ soddisfa $m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}$ e $\boldsymbol{F}$ è conservativa con potenziale U, allora l'energia*

$$\mathcal{E}(t) = \frac{m}{2} |\dot{\boldsymbol{X}}(t)|^2 - U(\boldsymbol{X}(t))$$

si mantiene costante durante il moto.

Teorema 4.4. *Se un moto $\boldsymbol{X}$ soddisfa $m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_0$, con $\boldsymbol{F}$ conservativa con potenziale U, e $\boldsymbol{F}_0 \cdot \dot{\boldsymbol{X}} = 0$, allora l'energia*

$$\mathcal{E}(t) = \frac{m}{2} |\dot{\boldsymbol{X}}(t)|^2 - U(\boldsymbol{X}(t))$$

si mantiene costante durante il moto.

Esercizio 4.5. 9/120 □

Piano delle fasi di moti 1-dimensionali conservativi. Passaggio da $m\ddot{x} = f(x) = U'(x)$ al sistema equivalente

$$\dot{x} = p \,, \qquad \dot{p} = \frac{1}{m} f(x) \,.$$

Orbite. Orbite nella forma

$$p = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E + U(x))} \,, \quad x \in J(E) = \{ x \in \boldsymbol{R} \mid E + U(x) \geq 0 \} \,.$$

Esempio 4.6. Il diagramma di fase di $m\ddot{x} = -kx$ e di $m\ddot{x} = -k \sin x$. □

Per casa 4.7. 1, 3, 7, 8/120; 21, 25/150. □

Esercizio 4.8. Esercizio D/R. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 2.1, 2.2, 2.4, 2.5.

5. Martedì 05/10/2021
(Aula 14: 16-18)

Teorema 5.1. *Se due orbite si intersecano, allora coincidono.*

Teorema 5.2. *Se un'orbita si autointerseca, allora corrisponde a una soluzione periodica.*

Teorema 5.3. (s.d.) *Se $X \in C^2((\sigma, \Sigma))$ è una soluzione massimale di $m\ddot{X} = F(X)$ e*

$$X(t) \to x_0 \,, \qquad t \to \Sigma- \,, \qquad |\dot{X}(t)| \leq C \,, \qquad t \in (\delta, \Sigma) \,,$$

allora $\Sigma = +\infty$ e $F(x_0) = 0$. Se anche $\dot{\boldsymbol{X}}(t) \to \boldsymbol{p}$ per $t \to +\infty$, allora $\boldsymbol{p} = 0$.

Esercizio 5.4. 27/150. □

Per casa 5.5. È possibile fare tutti gli esercizi del gruppo 150. □

Energia come funzione di due variabili:

$$W(x, p) = \frac{m}{2} p^2 - U(x) \,;$$

uguaglianza $W(X(t), \dot{X}(t)) = \mathcal{E}(t)$.
Punti di equilibrio di $m\ddot{x} = U'(x)$ sono i punti critici del potenziale e corrispondono ai punti $(\boldsymbol{x}_{\mathrm{eq}}, 0)$ critici per W. Questi ultimi possono essere sella o minimi. Le orbite del piano delle fasi (x, p) giacciono su curve di livello di W. Curve di livello di W vicino a massimi e minimi di U e confronto con il diagramma di fase.

Teorema 5.6. *(Dirichlet) Punti di massimo isolato di U corrispondono a punti di equilibrio stabile di $m\ddot{X} = U'(X)$.*

Esercizio 5.7. Esercizio D/R. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 2.5, 2.6.

6. Giovedì 07/10/2021
(Aula 14: 14-17)

Teorema 6.1. *Punti di massimo isolato di U corrispondono a punti di equilibrio stabile di $m\ddot{X} = U'(X) + r(X, \dot{X})\dot{X}$, ove $r \leq 0$.*

Teorema 6.2. (s.d.) *(Dimensione $N > 1$). Punti di massimo isolato di U corrispondono a punti di equilibrio stabile di $m\ddot{\boldsymbol{X}} = \nabla U(\boldsymbol{X}) + \boldsymbol{h}(\boldsymbol{X}, \dot{\boldsymbol{X}})$, ove $\boldsymbol{h} \cdot \dot{\boldsymbol{X}} \leq 0$.*

Forze a direzione radiale. Moti centrali.

Teorema 6.3. *In un moto centrale il vettore $\boldsymbol{X}(t) \times \dot{\boldsymbol{X}}(t)$ è costante.*

Teorema 6.4. *Sia $\boldsymbol{X}$ un moto centrale.*
1) Se $\boldsymbol{X}(0) \times \dot{\boldsymbol{X}}(0) \neq 0$, allora il moto avviene nel piano per $\boldsymbol{X}(t_0)$ perpendicolare al vettore $\boldsymbol{X}(0) \times \dot{\boldsymbol{X}}(0)$.
2) Se $\boldsymbol{X}(0) \times \dot{\boldsymbol{X}}(0) = 0$, allora il moto avviene sulla retta per $\boldsymbol{X}(t_0)$ e l'origine.

Moti piani e coordinate polari; versori radiale e trasversale. Velocità e accelerazione radiale e trasversale. Equazioni del moto centrale scomposte nella base dei versori radiale e trasversale; l'accelerazione trasversale è nulla, quindi la velocità areolare è costante.
La formula di Binet (s.d.).

Teorema 6.5. *Una forza a direzione radiale è conservativa se e solo se è nella forma*

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = F(|\boldsymbol{x}|)\frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|}\,,$$

e allora il suo potenziale è (per $d > 0$ arbitrario)

$$U(\boldsymbol{x}) = \int_d^{|\boldsymbol{x}|} F(s)\,\mathrm{d}s\,.$$

Esercizio 6.6. Esercizio D/R. □

Per casa 6.7. 17, 19, 32, 37, 45, 47, 48, 50, 54/660.
1, 3, 5, 7/220. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 2.6, 2.8.

7. Lunedì 11/10/2021
(Aula 14: 14-17)

Definizione di lunghezza L della traiettoria di un moto come estremo superiore delle lunghezze delle approssimazioni con spezzate. Si ha

$$L \leq \int_{t_0}^{t_1} |\dot{\boldsymbol{X}}(\tau)| \, \mathrm{d}\tau \, .$$

In effetti

Teorema 7.1. (s.d.)

$$L = \int_{t_0}^{t_1} |\dot{\boldsymbol{X}}(\tau)| \, \mathrm{d}\tau \, .$$

Definizione di lughezza d'arco s. Funzione inversa della lunghezza d'arco per moti regolari. Parametrizzazione mediante s.
Moto dato mediante la traiettoria e la legge oraria.
Versore tangente, versore normale principale, curvatura, raggio di curvatura.
Scomposizione di velocità e accelerazione:

$$\boldsymbol{v} = \dot{s}\boldsymbol{T}(s) \, , \qquad \boldsymbol{a} = \ddot{s}\boldsymbol{T}(s) + \dot{s}^2 k(s) \boldsymbol{N}(s) \, .$$

Accelerazione tangente e normale.
La terna intrinseca $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ (se $k > 0$).

Esempio 7.2. 1) Retta.
2) Circonferenza. □

Moto vincolato a una curva, reazioni vincolari. Necessità di ipotesi costitutive. Legge di attrito di Coulomb-Morin.

Esercizio 7.3. 7/560. □

Per casa 7.4. 6/100; 3, 14, 15, 19, 20/560. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 3.2, 3.3, 3.5, 3.6..

8. Martedì 12/10/2021
(Aula 14: 16-18)

Teorema 8.1. *Il problema ai valori iniziali per il sistema del moto per un punto vincolato a una curva scabra, se le forze sono continue e localmente lipschitziane in $(s, \dot{s})$, ammette unica soluzione.*

Esercizio 8.2. Esercizio MMM 3.31. □

Teorema 8.3. *Una curva è un segmento di retta per $s \in (a, b)$ se e solo se la curvatura è nulla per $s \in (a, b)$.*

Teorema 8.4. *Una curva è piana se e solo se $\boldsymbol{B}(s)$ è costante.*

Esercizio 8.5. Esercizio D/R. □

Per casa 8.6. 9, 11, 16, 22, 23, 24/560. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 3.5, 3.6.

9. Giovedì 14/10/2021
(Aula 14: 14-17)

Superfici regolari e loro parametrizzazioni; i vettori derivate rispetto ai due parametri; la normale.
Definizione di piano tangente. Le velocità dei moti vincolati alla superficie appartengono al piano tangente. Scomposizione dell'accelerazione in termini dei vettori tangenti coordinati e delle loro derivate.
Il caso del vincolo liscio per le curve; la componente tangente dell'equazione del moto è indipendente dalle altre 2, che servono a determinare la reazione vincolare.
L'equazione di moto di un punto vincolato alla superficie nella base data dai vettori tangenti coordinati e dalla normale. La reazione vincolare. Vincolo liscio per una superficie.

Teorema 9.1. *Sia S una superficie con parametrizzazione di classe C^3, e $\boldsymbol{F}(\varphi, \theta, \dot{\varphi}, \dot{\theta}, t)$ una forza continua e localmente lipschitziana in $(\varphi, \theta, \dot{\varphi}, \dot{\theta})$. Allora il problema del moto del punto vincolato a una superficie liscia ha unica soluzione massimale.*

Nel caso del vincolo liscio il moto si determina indipendentemente dalla reazione vincolare che scompare dalle equazioni di moto.

Esercizio 9.2. 5/120; 1/620. □

Per casa 9.3. Punto pesante vincolato alla sfera.
7/100; 3, 5/120.
Punto pesante vincolato alla superficie di rotazione. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 3.7, 4.1, 4.2.

10. Lunedì 18/10/2021
(Aula 14: 14-17)

Vincolo scabro per una superficie: attrito dinamico.
Attrito statico; motivi della disuguaglianza nella legge di Coulomb-Morin. Coni di attrito per la superficie e la curva.

Esercizio 10.1. Punti di equilibrio per un punto pesante vincolato a una sfera scabra, e poi a un suo meridiano scabro (4.18, 4.19 su MMM). □

Sistemi di punti materiali e sistema differenziale delle loro equazioni di moto. Centro di massa e involucro convesso. Quantità di moto, coincidente con $m\boldsymbol{v}_G$; momento delle quantità di moto.

Esercizio 10.2. Esercizio D/R. □

Per casa 10.3. 7, 8, 12/620; 13, 16/560; 3, 5/520. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 4.4, 4.5, 5.1.

11. Martedì 19/10/2021
(Aula 14: 16-18)

Sistemi di punti materiali $(\boldsymbol{X}_h, m_h)$, $h = 1, \dots, n$.
Definizione di forza totale $\boldsymbol{F}$ e momento delle forze $\boldsymbol{M}_A$.

Teorema 11.1. *(Equazioni globali) Valgono:*

$$m\ddot{\boldsymbol{X}}_G = \boldsymbol{F}\,, \qquad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_A}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M}_A + \boldsymbol{P} \times \dot{\boldsymbol{X}}_A\,.$$

Sotto le ipotesi opportune sulle forze interne, le equazioni globali valgono ancora se in $\boldsymbol{F}$ e $\boldsymbol{M}_A$ si tiene conto solo delle forze esterne.
Le equazioni globali in genere non determinano il moto del sistema di punti materiali.
Sistemi di forze conservative $\boldsymbol{F}_i$, cioè tali che

$$\boldsymbol{F}_i = \nabla_{\boldsymbol{x}_i} U(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n)\,.$$

Esempio 11.2. Due punti che si attraggono a vicenda con forze elastiche. □

Energia cinetica e meccanica del sistema.
Conservazione dell'energia.

Per casa 11.3. MMM 5.19 □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 5.1, 5.2.

12. Giovedì 21/10/2021 (Aula 14: 14-17)

Esempi di vincoli per un singolo moto: superficie, curva come intersezione di due superficie.
Calcolo dei gradi di libertà. Vincolo per due moti di essere allineati.
Vincoli in generale. Configurazioni compatibili. Esempi.

Esempio 12.1. Piano e sfera. □

Teorema del Dini per 1 vincolo e $m > 1$ vincoli scalari (s.d.).
Esempi di applicazione del teorema del Dini. Calcolo dei gradi di libertà.

Esempio 12.2. Vincolo di parallelismo per due moti (4 gradi di libertà); una delle componenti del prodotto vettoriale (che devono essere tutte nulle) risulta combinazione lineare delle altre.
Due superfici. □

Coordinate dipendenti e indipendenti.
Definizione di vincolo olonomo regolare.

Esercizio 12.3. Esercizio D/R. □

Per casa 12.4. 1-6/310
MMM 5.40 □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 5.3, 5.4, 5.5, 5.6.

13. Lunedì 25/10/2021
(Aula 14: 14-17)

Vincoli fissi e mobili. Coordinate dipendenti e indipendenti, esempio della sfera.
Coordinate lagrangiane e rappresentazione lagrangiana del moto. Moto lagrangiano. Velocità in coordinate lagrangiane.

Esempio 13.1. Esempi di un punto vincolato a una sfera di raggio variabile e di un punto vincolato a essere allineato con il primo e con l'origine. □

Esercizio 13.2. 1/630.
Esercizio D/R. □

Per casa 13.3. Mostrare che le coordinate indipendenti sono anche coordinate lagrangiane.
9, 15/630; 26/620.
Trovare lo spazio tangente per: 1) due punti vincolati a essere a distanza costante; 2) un punto vincolato al piano ruotante

$$x_1 \cos(\alpha t) + x_2 \sin(\alpha t) = 0\,.$$

□

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 5.7, 6.1.

14. Martedì 25/10/2021
(Aula 14: 16-18)

Atti di moto (ossia derivata nel tempo del vettore delle coordinate locali $\boldsymbol{z}$).
Definizione di spazio tangente; spostamenti virtuali. Se il vincolo è fisso la concatenazione di tutti i vettori velocità appartiene allo spazio tangente. Il vettore $\dot{\boldsymbol{q}}$ può assumere qualunque valore.

Teorema 14.1. *Gli atti di moto costituiscono lo spazio affine*

$$V_{\boldsymbol{z},t}\boldsymbol{f} + \frac{\partial \boldsymbol{z}^{\mathrm{L}}}{\partial t}\,.$$

Vale per ogni $j \in \{1, \dots, \ell\}$, $k \in \{1, \dots, m\}$

$$\nabla_{\boldsymbol{z}}\, f_k \cdot \frac{\partial \boldsymbol{z}^{\mathrm{L}}}{\partial q_j} = 0\,.$$

Definizione di spazio normale come sottospazio di $\boldsymbol{R}^{n_c}$ generato dai $\nabla_{z}\, f_k$.

Teorema 14.2. *Lo spazio normale è l'ortogonale dello spazio tangente.*

In particolare lo spazio tangente è indipendente dalla parametrizzazione lagrangiana.

Esempio 14.3. Calcolo dello spazio normale e tangente nei casi:
1) superficie ($n_c = 3$, $m = 1$),
2) curva ($n_c = 3$, $m = 2$),
3) due punti vincolati a avere uguale quota ($n_c = 6$, $m = 1$). □

Esercizio 14.4. 15/630
Esercizio D/R □

Per casa 14.5. Trovare lo spazio normale per: 1) due punti vincolati a essere a distanza costante; 2) un punto vincolato al piano ruotante

$$x_1 \cos(\alpha t) + x_2 \sin(\alpha t) = 0\,.$$

2) 61, 64/620. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 6.3.

15. Giovedì 28/10/2021
(Aula 14: 14-17)

Spostamenti virtuali e effettivi. Loro significato.

Esempio 15.1. Spostamenti virtuali e effettivi per la circonferenza che trasla (MMM 6.25). □

Esempio 15.2. (MMM 7.1) Sistema vincolato di due punti, con $n_c = 6$, $m = 1$,

$$f_1(z_1, \dots, z_6) = 2z_1 - z_4 = 0\,.$$

Inoltre le forze sono $\boldsymbol{F}_1 = \alpha_1 \boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{F}_2 = \alpha_2 \boldsymbol{e}_1$. Equazioni di moto; ipotesi sulle reazioni vincolari $\mathbf{f}_{\text{vin}} \in N_{\boldsymbol{z},t}\boldsymbol{f}$. Lavoro complessivo nullo delle rezioni vincolari in questo caso, ma ciascuna ${\mathbf{f}_{\text{vin}}}^i$ fa lavoro non nullo sul moto $\boldsymbol{X}_i$. □

Esercizio 15.3. Esercizio D/R
15/620 (modificato: asta → due punti materiali), risolto con l'ipotesi $\mathbf{f}_{\text{vin}} \in N_{\boldsymbol{z},t}\boldsymbol{f}$. □

Per casa 15.4. 9, 36, 57, 59/620; 23/630. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 7.1, 7.2, 7.3.

16. Martedì 02/11/2021
(Aula 14: 16-18)

Energia cinetica T^{L} in forma lagrangiana.

Teorema 16.1. *Vale*

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{p}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{p} + \boldsymbol{b}_1 \cdot \boldsymbol{p} + b_0 \,.$$

$\boldsymbol{\mathcal{A}}$ è la matrice simmetrica e definita positiva data da

$$a_{hk} = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\partial \boldsymbol{X}_i^{\mathrm{L}}}{\partial q_h} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{X}_i^{\mathrm{L}}}{\partial q_k} \,,$$

e $\boldsymbol{b}_1$ e b_0 si annullano se $\partial \boldsymbol{z}^{\mathrm{L}}/\partial t = 0$.

L'ipotesi dei lavori virtuali (ILV) in diverse forme. Forze in coordinate lagrangiane.

Teorema 16.2. *L'ipotesi dei lavori virtuali determina il moto.*

Esercizio 16.3. Energia cinetica del sistema in 15/620 (modificato come nell'ultima lezione). □

Per casa 16.4. Calcolare le energie cinetiche negli esercizi: 9, 36, 57, 59/620; 23/630. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 7.2, 7.3, 7.5.

17. Giovedì 04/11/2021
(Aula 14: 14-17)

Lemma 17.1. *Valgono*

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}_i^{\mathrm{L}}}{\partial p_h}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t) = \frac{\partial \boldsymbol{X}_i^{\mathrm{L}}}{\partial q_h}(\boldsymbol{q},t)\,,$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\frac{\partial \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}}{\partial q_h}(\boldsymbol{q}(t),t)\Big) = \frac{\partial \boldsymbol{v}_i^{\mathrm{L}}}{\partial q_h}(\boldsymbol{q}(t),\dot{\boldsymbol{q}}(t),t)\,.$$

Notazione

$$\frac{\partial}{\partial \dot q_h} = \frac{\partial}{\partial p_h}\,.$$

Le componenti lagrangiane delle forze Q_h.

Teorema 17.2. *(Equazioni di Lagrange) Le ℓ equazioni*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\frac{\partial T^{\mathrm{L}}}{\partial \dot q_h}\Big] - \frac{\partial T^{\mathrm{L}}}{\partial q_h} = Q_h\,,\quad h=1\,,\dots\,,\ell\,,$$

sono equivalenti all'ipotesi dei lavori virtuali.

Esercizio 17.3. Esempio visto in classe per introdurre la ILV (con le equazioni di Lagrange).
1/620 (con le equazioni di Lagrange); 57/620.
Esercizio D/R
Punto su piano ruotante, in assenza di forze direttamente applicate. □

Per casa 17.4. (Non usare lagrangiana né passaggio al sistema di riferimento mobile)
59, 61, 64/620.
29, 31, 37/630. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 7.5, 7.6.

18. Lunedì 08/11/2021
(Aula 14: 14-17)

Forze conservative e componenti lagrangiane delle forze.

Teorema 18.1. *Se il sistema di punti materiali è soggetto a sollecitazioni conservative di potenziale $U(\boldsymbol{z})$, si ha*

$$Q_h = \frac{\partial}{\partial q_h}[U(\boldsymbol{z}^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}, t))]\,, \qquad h = 1\,, \dots\,, \ell\,.$$

Se i vincoli sono mobili l'energia in genere non si conserva anche se le forze direttamente applicate sono conservative.

Teorema 18.2. *Se un sistema di punti materiali liberi è soggetto alle equazioni di moto $m_i \boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{F}_i^0$ ove il sistema delle forze $\boldsymbol{F}_i$ è conservativo con potenziale U, e*

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i^0 \cdot \boldsymbol{v}_i = 0 \qquad \textit{in ogni istante}$$

allora l'energia meccanica $T - U$ si conserva lungo i moti.

Teorema 18.3. *Se i vincoli sono fissi e il sistema di punti materiali è soggetto a sollecitazioni conservative di potenziale $U(\boldsymbol{z})$, l'energia*

$$T^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) - U(\boldsymbol{z}^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}))\,,$$

si conserva lungo un moto lagrangiano che soddisfa l'ipotesi dei lavori virtuali.

Esempio 18.4. Un moto con potenziale lagrangiano ma con forze non conservative (punto vincolato a circonferenza con forza tangente). □

Definizione di potenziale lagrangiano e forze conservative in senso lagrangiano.
Definizione di lagrangiana.
Equazioni di Lagrange in forma conservativa.

Esercizio 18.5. 64/620
6/630;
Esercizio D/R. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 8.1, 8.2.

19. Martedì 09/11/2021 (Aula 14: 16-18)

Teorema 19.1. *Consideriamo un sistema di punti materiali vincolato da vincoli olonomi fissi, con componenti lagrangiane delle forze conservative in senso lagrangiano e* $U^{\mathrm{L}} = U^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q})$*. Allora se*

$$\frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial q_h}(\boldsymbol{q}_0) = 0\,, \qquad h = 1\,, \dots\,, \ell\,,$$

la funzione costante $\boldsymbol{q}(t) = \boldsymbol{q}_0$ *risolve le equazioni di Lagrange.*

Teorema 19.2. *Nelle ipotesi del teorema precedente, se inoltre le forze direttamente applicate sono conservative in senso tradizionale, e* $\boldsymbol{q}_0$ *è un punto di massimo isolato per* U^{L}*, allora è di equilibrio stabile.*

Esercizio 19.3. 8, 40/660. □

Per casa 19.4. 60/620; 9, 15/630;
27, 38, 44, 45/660. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 8.4.

20. Giovedì 11/11/2020
(Aula 14: 14-17)

Basi ortonormali. Matrici di cambiamento di base $\boldsymbol{\Gamma}_{\mathcal{M}\mathcal{N}}$. Si ha $\boldsymbol{\Gamma}_{\mathcal{M}\mathcal{N}} = {\boldsymbol{\Gamma}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}}^{\mathrm{t}}$.

Teorema 20.1. *Se $\boldsymbol{a}$ ha componenti $\boldsymbol{\lambda}$ in $\mathcal{M}$ e $\boldsymbol{\mu}$ in $\mathcal{N}$, allora $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\Gamma}_{\mathcal{M}\mathcal{N}}\boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\Gamma}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}\boldsymbol{\lambda}$.*

Definizione di matrice ortogonale.

Teorema 20.2. (s.d.) *Le matrici di cambiamento di base sono ortogonali: $\boldsymbol{\Gamma}_{\mathcal{M}\mathcal{N}} = (\boldsymbol{\Gamma}_{\mathcal{N}\mathcal{M}})^{-1}$. Quindi il loro determinante ha valore assoluto pari a* 1.

Definizione di base ortonormale positiva.

Teorema 20.3. (s.d.) *Composizione delle matrici del cambiamento di base: $\boldsymbol{\Gamma}_{\mathcal{M}\mathcal{P}} = \boldsymbol{\Gamma}_{\mathcal{M}\mathcal{N}}\boldsymbol{\Gamma}_{\mathcal{N}\mathcal{P}}$.*

Caratterizzazione delle matrici ortogonali in $\boldsymbol{R}^2$. Prodotto triplo in $\boldsymbol{R}^3$.

Teorema 20.4. *Se $(\boldsymbol{u}_h)$ è una base ortonormale positiva di $\boldsymbol{R}^3$, allora*

$$\boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u}_3 \,, \quad \boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_3 = -\boldsymbol{u}_2 \,, \quad \boldsymbol{u}_2 \times \boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{u}_1 \,.$$

Corollario 20.5. *Se $(\boldsymbol{u}_h)$ è una base ortonormale positiva,*

$$\boldsymbol{a} = \sum_{h=1}^{3} \alpha_h \boldsymbol{u}_h \,, \quad \boldsymbol{b} = \sum_{h=1}^{3} \beta_h \boldsymbol{u}_h \,, \quad \textit{si ha} \quad \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{u}_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} \,.$$

Definizione di sistema di riferimento in $\boldsymbol{R}^3$. Cambiamento di coordinate. Definizione di sistema di riferimento mobile in $\boldsymbol{R}^3$.

Esempio 20.6. 1) Moto $\boldsymbol{X}(t) = R\boldsymbol{e}_1$ nel sistema mobile $\mathcal{S}$ con origine mobile nell'origine del sistema fisso e base ruotante intorno all'asse $\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{u}_3$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_2 \,, \\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_2 \,, \\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3 \,. \end{aligned}$$

2) Moto $\boldsymbol{X}(t) = (L+ct)\boldsymbol{e}_1$ nel sistema mobile $\mathcal{S}$ dell'esempio precedente. □

Definizione di velocità e accelerazione relativa a un sistema di riferimento mobile.

Esercizio 20.7. 72/620.
Esercizio D/R. □

Per casa 20.8. 1) Calcolare velocità e accelerazione relativa nell'Esempio precedente.
2) 5/100. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 9.1, 10.1, 10.2, 10.3.

21. Lunedì 15/11/2021 (Aula 14: 14-17)

Derivata di un vettore relativa a una terna mobile (velocità e accelerazione relative).
Regole di derivazione per la derivata relativa; derivata relativa di uno scalare. Funzioni vettoriali costanti in una terna mobile (e quindi di lunghezza costante); moti solidali con un sistema di riferimento mobile.

Teorema 21.1. *Data una terna mobile* $(\boldsymbol{u}_h)$ *esiste unica funzione* $\boldsymbol{\omega}$ *tale che*

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_h}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{u}_h \,, \qquad h = 1\,,2\,,3\,.$$

$\boldsymbol{\omega}$ si dice velocità angolare della terna.

Teorema 21.2. *Per ogni* $\boldsymbol{a} \in C^1(I)$ *si ha*

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t} = \left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{M}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{a}\,.$$

Esempio 21.3. La terna

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi(t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi(t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_2 &= -\sin\varphi(t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi(t)\,\boldsymbol{e}_2\,,\\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,,
\end{aligned}$$

ha $\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\boldsymbol{e}_3$. □

Teorema del moto relativo sulla scomposizione della velocità nel sistema fisso. Velocità di trascinamento.
Teorema di Coriolis sulla scomposizione dell'accelerazione nel sistema fisso. Accelerazione di trascinamento e di Coriolis.

Teorema 21.4. *La velocità angolare di* $\mathcal{M}$ *è costante in* $\mathcal{M}$ *se e solo se è costante; ha direzione costante in* $\mathcal{M}$ *se e solo se ha direzione costante.*

Definizione di rotazione e rotazione costante per una terna.

Esercizio 21.5. 1/340
Dinamica relativa; le forze apparenti di trascinamento e di Coriolis.
1/350 □

Per casa 21.6. 19, 24, 35/340.
Trovare la velocità angolare della rotazione intorno a $\boldsymbol{u}_1$ e a $\boldsymbol{u}_2$.
4/350 □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 10.3, 10.4, 10.5, 12.1.

22. Martedì 16/11/2021 (Aula 14: 16-18)

Teorema di ricostruzione di terne mobili data la velocità angolare. Definizione di moto polare e rotazione (e rotazione costante) per un sistema mobile di riferimento.

Esercizio 22.1. Una terna si muove di rotazione (intorno a $\boldsymbol{u}_3$) se e solo se $\boldsymbol{\omega} = \alpha(t)\boldsymbol{e}_3$ o $\boldsymbol{\omega} = \alpha(t)\boldsymbol{u}_3$ (terna fissa e mobile coincidenti a $t = 0$). □

Velocità angolare relativa di una terna mobile rispetto a un'altra.

Teorema 22.2. *Date due terne mobili $\mathcal{N}$ e $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_h)$ esiste un'unica $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}$ tale che*

$$\left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_h}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{N}} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}} \times \boldsymbol{u}_h\,.$$

Teorema 22.3. *Per ogni $\boldsymbol{a} \in C^1(I)$ si ha*

$$\left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{N}} = \left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{M}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}} \times \boldsymbol{a}\,.$$

Dalla definizione segue $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{M}\mathcal{M}} = 0$, $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}} = -\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{M}\mathcal{N}}$.

Teorema 22.4 (Composizione di velocità angolari)**.** *Se $\mathcal{P}$, $\mathcal{N}$, $\mathcal{M}$ sono terne mobili, vale*

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{P}\mathcal{M}} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{P}\mathcal{N}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}\,.$$

Esempio 22.5. $\mathcal{P}$ fissa, $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{P}\mathcal{N}} = \alpha\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}} = \beta\boldsymbol{u}_2$. □

Esercizio 22.6. MMM 12.6 (punto materiale vincolato a ellisse scabra ruotante) □

Per casa 22.7. 26, 27, 29/340; 65, 69/630. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 10.5, 10.6, 10.7, 12.2.

23. Giovedì 18/11/2021
(Aula 14: 14-17)

Teorema 23.1. *La forza di Coriolis ha componenti lagrangiane nulle se nel sistema mobile i vincoli sono fissi e* $\ell = 1$.

Teorema 23.2. *La forza di Coriolis ha componenti lagrangiane nulle se nel sistema mobile i moti sono vincolati a un piano solidale cui appartiene anche la velocità angolare.*

Le formule di Frenet-Serret. La velocità angolare della terna intrinseca di una curva descritta da un moto di legge oraria $s(t)$.

Esercizio 23.3. 68/630. □

Coordinate lagrangiane cicliche o ignorabili; relativi integrali primi. Vincoli di rigidità per n moti $\boldsymbol{X}_i$. Numero dei gradi di libertà per 3 moti non allineati ($\ell = 6$).

Teorema 23.4. (s.d.) *Risultano costanti nel tempo le quantità:*

$$(\boldsymbol{X}_j - \boldsymbol{X}_i) \cdot (\boldsymbol{X}_k - \boldsymbol{X}_h)\,,$$
$$|(\boldsymbol{X}_j - \boldsymbol{X}_i) \times (\boldsymbol{X}_k - \boldsymbol{X}_h)|\,.$$

Teorema 23.5. (s.d.) *Per ogni* $r \geq 4$ *esistono* $\lambda_h \in \boldsymbol{R}$ *costanti tali che*

$$\boldsymbol{X}_r(t) - \boldsymbol{X}_1(t) = \sum_{h=1}^{3} \lambda_h \boldsymbol{u}_h(t)\,, \qquad t \in I\,.$$

Qui $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{X}_2 - \boldsymbol{X}_1$, $\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{X}_3 - \boldsymbol{X}_1$, $\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_2$.

Dunque $\ell = 6$ per ogni $n \geq 3$.

Per casa 23.6. Calcolare la torsione dell'elica cilindrica.
44, 52, 66/630. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 6.6, 10.8, 12.4.

24. Lunedì 22/11/2021
(Aula 14: 14-17)

Piccole oscillazioni in punti di equilibrio, con hessiana del potenziale definita negativa, per sistemi vincolati da vincoli olonomi fissi e soggetti a forze conservative. Energia cinetica ridotta, potenziale ridotto, lagrangiana ridotta. Il caso 1-dimensionale: moto armonico.
Equazioni di Lagrange delle piccole oscillazioni nel caso $\ell > 1$:

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}\ddot{\boldsymbol{q}} - \boldsymbol{\mathcal{U}}\boldsymbol{q} = 0\,.$$

Ricerca delle frequenze delle piccole oscillazioni con la sostituzione $\boldsymbol{q}(t) = \boldsymbol{q}_0 \cos(\omega t)$; equazione $\det(\omega^2 \boldsymbol{\mathcal{A}} + \boldsymbol{\mathcal{U}}) = 0$.
Teorema di esistenza delle coordinate normali.
Sistema rigido non degenere. Sistema di riferimento solidale. Moti del sistema rigido e moti solidali al sistema rigido.
Angoli di Eulero.
Velocità angolare nella forma

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\phi}\boldsymbol{e}_3 + \dot{\theta}\boldsymbol{w}_1 + \dot{\psi}\boldsymbol{u}_3\,.$$

Esercizio 24.1. 6/680 □

Per casa 24.2. 11, 17, 20/680; 11, 13, 39/340, 76/620. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 9.3, 13.1, 13.2.

25. Martedì 23/11/2021
(Aula 14: 16-18)

Corpo rigido degenere rettilineo.

Lemma 25.1. *Se* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}^3$, $\boldsymbol{a} \neq 0$, *allora* $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = -|\boldsymbol{a}|^2 \, [\boldsymbol{b}]_\perp$.

Teorema 25.2. *Dato un versore* $\boldsymbol{u} \in C^1(I)$ *esiste unico* $\boldsymbol{\omega}$ *tale che*

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{u} \,, \qquad \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{u} = 0 \,.$$

Moti solidali al rigido $\boldsymbol{X}(t, \boldsymbol{\lambda})$. Scomposizione

$$\boldsymbol{X}(t, \boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{X}_O(t) + \sum_{h=1}^{3} \lambda_h \boldsymbol{u}_h(t) \,.$$

Corpi rigidi continui (e non continui). Distribuzioni di massa: solidi, superfici, curve, punti isolati. Definizione di corpo rigido non degenere e degenere rettilineo. Massa.

Esercizio 25.3. 11, 13/340 □

Per casa 25.4. 7, 8/580. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 13.3, 14.1.

26. Giovedì 25/11/2021
(Aula 14: 14-17)

Definizione di moto del centro di massa $\boldsymbol{X}_G$.

Teorema 26.1. *($\boldsymbol{X}_G$ è solidale) Si ha $\boldsymbol{X}_G(t) = \boldsymbol{X}(t, \boldsymbol{\lambda}_G)$, con*

$$\boldsymbol{\lambda}_G = \frac{1}{m} \int\limits_C \boldsymbol{\lambda} \rho(\boldsymbol{\lambda}) \, \mathrm{d}\mu \, .$$

Teorema 26.2. *(additività)* (s.d.) *Se $C = C_1 \cup C_2$, con $\int_{C_1 \cap C_2} \rho \, \mathrm{d}\mu = 0$, allora*

$$\boldsymbol{\lambda}_G = \frac{m_1}{m} \boldsymbol{\lambda}_G^1 + \frac{m_2}{m} \boldsymbol{\lambda}_G^2 \, ,$$

con m_i e $\boldsymbol{\lambda}_G^i$ rispettivamente massa e coordinate del centro di massa di C_i.

Definizione di piano di simmetria materiale ortogonale.

Teorema 26.3. (s.d.) *Se Π è di simmetria materiale ortogonale per C allora $\boldsymbol{\lambda}_G \in \Pi$.*

Definizione di quantità di moto e momento delle quantità di moto di polo Z. Campo delle velocità di trascinamento di un sistema di riferimento mobile $\boldsymbol{V}_{\mathrm{T}}$. Quantità di moto e momento delle quantità di moto in cui si sostituisce la formula della velocità di trascinamento (per il sistema di riferimento solidale).
Definizione del tensore d'inerzia $\boldsymbol{\sigma}_Z$ di polo Z.

Teorema 26.4. *Vale per ogni moto $\boldsymbol{X}_Z$*

$$\boldsymbol{L}_Z = \boldsymbol{\sigma}_Z \boldsymbol{\omega} + m(\boldsymbol{X}_G - \boldsymbol{X}_Z) \times \boldsymbol{V}_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{X}_Z, t) \, .$$

In particolare $\boldsymbol{L}_Z = \boldsymbol{\sigma}_Z \boldsymbol{\omega}$ se $\boldsymbol{X}_G = \boldsymbol{X}_Z$ o se $\boldsymbol{X}_Z$ è sia fisso che solidale.

Esercizio 26.5. 17/330. □

Per casa 26.6. 23/330. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 14.2, 14.3.

27. Lunedì 29/11/2021
(Aula 14: 14-17)

Calcolo degli elementi della matrice di inerzia in un sistema qualunque. La matrice è simmetrica. Definizione di momenti di inerzia e deviatori.

Teorema 27.1. *Le quantità* $\boldsymbol{\sigma u} \cdot \boldsymbol{u}$ *e* $\boldsymbol{\sigma u} \cdot \boldsymbol{w}$ *(con* $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w} = 0$*) espresse in funzione di distanze da rette e piani (mediante integrali).*

Corollario 27.2. *La* $\boldsymbol{\sigma}$ *è definita positiva se il corpo è non degenere, e semidefinita positiva nel caso dell'asta rigida.*

Calcolo di $\boldsymbol{\sigma}$ per l'asta rigida. La matrice $\boldsymbol{\sigma}$ nel caso delle lamine. Momenti d'inerzia e deviatori possono dipendere dal tempo. Però:

Teorema 27.3. *Se* $\mathcal{M}$ *e* $\boldsymbol{X}_Z$ *sono solidali con il corpo rigido, allora la matrice* $\boldsymbol{\sigma}_Z^{\mathcal{M}}$ *è costante nel tempo.*

Definizione di vettori principali di inerzia, assi principali di inerzia, terne principali di inerzia.

Teorema 27.4. *Sia* $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_h)$ *una terna ortonormale. Allora se* $\boldsymbol{u}_1$ *è principale si ha* $I_{12} = I_{13} = 0$*.*

Teorema 27.5. *Sia* C *un rigido non degenere. In ogni punto esiste una terna ortonormale principale, che rende la matrice di* $\boldsymbol{\sigma}$ *diagonale. Se* $\boldsymbol{X}_Z$ *è un moto solidale, esiste una base solidale principale* $\mathcal{M}$ *in* $\boldsymbol{X}_Z$ *(ossia tale che* $\boldsymbol{\sigma}_Z^{\mathcal{M}}$ *sia diagonale e costante).*

Esercizio 27.6. 54/630. □

Per casa 27.7. 17, 48/630. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 14.3, 14.4, 14.5.

28. Martedì 30/11/2021
(Aula 14: 16-18)

Proprietà di minimo e massimo dei momenti principali.

Teorema 28.1. *1) Dati due versori ortogonali principali, il loro prodotto vettoriale è principale.*
2) Se in un punto tutti i momenti d'inerzia principali sono uguali, tutti i vettori sono principali in quel punto.
3) Se in un punto due momenti d'inerzia principali sono uguali, tutti i versori del piano generato dai due versori principali corrispondenti sono principali.

Esempio 28.2. Ricerca di assi principali per la lamina usando le proprietà di minimo e massimo. □

Ricerca di assi principali (s.d.):
la normale a un piano di simmetria materiale ortogonale è principale (in un punto del piano);
traslabilità di terne principali centrali lungo gli assi;
teorema di Huygens.

Esempio 28.3. Cono, parallepipedo (nel centro di massa).
Sfera e cubo (in un punto qualsiasi). □

Esercizio 28.4. Esercizio D/R: la diagonale del rettangolo non è principale nel centro del rettangolo (se il rettangolo non è quadrato).
19/330 □

Per casa 28.5. 39, 53/330. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 14.5, 14.6, 15.1, 15.2.

29. Giovedì 02/12/2021
(Aula 14: 14-17)

Distribuzioni di forze su un corpo rigido. Risultante e momento risultante delle forze. Equazioni globali per un corpo rigido. Forze esterne.

Teorema 29.1. *Le due equazioni globali determinano il moto di un corpo rigido non degenere.*

Cenno al caso dell'asta rigida.
Sistemi di corpi rigidi vincolati. Coordinate locali. Moti solidali a un corpo rigido del sistema; velocità di moti solidali in forma lagrangiana; energia cinetica del sistema. Ipotesi dei lavori virtuali.

Teorema 29.2. (s.d.) *Le equazioni date dall'ipotesi dei lavori virtuali determinano il moto.*

Le equazioni di Lagrange per sistemi di corpi rigidi.

Esercizio 29.3. 63/620. □

Per casa 29.4. 14, 28, 30/620. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 15.4, 16.1, 16.2.

30. Lunedì 06/12/2021 (Aula 14: 14-17)

Teorema 30.1. *Vale per un corpo rigido C e un moto $\boldsymbol{X}_Z$*

$$T(t) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_Z\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega} + \frac{m}{2}|\boldsymbol{V}_{\mathcal{T}}(\boldsymbol{X}_Z,t)|^2 + m\boldsymbol{V}_{\mathcal{T}}(\boldsymbol{X}_Z,t)\cdot\boldsymbol{\omega}\times[\boldsymbol{X}_G-\boldsymbol{X}_Z]\,.$$

Corollario 30.2. *(König)*

$$T(t) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_G\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega} + \frac{m}{2}|\boldsymbol{v}_G|^2\,.$$

Corollario 30.3. *In un moto polare di polo Z*

$$T(t) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_Z\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega}\,.$$

Teorema 30.4. *(Equazioni di Eulero) Supponiamo che l'origine O del sistema solidale con il rigido non degenere sia fissa o coincida con il centro di massa. Vale*

$$\boldsymbol{\sigma}_O\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\sigma}_O\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{M}_O^{\mathrm{ext}}\,. \tag{30.1}$$

Corollario 30.5. *In componenti, in una terna principale $(\boldsymbol{u}_h)$, denotando*

$$\boldsymbol{\omega} = \sum_{h=1}^{3}\omega_h\boldsymbol{u}_h\,,\qquad \boldsymbol{M}_O^{\mathrm{ext}} = \sum_{h=1}^{3}M_h\boldsymbol{u}_h\,,$$

la (30.1) *equivale a*

$$\begin{aligned}
I_{11}\dot\omega_1 &= (I_{22}-I_{33})\omega_2\omega_3 + M_1\,,\\
I_{22}\dot\omega_2 &= (I_{33}-I_{11})\omega_1\omega_3 + M_2\,,\\
I_{33}\dot\omega_3 &= (I_{11}-I_{22})\omega_1\omega_2 + M_3\,.
\end{aligned}$$

Le equazioni di Eulero in genere sono accoppiate con la I equazione globale. Nel caso del moto polare determinano il moto. Sono sempre un sistema del II ordine negli angoli di Eulero, e possono essere considerate un sistema nelle ω_h se $\boldsymbol{M}_O^{\mathrm{ext}}$ dipende dalle ω_h e da t.

Teorema 30.6. *In un moto polare di polo Z*

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M}_Z^{\mathrm{ext}}\cdot\boldsymbol{\omega}\,.$$

Esercizio 30.7. 62/450; 28, 38/620. □

Per casa 30.8. Esercizio MMM 15.42: derivata della T di un corpo rigido nel caso generale. 17, 28, 34, 43, 47/450.
È possibile fare tutti gli esercizi dei gruppi 620, 630. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 15.5, 15.7.

31. Martedì 07/12/2021
(Aula 14: 16-18)

Sia $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ un sistema solidale al rigido non degenere.

Teorema 31.1. *Sia O fisso.*
Se il moto è una rotazione intorno a un asse principale allora $\boldsymbol{M}_O^{\mathrm{ext}}$ *è parallelo all'asse di rotazione.*
Se viceversa $\boldsymbol{M}_O^{\mathrm{ext}}$ *è parallelo a un asse principale, il moto è di rotazione intorno a quell'asse per le opportune condizioni iniziali.*

Teorema 31.2. *Sia O fisso.*
Se il moto è una rotazione intorno a un asse non principale, allora il momento $\boldsymbol{M}_O^{\mathrm{ext}}$ *ha componente ortogonale all'asse non nulla in ogni istante in cui* $\boldsymbol{\omega}(t) \neq 0$.

Motivazione della denominazione di momenti deviatori.
Caso del corpo vincolato a ruotare intorno a un asse fisso: si possono usare le equazioni di Eulero, quella relativa alla direzione dell'asse di rotazione dà l'equazione del moto, le altre due danno il momento della reazione vincolare.
Nel caso del corpo vincolato a ruotare intorno a un asse fisso con vincolo liscio (cioè se vale l'ipotesi dei lavori virtuali), il momento della reazione vincolare ha componente nulla lungo l'asse di rotazione.
Nel caso del corpo vincolato a muoversi di moto polare con vincolo liscio (cioè se vale l'ipotesi dei lavori virtuali), il momento della reazione vincolare è nullo.

Esercizio 31.3. 4/450. ☐

Per casa 31.4. 7, 10, 14, 26, 32/450. ☐

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 15.6.

32. Giovedì 09/12/2021 (Aula 14: 14-17)

Moti polari per inerzia di polo O.

Teorema 32.1. *In un moto polare per inerzia valgono gli integrali primi:*
1) $\boldsymbol{L}_O(t) = \boldsymbol{\sigma}_O\boldsymbol{\omega}(t) = \boldsymbol{L}(t_0)$.
2) $T(t) = \boldsymbol{\sigma}_O\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}/2 = T(t_0)$.

Il vettore $\boldsymbol{\sigma}_O\boldsymbol{\omega}$ è costante nella terna fissa ma in genere non solidale al rigido. Se $\boldsymbol{\omega}(t) \neq 0$ per un t allora non si annulla mai.
Ellissoide d'inerzia solidale e mobile. Normale all'ellissoide.

Teorema 32.2. *(Moto alla Poinsot) Consideriamo un corpo rigido non degenere che si muove di moto polare per inerzia di polo O. Allora l'ellissoide d'inerzia mobile si muove rotolando senza strisciare su un piano fisso, che ha normale $\boldsymbol{L}_O(t)$.*

Le rotazioni uniformi intorno a assi principali sono moti polari per inerzia.

Teorema 32.3. *Se C si muove di moto polare per inerzia, e di rotazione, allora la rotazione è uniforme e l'asse di rotazione è principale d'inerzia.*

Esercizio 32.4. 29, 37/450. □

Per casa 32.5. 35, 41, 45, 67, 69/450. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 15.8.

33. Lunedì 13/12/2021
(Aula 14: 14-17)

Definizioni di poloidi ed erpoloidi. Caso dell'ellissoide non di rotazione: rotazioni per inerzia stabili e instabili; moti per inerzia non periodici (corrispondono alle 4 polodie separatrici). Caso dell'ellissoide sferico. Studio del campo della velocità di trascinamento.
Scomposizione della velocità di trascinamento in componente parallela e ortogonale a $\boldsymbol{\omega}(t) \neq 0$. Centro istantaneo del moto. Asse istantaneo di moto e sue proprietà (asse di istantanea rotazione).

Lemma 33.1. *Vale*

$$\boldsymbol{V}_{\scriptscriptstyle T}(\boldsymbol{x}_1, t) - \boldsymbol{V}_{\scriptscriptstyle T}(\boldsymbol{x}_2, t) = \boldsymbol{\omega}(t) \times (\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2)\,,$$

e quindi $\boldsymbol{V}_{\scriptscriptstyle T}$ *per* t *fissato è costante sulle rette parallele a* $\boldsymbol{\omega}(t)$*.*

Esercizio 33.2. Vincoli mobili: punto materiale vincolato a circonferenza che trasla:

$$R\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + R\sin\varphi\boldsymbol{e}_2 + \frac{ct^2}{2}\boldsymbol{e}_1\,,$$

soggetto al peso $-mg\boldsymbol{e}_2$.
Determinazione delle equazioni di Lagrange nel sistema mobile e in quello fisso. □

Teorema 33.3. *Se due lagrangiane soddisfano*

$$\mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(\boldsymbol{q}, t)\,,$$

allora hanno equazioni di Lagrange equivalenti.

Per casa 33.4. 16, 17, 18, 30, 36/340. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 15.9, 11.1.

34. LUNEDÌ 20/12/2021
(AULA 14: 14-17)

Rigate del moto.
Moti rigidi piani. Base e rulletta.
Teorema di Chasles.

Esempio 34.1. Il compasso ellittico. □

Precessioni regolari.

Esercizio 34.2. MMM 16:11: Due circonferenze che rotolano l'una sull'altra senza strisciamento (rotolamento puro). □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 11.2, 11.3, 11.4, 16.4.

FINE DEL CORSO