DIARIO DELLE LEZIONI DEL CORSO DI MECCANICA RAZIONALE A.A. 2020-2021 CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA

DANIELE ANDREUCCI
DIP. SCIENZE DI BASE E APPLICATE PER L'INGEGNERIA
UNIVERSITÀ LA SAPIENZA
VIA A.SCARPA 16, 00161 ROMA, ITALY

Le dimostrazioni fanno parte del programma, salvo che quando viene esplicitamente indicato il contrario con il simbolo (s.d.).

I richiami al testo MMM si riferiscono al testo *Meccanica Razionale, Modelli Matematici per l'Ingegneria*, D. Andreucci, edizioni La Dotta. La numerazione n/m relativa agli esercizi si riferisce all'esercizio n del gruppo m, nella raccolta pubblicata sul sito del corso prima dell'inizio del corso.

1. Lunedì 28/09/2020
(Aula 14: 14-17)

Presentazione del corso.
Il moto di un punto come funzione vettoriale. Grafico (linea di universo) e orbita (traiettoria) di un moto. Velocità e accelerazione. Passaggio dall'accelerazione al moto, condizioni iniziali.
Esempio di un moto di classe C^2 ma con orbita con uno spigolo:

$$\boldsymbol{X}(t) = t^3 \boldsymbol{e}_1 + |t|^3 \boldsymbol{e}_2 .$$

Confronto con il caso del grafico di una funzione scalare.
Moti piani, rettilinei, uniformi.
Definizione di retta tangente per la traiettoria di un moto.

Teorema 1.1. *Se un moto ammette retta tangente, allora è derivabile e la sua derivata è il vettore tangente. Viceversa, se un moto è derivabile e la derivata è diversa da zero, allora ammette retta tangente.*

Esercizio 1.2. Esercizio D/R. □

Legge del moto. Definizione di punto materiale. Problema di Cauchy o ai valori iniziali. Funzioni localmente lipschitziane. Soluzioni massimali.

Teorema 1.3. (s.d.) *La soluzione massimale del problema di Cauchy per l'equazione $m\ddot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}, \dot{\boldsymbol{X}}, t)$ esiste ed è unica se $\boldsymbol{F}$ è continua in un aperto $A \subset \boldsymbol{R}^7$ e localmente lipschitziana rispetto a $\boldsymbol{X}$, $\dot{\boldsymbol{X}}$.*
Il suo intervallo di definizione (σ, Σ) è aperto e per $t \to \Sigma-$ si deve avere che $(\boldsymbol{X}(t), \dot{\boldsymbol{X}}(t), t)$ diventa illimitata oppure la sua distanza da ∂A tende a 0.

Esempio 1.4. Risoluzione completa del problema

$$m\ddot{\boldsymbol{X}} = -k\boldsymbol{X} , \qquad \boldsymbol{X}(0) = L\boldsymbol{e}_1 , \qquad \dot{\boldsymbol{X}}(0) = c\boldsymbol{e}_2 .$$

□

Esempio 1.5. Prima integrazione del problema

$$m\ddot{\boldsymbol{X}} = -\gamma m \frac{\boldsymbol{X}}{|\boldsymbol{X}|^3} , \qquad \boldsymbol{X}(0) = L\boldsymbol{e}_1 , \qquad \dot{\boldsymbol{X}}(0) = -c\boldsymbol{e}_1 .$$

Uso del teorema di unicità. □

Per casa 1.6. 1-4/100.
Dimostrare che se $x \in C^1(\boldsymbol{R})$, $\dot{x} \geq -kx$, $k > 0$, e $x(0) > 0$, allora $x(t) > 0$ per ogno $t > 0$. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 1.1, 1.2, 1.3.

2. Martedì 29/09/2020
(Aula 14: 17-19)

Energia cinetica T, lavoro di una forza.

Teorema 2.1 (del lavoro)**.** *Se* $m\ddot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{F}$*, allora*

$$T(t_1) - T(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{F} \cdot \dot{\boldsymbol{X}} \,\mathrm{d}t \,.$$

Per casa 2.2. Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{aligned} m\ddot{\boldsymbol{X}} &= \boldsymbol{B} \times \dot{\boldsymbol{X}} \,, \\ \boldsymbol{X}(0) &= L\boldsymbol{e}_1 \,, \\ \dot{\boldsymbol{X}}(0) &= c\boldsymbol{e}_2 \,. \end{aligned}$$

Qui $L > 0$, $c > 0$. Integrale dell'energia cinetica. □

Riduzione dell'ordine di un sistema differenziale, aumentando il numero delle variabili.
Teorema di esistenza e unicità di soluzioni massimali di

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\varphi}, t) \,, \qquad \boldsymbol{\varphi}(t_0) = \boldsymbol{\varphi}_0 \,.$$

Problema dell'esistenza globale nel caso della striscia $A = \boldsymbol{R}^N \times (a, b)$; limitazione della soluzione nel caso

$$|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\varphi}, t)| \leq C|\boldsymbol{\varphi}| + C$$

mediante l'integrazione per separazione delle variabili di una disequazione differenziale. Formula

$$\left| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} |\boldsymbol{\varphi}| \right| \leq |\dot{\boldsymbol{\varphi}}| \,.$$

Esercizio 2.3. Esercizio D/R. □

Per casa 2.4. Trovare tutte le soluzioni di

$$\begin{aligned} \dot{X}_1 &= -X_2 \,, \\ \dot{X}_2 &= X_1 \,. \,. \end{aligned}$$

□

Esercizio 2.5. Riduzione del sistema precedente in coordinate polari. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 1.5, 1.8.

3. Giovedì 01/10/2020
(Aula 14: 14-17)

Dipendenza continua. Necessità di assumere intervalli limitati.

Esempio 3.1. Il caso scalare $y' = y$. □

Per casa 3.2. Dimostrare la dipendenza continua per $m\ddot{\boldsymbol{X}} = k\boldsymbol{X}$, m, $k > 0$. □

Sistemi differenziali autonomi. Traslazione nel tempo delle soluzioni. Definizione di punto di equilibrio $\boldsymbol{x}_{\mathrm{eq}} \in \boldsymbol{R}^3$ per un sistema autonomo. Il punto $\boldsymbol{x}_{\mathrm{eq}}$ è di equilibrio se e solo se la funzione costante $\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{x}_{\mathrm{eq}}$ è soluzione. Definizione di equilibrio stabile.

Esercizio 3.3. I casi $\ddot{x} = \pm x$.
Il caso $\boldsymbol{F} = 0$.
Tutti i punti di $\boldsymbol{R}^3$ sono di equilibrio stabile per $m\ddot{\boldsymbol{X}} = -\mu\dot{\boldsymbol{X}}$, m, $\mu > 0$. □

Per casa 3.4. 1) Studiare la stabilità dell'equilibrio per $m\ddot{X} = -\mu\dot{X}^{1+q}$, m, μ, $q > 0$. Si assuma $\dot{X} > 0$.
2) Studiare la stabilità dell'origine per $\boldsymbol{F} = (ax_1 - x_2)\boldsymbol{e}_1 - x_2\boldsymbol{e}_2 - x_3\boldsymbol{e}_3$. □

Campi di forze chiusi e conservativi (potenziali). Un campo conservativo è chiuso, ma non vale l'implicazione contraria.

Teorema 3.5. (s.d.) *Un campo $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \in A \subset \boldsymbol{R}^3$ è conservativo in A se e solo se il suo integrale su tutte le curve chiuse contenute in A è nullo.*

Semplicemente connessi in $\boldsymbol{R}^2$ e $\boldsymbol{R}^3$. Criterio (s.d.): un campo chiuso in un semplicemente connesso A è conservativo in A.

Teorema 3.6. *Se $\boldsymbol{F} = \nabla U$, allora il lavoro fatto dalla forza sul moto è*

$$\int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}(\tau)) \cdot \dot{\boldsymbol{X}}(\tau)\,\mathrm{d}\tau = U(\boldsymbol{X}(t_1)) - U(\boldsymbol{X}(t_0))\,.$$

Corollario 3.7. *La stessa conclusione del teorema precedente vale se la forza totale è $\boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_0$ con $\boldsymbol{F}$ di potenziale U e $\boldsymbol{F}_0$ che fa lavoro nullo su ogni intervallo di tempo.*

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 1.6, 1.7, 2.1.

4. Lunedì 05/10/2020
(Aula 14: 14-17)

Definizione di energia.

Teorema 4.1. *Se un moto $\boldsymbol{X}$ soddisfa $m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}$ e $\boldsymbol{F}$ è conservativa con potenziale U, allora l'energia*

$$\mathcal{E}(t) = \frac{m}{2}|\dot{\boldsymbol{X}}(t)|^2 - U(\boldsymbol{X}(t))$$

si mantiene costante durante il moto.

Teorema 4.2. *Se un moto $\boldsymbol{X}$ soddisfa $m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_0$, con $\boldsymbol{F}$ conservativa con potenziale U, e $\boldsymbol{F}_0 \cdot \dot{\boldsymbol{X}} = 0$, allora l'energia*

$$\mathcal{E}(t) = \frac{m}{2}|\dot{\boldsymbol{X}}(t)|^2 - U(\boldsymbol{X}(t))$$

si mantiene costante durante il moto.

Integrali primi di sistemi differenziali del secondo ordine. Le forze 1-dimensionali posizionali e le forze radiali sono conservative.

Per casa 4.3. 3, 7,9/120. □

Esercizio 4.4. 8/120.
Esercizio D/R. □

Piano delle fasi di moti 1-dimensionali conservativi. Passaggio da $m\ddot{x} = f(x) = U'(x)$ al sistema equivalente

$$\begin{aligned} \dot{x} &= p\,, \\ \dot{p} &= \frac{1}{m} f(x)\,. \end{aligned}$$

Orbite. Orbite nella forma

$$p = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E + U(x))}\,, \quad x \in J(E) = \{x \in \boldsymbol{R} \mid E + U(x) \geq 0\}\,.$$

Esempio 4.5. Il diagramma di fase di $m\ddot{x} = -kx$ e di $m\ddot{x} = -k\sin x$. □

Per casa 4.6. 21, 25/150. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 2.2, 2.3, 2.5.

5. Martedì 06/10/2020
(Aula 14: 17-19)

Teorema 5.1. *Se due orbite si intersecano, allora coincidono.*

Teorema 5.2. *Se un'orbita si autointerseca, allora corrisponde a una soluzione periodica.*

Teorema 5.3. *Se $X \in C^2((\sigma, \Sigma))$ è una soluzione massimale di $m\ddot{X} = F(X)$ e*

$$X(t) \to x_0 \,, \qquad t \to \Sigma- \,, \qquad |\dot{X}(t)| \leq C \,, \qquad t \in (\delta, \Sigma) \,,$$

allora $\Sigma = +\infty$ e $F(x_0) = 0$. Se anche $\dot{\boldsymbol{X}}(t) \to \boldsymbol{p}$ per $t \to +\infty$, allora $\boldsymbol{p} = 0$.

Esercizio 5.4. 6/150. □

Per casa 5.5. È possibile fare tutti gli esercizi del gruppo 150. □

Energia come funzione di due variabili:

$$W(x, p) = \frac{m}{2} p^2 - U(x) \,;$$

uguaglianza $W(X(t), \dot{X}(t)) = \mathcal{E}(t)$.
Punti di equilibrio di $m\ddot{x} = U'(x)$ sono i punti critici del potenziale e corrispondono ai punti $(\boldsymbol{x}_{\mathrm{eq}}, 0)$ critici per W. Questi ultimi possono essere sella o minimi. Le orbite del piano delle fasi (x, p) giacciono su curve di livello di W. Curve di livello di W vicino a massimi e minimi di U e confronto con il diagramma di fase.

Teorema 5.6. *(Dirichlet) Punti di massimo isolato di U corrispondono a punti di equilibrio stabile di $m\ddot{X} = U'(X)$.*

Teorema 5.7. *Punti di massimo isolato di U corrispondono a punti di equilibrio stabile di $m\ddot{X} = U'(X) - r(X, \dot{X})\dot{X}$, ove $r \geq 0$.*

Teorema 5.8. (s.d.) *(Dimensione $N > 1$). Punti di massimo isolato di U corrispondono a punti di equilibrio stabile di $m\ddot{\boldsymbol{X}} = \nabla U(\boldsymbol{X}) + \boldsymbol{h}(\boldsymbol{X}, \dot{\boldsymbol{X}})$, ove $\boldsymbol{h} \cdot \dot{\boldsymbol{X}} \leq 0$.*

Esercizio 5.9. Esercizio D/R.
17/660. □

Per casa 5.10. 19, 32, 37/660. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 2.5, 2.6.

6. Giovedì 08/10/2020 (Aula 14: 14-17)

Moti piani e coordinate polari; versori radiale e trasversale. Velocità e accelerazione radiale e trasversale.
Velocità areolare.

Esempio 6.1. Se l'accelerazione trasversale è nulla, la velocità areolare è costante. □

Forze a direzione radiale. Moti centrali.

Teorema 6.2. *In un moto centrale il vettore $\boldsymbol{X}(t) \times \dot{\boldsymbol{X}}(t)$ è costante.*

Teorema 6.3. *Sia $\boldsymbol{X}$ un moto centrale.*
1) Se $\boldsymbol{X}(0) \times \dot{\boldsymbol{X}}(0) \neq 0$, allora il moto avviene nel piano per $\boldsymbol{X}(t_0)$ perpendicolare al vettore $\boldsymbol{X}(0) \times \dot{\boldsymbol{X}}(0)$.
2) Se $\boldsymbol{X}(0) \times \dot{\boldsymbol{X}}(0) = 0$, allora il moto avviene sulla retta per $\boldsymbol{X}(t_0)$ e l'origine.

Equazioni del moto centrale scomposte nella base dei versori radiale e trasversale; l'accelerazione trasversale è nulla, quindi la velocità areolare è costante.

Teorema 6.4. *Una forza a direzione radiale è conservativa se e solo se è nella forma*

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = F(|\boldsymbol{x}|)\frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|}\,,$$

e allora il suo potenziale è (per $d > 0$ arbitrario)

$$U(\boldsymbol{x}) = \int_{d}^{|\boldsymbol{x}|} F(s)\,\mathrm{d}s\,.$$

La formula di Binet (s.d.).

Esercizio 6.5. Esercizio D/R.
1, 3/220 □

Per casa 6.6. 5, 7/220. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 2.8.

7. Lunedì 12/10/2020
(Aula 14: 14-17)

Definizione di lunghezza L della traiettoria di un moto come estremo superiore delle lunghezze delle approssimazioni con spezzate. Si ha

$$L \leq \int_{t_0}^{t_1} |\dot{\boldsymbol{X}}(\tau)| \, \mathrm{d}\tau \, .$$

In effetti

Teorema 7.1. (s.d.)

$$L = \int_{t_0}^{t_1} |\dot{\boldsymbol{X}}(\tau)| \, \mathrm{d}\tau \, .$$

Definizione di lughezza d'arco s. Funzione inversa della lunghezza d'arco per moti regolari. Parametrizzazione mediante s.
Moto dato mediante la traiettoria e la legge oraria.
Versore tangente, versore normale principale, curvatura, raggio di curvatura.
Scomposizione di velocità e accelerazione:

$$\boldsymbol{v} = \dot{s}\boldsymbol{T}(s) \, , \qquad \boldsymbol{a} = \ddot{s}\boldsymbol{T}(s) + \dot{s}^2 k(s)\boldsymbol{N}(s) \, .$$

Accelerazione tangente e normale.
La terna intrinseca $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$.

Esempio 7.2. 1) Circonferenza.
2) Elica cilindrica. □

Moto vincolato a una curva, reazioni vincolari. Necessità di ipotesi costitutive. Legge di attrito di Coulomb-Morin.

Esercizio 7.3. 3/560. □

Per casa 7.4. 6/100; 15, 20, 24/560. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 3.2, 3.3, 3.5, 3.6..

8. Martedì 13/10/2020
(Aula 14: 17-19)

Teorema 8.1. *Il problema ai valori iniziali per il sistema del moto per un punto vincolato a una curva scabra, se le forze sono continue e localmente lipschitziane in* $(s, \dot{s})$*, ammette unica soluzione.*

Esercizio 8.2. Esercizio MMM 3.31. □

Il caso del vincolo liscio; la componente tangente dell'equazione del moto è indipendente dalle altre 2, che servono a determinare la reazione vincolare.

Esercizio 8.3. 22/560.
Esercizio D/R. □

Teorema 8.4. *Una curva è un segmento di retta per* $s \in (a, b)$ *se e solo se la curvatura è nulla per* $s \in (a, b)$*.*

Teorema 8.5. *Una curva è piana se e solo se* $\boldsymbol{B}(s)$ *è costante.*

Per casa 8.6. 2/120; 9, 16, 23/560. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 3.5, 3.6, 3.7.

9. Giovedì 15/10/2020
(Aula 14: 14-17)

Vincoli mobili: punto materiale vincolato a circonferenza che trasla:

$$\boldsymbol{\psi}(s,t) = R\cos\frac{s}{R}\boldsymbol{e}_1 + R\sin\frac{s}{R}\boldsymbol{e}_2 + \frac{ct^2}{2}\boldsymbol{e}_1\,,$$

soggetto al peso $-mg\boldsymbol{e}_2$.
Superfici regolari e loro parametrizzazioni; i vettori derivate rispetto ai due parametri; la normale.
Definizione di piano tangente. Le velocità dei moti vincolati alla superficie appartengono al piano tangente.
Scomposizione dell'accelerazione in termini dei vettori tangenti coordinati e delle loro derivate.
Vincolo liscio per una superficie.

Teorema 9.1. *Sia S una superficie con parametrizzazione di classe C^3, e $\boldsymbol{F}(\varphi,\theta,\dot\varphi,\dot\theta,t)$ una forza continua e localmente lipschitziana in $(\varphi,\theta,\dot\varphi,\dot\theta)$. Allora il problema del moto del punto vincolato a una superficie liscia ha unica soluzione massimale.*

Esempio 9.2. Punto pesante vincolato alla sfera. □

Per casa 9.3. 3, 5/120
Parametrizzazione del toro.
Punto pesante vincolato alla superficie di rotazione. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 3.8, 4.1, 4.2.

10. Lunedì 19/10/2020
(Aula 14: 14-17)

Vincolo scabro per una superficie: attrito dinamico.
Attrito statico; coni di attrito per la superficie e la curva.

Esercizio 10.1. Punti di equilibrio per un punto pesante vincolato a una sfera scabra, e poi a un suo meridiano scabro (4.18, 4.19 su MMM).
Esercizio D/R.
1/620; esempi numerici e commenti. □

Sistemi di punti materiali, centro di massa, quantità di moto, momento delle quantità di moto.

Per casa 10.2. 7, 12/620; 13/560; 2/520. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 4.4, 4.5, 5.1.

11. Martedì 20/10/2020
(A distanza per chiusura aula: 17-19)

Sistemi di punti materiali $(\boldsymbol{X}_h, m_h)$, $h = 1, \dots, n$.
Vettore delle coordinate $\boldsymbol{z} = (z_1, \dots, z_{3n}) = (\boldsymbol{X}_1, \dots, \boldsymbol{X}_n)$ e scrittura del sistema del moto come

$$\ddot{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{z}, \dot{\boldsymbol{z}}, t) .$$

Si può applicare il teorema di esistenza e unicità di soluzioni del problema di Cauchy.
Definizione di forza totale $\boldsymbol{F}$ e momento delle forze $\boldsymbol{M}_A$.

Teorema 11.1. *(Equazioni globali) Valgono:*

$$m\ddot{\boldsymbol{X}}_G = \boldsymbol{F} , \qquad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_A}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M}_A + \boldsymbol{P} \times \dot{\boldsymbol{X}}_A .$$

Sotto le ipotesi opportune sulle forze interne, le equazioni globali valgono ancora se in $\boldsymbol{F}$ e $\boldsymbol{M}_A$ si tiene conto solo delle forze esterne.
Le equazioni globali in genere non determinano il moto del sistema di punti materiali.
Sistemi di forze conservative $\boldsymbol{F}_i$, cioè tali che

$$\boldsymbol{F}_i = \nabla_{\boldsymbol{x}_i} U(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n) .$$

Esempio 11.2. Due punti che si attraggono a vicenda con forze elastiche. □

Energia cinetica e meccanica del sistema.
Conservazione dell'energia.
Esempi di vincoli per un singolo moto: superficie, curva come intersezione di due superficie.
Calcolo dei gradi di libertà (con l'eliminazione di coordinate usando le equazioni di vincolo). Vincolo per due moti di essere allineati.

Per casa 11.3. Esercizio 5.23 di MMM: mettere in forma di equazioni i seguenti vincoli per due moti: distanza fissata, entrambi ortogonali a versore mobile assegnato, entrambi appartenenti a piano per l'origine con normale mobile assegnata, $\boldsymbol{X}_1$ appartiene al grafico di una funzione di 2 variabili e $\boldsymbol{X}_2$ al suo piano tangente in $\boldsymbol{X}_1$. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 5.1, 5.2, 5.3, 5.4.

12. Giovedì 22/10/2020
(Aula 14: 14-17)

Teorema di conservazione di energia meccanica per un sistema, in cui le forze non conservative fanno lavoro complessivo nullo.
Vincoli in generale. Configurazioni compatibili. Esempi.
Teorema del Dini per 1 vincolo e $m > 1$ vincoli scalari (s.d.).
Coordinate dipendenti e indipendenti.

Esempio 12.1. Piano e sfera.
Vincolo di parallelismo per due moti (4 gradi di libertà); una delle componenti del prodotto vettoriale (che devono essere tutte nulle) risulta combinazione lineare delle altre.
Due punti sul piano, a distanza fissa, uno vincolato a circonferenza di centro l'origine, l'altro all'asse x_1. □

Definizione di vincolo olonomo regolare.

Esercizio 12.2. Esercizio D/R. □

Per casa 12.3. Completare gli esempi sopra.
(MMM 5.40): regolarità di due moti vincolati ciascuno a una superficie regolare e a avere distanza fissata. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 5.2, 5.3, 5.4, 5.5, 5.6.

13. Lunedì 26/10/2020
(Aula 14: 14-17)

Coordinate dipendenti e indipendenti, esempio della sfera.
Coordinate lagrangiane e rappresentazione lagrangiana del moto.

Per casa 13.1. Mostrare che le coordinate indipendenti sono anche coordinate lagrangiane. □

Esempio 13.2. Longitudine e colatitudine come coordinate lagrangiane sulla sfera di raggio variabile. □

Definizione di spazio tangente; spostamenti virtuali.
Moto lagrangiano. Velocità in coordinate lagrangiane. Se il vincolo è fisso la concatenazione di tutti i vettori velocità appartiene allo spazio tangente. Il vettore $\dot{\boldsymbol{q}}$ può assumere qualunque valore.

Esempio 13.3. Esempio di un punto vincolato a una sfera di raggio variabile e di un punto vincolato a essere allineato con il primo e con l'origine. □

Esercizio 13.4. Esercizio D/R.
1/630. □

Per casa 13.5. 9, 15/630; 26/620.
Trovare lo spazio tangente per: 1) due punti vincolati a essere a distanza costante; 2) un punto vincolato al piano ruotante

$$x_1 \cos(\alpha t) + x_2 \sin(\alpha t) = 0\,.$$

□

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 5.7, 6.1, 6.3.

14. Martedì 27/10/2020
(Aula 14: 17-19)

Atti di moto (ossia derivata nel tempo del vettore delle coordinate locali $\boldsymbol{z}$).
Vale per ogni $j \in \{1, \dots, \ell\}$, $k \in \{1, \dots, m\}$

$$\nabla_{\boldsymbol{z}} f_k \cdot \frac{\partial \boldsymbol{z}^{\mathrm{L}}}{\partial q_j} = 0\,.$$

Definizione di spazio normale come sottospazio di $\boldsymbol{R}^{n_c}$ generato dai $\nabla_z f_k$.

Teorema 14.1. *Lo spazio normale è l'ortogonale dello spazio tangente.*

In particolare lo spazio tangente è indipendente dalla parametrizzazione lagrangiana.

Teorema 14.2. *Gli atti di moto costituiscono lo spazio affine*

$$V_{\boldsymbol{z},t}\boldsymbol{f} + \frac{\partial \boldsymbol{z}^{\mathrm{L}}}{\partial t}\,.$$

Spostamenti virtuali e effettivi, e loro significato. Coincidono per i vincoli fissi.

Esempio 14.3. Calcolo dello spazio normale e tangente nei casi:
1) superficie ($n_c = 3$, $m = 1$),
2) curva ($n_c = 3$, $m = 2$),
3) due punti vincolati a avere uguale ascissa ($n_c = 6$, $m = 1$). □

Per casa 14.4. Trovare lo spazio normale per: 1) due punti vincolati a essere a distanza costante; 2) un punto vincolato al piano ruotante

$$x_1 \cos(\alpha t) + x_2 \sin(\alpha t) = 0\,.$$

2) 61/620. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 6.3, 6.4.

15. Giovedì 29/10/2020
(Aula 14: 14-17)

Esempio 15.1. Sistema vincolato di due punti, con $n_c = 6$, $m = 1$,

$$f_1(z_1, \dots, z_6) = 2z_1 - z_4 = 0 .$$

Inoltre le forze sono $\boldsymbol{F}_1 = \alpha_1 \boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{F}_2 = \alpha_2 \boldsymbol{e}_1$. Equazioni di moto; ipotesi sulle reazioni vincolari $\mathbf{f}_{\text{vin}} \in N_{\boldsymbol{z},t}\boldsymbol{f}$. Lavoro complessivo nullo delle rezioni vincolari in questo caso, ma ciascuna ${\mathbf{f}_{\text{vin}}}^i$ fa lavoro non nullo sul moto $\boldsymbol{X}_i$. □

Forze in coordinate lagrangiane. L'ipotesi dei lavori virtuali (ILV) in diverse forme. Per i moti che soddisfano la ILV il lavoro virtuale complessivo delle reazioni vincolari è nullo; questo è il lavoro complessivo effettivo se i vincoli sono fissi.

Teorema 15.2. *L'ipotesi dei lavori virtuali determina il moto.*

Esercizio 15.3. 10, 36/620. □

Per casa 15.4. 57, 59/620; 23/630. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 7.1, 7.2, 7.3.

16. Lunedì 02/11/2020
(Aula 14: 14-17)

Energia cinetica T^{L} in forma lagrangiana.

Teorema 16.1. *Vale*
$$T^{\mathrm{L}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{p}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{p} + \boldsymbol{b}_1 \cdot \boldsymbol{p} + b_0 \,.$$
$\boldsymbol{\mathcal{A}}$ *è la matrice simmetrica e definita positiva data da*
$$a_{hk} = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\partial \boldsymbol{X}_i^{\mathrm{L}}}{\partial q_h} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{X}_i^{\mathrm{L}}}{\partial q_k} \,,$$
e $\boldsymbol{b}_1$ *e* b_0 *si annullano se* $\partial \boldsymbol{z}^{\mathrm{L}}/\partial t = 0$.

Lemma 16.2. *Valgono*
$$\frac{\partial \boldsymbol{v}_i^{\mathrm{L}}}{\partial p_h}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t) = \frac{\partial \boldsymbol{X}_i^{\mathrm{L}}}{\partial q_h}(\boldsymbol{q}, t) \,,$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\frac{\partial \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}}{\partial q_h}(\boldsymbol{q}(t), t)\Big) = \frac{\partial \boldsymbol{v}_i^{\mathrm{L}}}{\partial q_h}(\boldsymbol{q}(t), \dot{\boldsymbol{q}}(t), t) \,.$$
Notazione
$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_h} = \frac{\partial}{\partial p_h} \,.$$
Le componenti lagrangiane delle forze Q_h.

Teorema 16.3. *(Equazioni di Lagrange) Le ℓ equazioni*
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\frac{\partial T^{\mathrm{L}}}{\partial \dot{q}_h}\Big] - \frac{\partial T^{\mathrm{L}}}{\partial q_h} = Q_h \,, \quad h = 1 \,, \dots \,, \ell \,,$$
sono equivalenti all'ipotesi dei lavori virtuali.

Esercizio 16.4. Esempio visto in classe per introdurre la ILV (con le equazioni di Lagrange).
Esercizio D/R.
1/620 (con le equazioni di Lagrange); 57/620.
Punto su piano ruotante, in assenza di forze direttamente applicate. □

Per casa 16.5. 59, 61, 64/620. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 7.5, 7.6.

17. Martedì 03/11/2020 (Aula 14: 17-19)

Forze conservative e componenti lagrangiane delle forze.

Teorema 17.1. *Se il sistema di punti materiali è soggetto a sollecitazioni conservative di potenziale $U(\boldsymbol{z})$, si ha*

$$Q_h = \frac{\partial}{\partial q_h}[U(\boldsymbol{z}^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q},t))]\,, \qquad h = 1\,,\dots\,,\ell\,.$$

Se i vincoli sono mobili l'energia in genere non si conserva anche se le forze direttamente applicate sono conservative.

Teorema 17.2. *Se i vincoli sono fissi e il sistema di punti materiali è soggetto a sollecitazioni conservative di potenziale $U(\boldsymbol{z})$, l'energia*

$$T^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) - U(\boldsymbol{z}^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}))\,,$$

si conserva lungo un moto lagrangiano che soddisfa l'ipotesi dei lavori virtuali.

Definizione di potenziale lagrangiano e forze conservative in senso lagrangiano.
Definizione di lagrangiana.
Equazioni di Lagrange in forma conservativa.

Esercizio 17.3. 6, 9/630;
Esercizio D/R. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 8.1, 8.2.

18. Giovedì 05/11/2020
(A distanza per DPCM 3/11: 14-17)

Teorema 18.1. *Consideriamo un sistema di punti materiali vincolato da vincoli olonomi fissi, con componenti lagrangiane delle forze conservative in senso lagrangiano e* $U^{\mathrm{L}} = U^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q})$*. Allora se*

$$\frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial q_h}(\boldsymbol{q}_0) = 0\,, \qquad h = 1\,, \dots\,, \ell\,,$$

la funzione costante $\boldsymbol{q}(t) = \boldsymbol{q}_0$ *risolve le equazioni di Lagrange.*

Teorema 18.2. *Nelle ipotesi del teorema precedente, se inoltre le forze direttamente applicate sono conservative in senso tradizionale, e* $\boldsymbol{q}_0$ *è un punto di massimo isolato per* U^{L}*, allora è di equilibrio stabile.*

Esercizio 18.3. 8, 40/660. □

Piccole oscillazioni in punti di equilibrio, con hessiana del potenziale definita negativa, per sistemi vincolati da vincoli olonomi fissi e soggetti a forze conservative.
Energia cinetica ridotta, potenziale ridotto, lagrangiana ridotta.
Il caso 1-dimensionale: moto armonico.
Equazioni di Lagrange delle piccole oscillazioni nel caso $\ell > 1$:

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}\ddot{\boldsymbol{q}} - \boldsymbol{\mathcal{U}}\boldsymbol{q} = 0\,.$$

Ricerca delle frequenze delle piccole oscillazioni con la sostituzione $\boldsymbol{q}(t) = \boldsymbol{q}_0 \cos(\omega t + \varphi)$; equazione $\det(\omega^2 \boldsymbol{\mathcal{A}} + \boldsymbol{\mathcal{U}}) = 0$.
Teorema di esistenza delle coordinate normali.

Esercizio 18.4. 6/680; esempi numerici. □

Per casa 18.5. 27, 38, 45/660;
1, 11/680. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 8.4, 9.3.

19. Lunedì 09/11/2020
(A distanza per DPCM 3/11: 14-17)

Basi ortonormali. Matrici di cambiamento di base $\boldsymbol{\Gamma}_{\mathcal{M}\mathcal{N}}$. Si ha $\boldsymbol{\Gamma}_{\mathcal{M}\mathcal{N}} = {\boldsymbol{\Gamma}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}}^{\mathrm{t}}$.

Teorema 19.1. *Se $\boldsymbol{a}$ ha componenti $\boldsymbol{\lambda}$ in $\mathcal{M}$ e $\boldsymbol{\mu}$ in $\mathcal{N}$, allora $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\Gamma}_{\mathcal{M}\mathcal{N}}\boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\Gamma}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}\boldsymbol{\lambda}$.*

Definizione di matrice ortogonale.

Teorema 19.2. (s.d.) *Le matrici di cambiamento di base sono ortogonali: $\boldsymbol{\Gamma}_{\mathcal{M}\mathcal{N}} = (\boldsymbol{\Gamma}_{\mathcal{N}\mathcal{M}})^{-1}$. Quindi il loro determinante ha valore assoluto pari a* 1.

Definizione di base ortonormale positiva.

Teorema 19.3. (s.d.) *Composizione delle matrici del cambiamento di base: $\boldsymbol{\Gamma}_{\mathcal{M}\mathcal{P}} = \boldsymbol{\Gamma}_{\mathcal{M}\mathcal{N}}\boldsymbol{\Gamma}_{\mathcal{N}\mathcal{P}}$.*

Caratterizzazione delle matrici ortogonali in $\boldsymbol{R}^2$. Prodotto triplo in $\boldsymbol{R}^3$.

Teorema 19.4. *Se $(\boldsymbol{u}_h)$ è una base ortonormale positiva di $\boldsymbol{R}^3$, allora*

$$\boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u}_3 , \quad \boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_3 = -\boldsymbol{u}_2 , \quad \boldsymbol{u}_2 \times \boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{u}_1 .$$

Corollario 19.5. *Se $(\boldsymbol{u}_h)$ è una base ortonormale positiva,*

$$\boldsymbol{a} = \sum_{h=1}^{3} \alpha_h \boldsymbol{u}_h , \quad \boldsymbol{b} = \sum_{h=1}^{3} \beta_h \boldsymbol{u}_h , \quad \textit{si ha} \quad \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{u}_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} .$$

Definizione di sistema di riferimento in $\boldsymbol{R}^3$. Cambiamento di coordinate. Definizione di sistema di riferimento mobile in $\boldsymbol{R}^3$.

Esercizio 19.6. Esercizi D/R. □

Esempio 19.7. Moto $\boldsymbol{X}(t) = (L + ct)\boldsymbol{e}_1$ nel sistema mobile $\mathcal{S}$ con origine mobile nell'origine del sistema fisso e base ruotante intorno all'asse $\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{u}_3$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_2 , \\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_2 , \\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3 . \end{aligned}$$

□

Definizione di derivata relativa a una terna mobile. Definizione di velocità e accelerazione relativa a un sistema di riferimento mobile.

Esercizio 19.8. 72/620. □

Per casa 19.9. 1) Calcolare velocità e accelerazione relativa nell'Esempio precedente.
2) 5/100. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 9.1, 10.1, 10.2, 10.3.

20. Martedì 10/11/2020 (A distanza per DPCM 3/11: 17-19)

Regole di derivazione per la derivata relativa; derivata relativa di uno scalare. Funzioni vettoriali costanti in una terna mobile (e quindi di lunghezza costante); moti solidali con un sistema di riferimento mobile.

Lemma 20.1. *Data una terna mobile* $(\boldsymbol{u}_h)$ *esiste unica funzione* $\boldsymbol{\omega}$ *tale che*

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_h}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{u}_h \,, \qquad h = 1\,,2\,,3\,.$$

$\boldsymbol{\omega}$ si dice velocità angolare della terna.

Teorema 20.2. *Per ogni* $\boldsymbol{a} \in C^1(I)$ *si ha*

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t} = \left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{M}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{a}\,.$$

Esempio 20.3. La terna

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi(t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi(t)\,\boldsymbol{e}_2\,, \\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin\varphi(t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi(t)\,\boldsymbol{e}_2\,, \\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,, \end{aligned}$$

ha $\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\boldsymbol{e}_3$. □

Teorema 20.4. *La velocità angolare di* $\mathcal{M}$ *è costante in* $\mathcal{M}$ *se e solo se è costante; ha direzione costante in* $\mathcal{M}$ *se e solo se ha direzione costante.*

Teorema del moto relativo sulla scomposizione della velocità nel sistema fisso. Velocità di trascinamento.

Esercizio 20.5. Esercizio D/R.
1/340. □

Per casa 20.6. 19, 24, 35/340.
Trovare la velocità angolare della rotazione intorno a $\boldsymbol{u}_1$. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 10.3, 10.4, 10.5.

21. Giovedì 12/11/2020 (A distanza per DPCM 3/11: 14-17)

Teorema di Coriolis sulla scomposizione dell'accelerazione nel sistema fisso. Accelerazione di trascinamento e di Coriolis.
Teorema di ricostruzione di terne mobili data la velocità angolare.
Definizione di rotazione e rotazione costante per una terna. Definizione di moto polare e rotazione (e rotazione costante) per un sistema mobile di riferimento.

Esercizio 21.1. Una terna si muove di rotazione (intorno a $\boldsymbol{u}_3$) se e solo se $\boldsymbol{\omega} = \alpha(t)\boldsymbol{e}_3$ o $\boldsymbol{\omega} = \alpha(t)\boldsymbol{u}_3$ (terna fissa e mobile coincidenti a $t = 0$). □

Velocità angolare relativa di una terna mobile rispetto a un'altra.

Teorema 21.2. *Date due terne mobili $\mathcal{N}$ e $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_h)$ esiste un'unica $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}$ tale che*

$$\left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_h}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{N}} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}} \times \boldsymbol{u}_h \,.$$

Teorema 21.3. *Per ogni $\boldsymbol{a} \in C^1(I)$ si ha*

$$\left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{N}} = \left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{M}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}} \times \boldsymbol{a} \,.$$

Dalla definizione segue $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{M}\mathcal{M}} = 0$, $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}} = -\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{M}\mathcal{N}}$.

Teorema 21.4 (Composizione di velocità angolari)**.** *Se $\mathcal{P}$, $\mathcal{N}$, $\mathcal{M}$ sono terne mobili, vale*

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{P}\mathcal{M}} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{P}\mathcal{N}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}} \,.$$

Esempio 21.5. $\mathcal{P}$ fissa, $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{P}\mathcal{M}} = \dot{\varphi}\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{M}\mathcal{N}} = \dot{\theta}\boldsymbol{u}_1$. □

Dinamica relativa; le forze apparenti di trascinamento e di Coriolis.

Esercizio 21.6. Esercizio D/R.
Esempio numerico del 1/340.
26/340, 65/630. □

Per casa 21.7. 27, 29/340; 69/630. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 10.5, 10.6, 10.7, 12.1, 12.2.

22. Lunedì 16/11/2020
(A distanza per DPCM 3/11: 14-17)

Teorema 22.1. *La forza di Coriolis ha componenti lagrangiane nulle se nel sistema mobile i vincoli sono fissi e* $\ell = 1$.

Teorema 22.2. *La forza di Coriolis ha componenti lagrangiane nulle se nel sistema mobile i moti sono vincolati a un piano solidale cui appartiene anche la velocità angolare.*

Le formule di Frenet-Serret. La velocità angolare della terna intrinseca di una curva descritta da un moto di legge oraria $s(t)$.

Esercizio 22.3. Esercizio D/R.
68/630. □

Vincoli di rigidità per n moti $\boldsymbol{X}_i$. Numero dei gradi di libertà per 3 moti non allineati ($\ell = 6$).

Teorema 22.4. (s.d.) *Risultano costanti nel tempo le quantità:*

$$(\boldsymbol{X}_j - \boldsymbol{X}_i) \cdot (\boldsymbol{X}_k - \boldsymbol{X}_h) \,,$$
$$|(\boldsymbol{X}_j - \boldsymbol{X}_i) \times (\boldsymbol{X}_k - \boldsymbol{X}_h)| \,.$$

Teorema 22.5. (s.d.) *Per ogni* $r \geq 4$ *esistono* $\lambda_h \in \boldsymbol{R}$ *costanti tali che*

$$\boldsymbol{X}_r(t) - \boldsymbol{X}_1(t) = \sum_{h=1}^{3} \lambda_h \boldsymbol{u}_h(t) \,, \qquad t \in I \,.$$

Qui $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{X}_2 - \boldsymbol{X}_1$, $\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{X}_3 - \boldsymbol{X}_1$, $\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_2$.

Dunque $\ell = 6$ per ogni $n \geq 3$.

Per casa 22.6. 44, 52, 66/630. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 6.6, 10.8, 12.4.

23. Martedì 17/11/2020
(A distanza per DPCM 3/11: 17-19)

Sistema rigido non degenere. Sistema di riferimento solidale. Moti del sistema rigido e moti solidali al sistema rigido.
Angoli di Eulero.
Velocità angolare nella forma

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\phi}\boldsymbol{e}_3 + \dot{\theta}\boldsymbol{w}_1 + \dot{\psi}\boldsymbol{u}_3 \,.$$

Esercizio 23.1. Esercizio D/R. □

Per casa 23.2. 39/340, 76/620. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 13.1, 13.2.

24. Giovedì 19/11/2020 (A distanza per DPCM 3/11: 14-17)

Corpo rigido degenere rettilineo.

Lemma 24.1. *Se* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}^3$, $\boldsymbol{a} \neq 0$, *allora* $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = -|\boldsymbol{a}|^2 [\boldsymbol{b}]_\perp$.

Teorema 24.2. *Dato un versore* $\boldsymbol{u} \in C^1(I)$ *esiste unico* $\boldsymbol{\omega}$ *tale che*

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{u}\,, \qquad \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{u} = 0\,.$$

Moti solidali al rigido $\boldsymbol{X}(t, \boldsymbol{\lambda})$. Scomposizione

$$\boldsymbol{X}(t, \boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{X}_O(t) + \sum_{h=1}^{3} \lambda_h \boldsymbol{u}_h(t)\,.$$

Corpi rigidi continui (e non continui). Distribuzioni di massa: solidi, superfici, curve, punti isolati. Definizione di corpo rigido non degenere e degenere rettilineo. Massa.
Definizione di moto del centro di massa $\boldsymbol{X}_G$.

Teorema 24.3. *($\boldsymbol{X}_G$ è solidale) Si ha* $\boldsymbol{X}_G(t) = \boldsymbol{X}(t, \boldsymbol{\lambda}_G)$, *con*

$$\boldsymbol{\lambda}_G = \frac{1}{m} \int_C \boldsymbol{\lambda} \rho(\boldsymbol{\lambda})\, \mathrm{d}\mu\,.$$

Teorema 24.4. *(additività)* (s.d.) *Se* $C = C_1 \cup C_2$, *con* $\int_{C_1 \cap C_2} \rho\, \mathrm{d}\mu = 0$, *allora*

$$\boldsymbol{\lambda}_G = \frac{m_1}{m} \boldsymbol{\lambda}_G^1 + \frac{m_2}{m} \boldsymbol{\lambda}_G^2\,,$$

con m_i *e* $\boldsymbol{\lambda}_G^i$ *rispettivamente massa e coordinate del centro di massa di* C_i.

Definizione di piano di simmetria materiale ortogonale.

Teorema 24.5. (s.d.) *Se* Π *è di simmetria materiale ortogonale per* C *allora* $\boldsymbol{\lambda}_G \in \Pi$.

Esercizio 24.6. Esercizio D/R.
Esempio MMM 12.6 (equilibrio relativo a ellisse scabra ruotante) □

Per casa 24.7. 7, 8/580. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 13.3, 14.1, 14.2.

25. Lunedì 23/11/2020
(A distanza per DPCM 3/11: 14-17)

Definizione di energia cinetica, quantità di moto e momento delle quantità di moto di polo Z. Campo delle velocità di trascinamento del sistema solidale $\boldsymbol{V}_{\mathrm{T}}$. Quantità di moto e momento delle quantità di moto in cui si sostituisce la formula della velocità di trascinamento.
Definizione del tensore d'inerzia $\boldsymbol{\sigma}_Z$ di polo Z.

Teorema 25.1. *Vale per ogni moto* $\boldsymbol{X}_Z$

$$\boldsymbol{L}_Z = \boldsymbol{\sigma}_Z \boldsymbol{\omega} + m(\boldsymbol{X}_G - \boldsymbol{X}_Z) \times \boldsymbol{V}_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{X}_Z, t) \,.$$

In particolare $\boldsymbol{L}_Z = \boldsymbol{\sigma}_Z \boldsymbol{\omega}$ *se* $\boldsymbol{X}_G = \boldsymbol{X}_Z$ *o se* $\boldsymbol{X}_Z$ *è sia fisso che solidale.*

Calcolo degli elementi della matrice di inerzia in un sistema qualunque. La matrice è simmetrica. Definizione di momenti di inerzia e deviatori.

Teorema 25.2. *Le quantità* $\boldsymbol{\sigma u} \cdot \boldsymbol{u}$ *e* $\boldsymbol{\sigma u} \cdot \boldsymbol{w}$ *(con* $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w} = 0$*) espresse in funzione di distanze da rette e piani (mediante integrali).*

Corollario 25.3. *La* $\boldsymbol{\sigma}$ *è definita positiva se il corpo è non degenere, e semidefinita positiva nel caso dell'asta rigida.*

Calcolo di $\boldsymbol{\sigma}$ per l'asta rigida.
Momenti d'inerzia e deviatori possono dipendere dal tempo. Però:

Teorema 25.4. *Se* $\mathcal{M}$ *e* $\boldsymbol{X}_Z$ *sono solidali con il corpo rigido, allora la matrice* $\boldsymbol{\sigma}_Z^{\mathcal{M}}$ *è costante nel tempo.*

Definizione di vettori principali di inerzia, assi principali di inerzia, terne principali di inerzia.

Teorema 25.5. *Sia* $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_h)$ *una terna ortonormale. Allora se* $\boldsymbol{u}_1$ *è principale si ha* $I_{12} = I_{13} = 0$.

Teorema 25.6. *Sia* C *un rigido non degenere. In ogni punto esiste una terna ortonormale principale, che rende la matrice di* $\boldsymbol{\sigma}$ *diagonale. Se* $\boldsymbol{X}_Z$ *è un moto solidale, esiste una base solidale principale* $\mathcal{M}$ *in* $\boldsymbol{X}_Z$ *(ossia tale che* $\boldsymbol{\sigma}_Z^{\mathcal{M}}$ *sia diagonale e costante).*

Esercizio 25.7. Esercizio D/R.
23/330. □

La matrice $\boldsymbol{\sigma}$ nel caso delle lamine.

Per casa 25.8. 17, 48/330. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 14.3, 14.4, 14.5.

26. Martedì 24/11/2020 (A distanza per DPCM 3/11: 17-19)

Proprietà di minimo e massimo dei momenti principali.

Teorema 26.1. *1) Dati due versori ortogonali principali, il loro prodotto vettoriale è principale.*
2) Se in un punto tutti i momenti d'inerzia principali sono uguali, tutti i vettori sono principali in quel punto.
3) Se in un punto due momenti d'inerzia principali sono uguali, tutti i versori del piano generato dai due versori principali corrispondenti sono principali.

Ricerca di assi principali (s.d.):
la normale a un piano di simmetria materiale ortogonale è principale (in un punto del piano);
traslabilità di terne principali centrali lungo gli assi;
teorema di Huygens.
Applicazioni a corpi piani e di rotazione. Il caso della sfera e del cubo.

Esercizio 26.2. Esercizio D/R: la diagonale del rettangolo non è principale nel centro del rettangolo (se il rettangolo non è quadrato). □

Distribuzioni di forze su un corpo rigido. Risultante e momento risultante delle forze. Equazioni globali per un corpo rigido. Forze esterne.

Per casa 26.3. 39, 53/330. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 14.5, 14.6, 15.1, 15.2.

27. Giovedì 26/11/2020
(A distanza per DPCM 3/11: 14-17)

Teorema 27.1. *Le due equazioni globali determinano il moto di un corpo rigido non degenere.*

Cenno al caso dell'asta rigida.
Sistemi di corpi rigidi vincolati. Coordinate locali. Moti solidali a un corpo rigido del sistema; velocità di moti solidali in forma lagrangiana; energia cinetica del sistema. Ipotesi dei lavori virtuali.

Teorema 27.2. (s.d.) *Le equazioni date dall'ipotesi dei lavori virtuali determinano il moto.*

Le equazioni di Lagrange per sistemi di corpi rigidi.

Esercizio 27.3. Esercizio D/R (componenti lagrangiane delle forze). 63/620. □

Per casa 27.4. 14, 28, 30/620. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 15.4, 16.1, 16.2.

28. Lunedì 30/11/2020 (A distanza per DPCM 3/11: 14-17)

Teorema 28.1. *Vale per un corpo rigido C e un moto $\boldsymbol{X}_Z$*

$$T(t) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_Z\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega} + \frac{m}{2}|\boldsymbol{V}_\mathcal{T}(\boldsymbol{X}_Z,t)|^2 + m\boldsymbol{V}_\mathcal{T}(\boldsymbol{X}_Z,t)\cdot\boldsymbol{\omega}\times[\boldsymbol{X}_G-\boldsymbol{X}_Z]\,.$$

Corollario 28.2. *(König)*

$$T(t) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_G\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega} + \frac{m}{2}|\boldsymbol{v}_G|^2\,.$$

Corollario 28.3. *In un moto polare di polo Z*

$$T(t) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_Z\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega}\,.$$

Teorema 28.4. *(Equazioni di Eulero) Supponiamo che l'origine O del sistema solidale con il rigido non degenere sia fissa o coincida con il centro di massa. Vale*

$$\boldsymbol{\sigma}_O\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\sigma}_O\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{M}_O^{\text{ext}}\,. \tag{28.1}$$

Corollario 28.5. *In componenti, in una terna principale $(\boldsymbol{u}_h)$, denotando*

$$\boldsymbol{\omega} = \sum_{h=1}^{3}\omega_h\boldsymbol{u}_h\,, \qquad \boldsymbol{M}_O^{\text{ext}} = \sum_{h=1}^{3}M_h\boldsymbol{u}_h\,,$$

la (28.1) *equivale a*

$$\begin{aligned} I_{11}\dot{\omega}_1 &= (I_{22}-I_{33})\omega_2\omega_3 + M_1\,,\\ I_{22}\dot{\omega}_2 &= (I_{33}-I_{11})\omega_1\omega_3 + M_2\,,\\ I_{33}\dot{\omega}_3 &= (I_{11}-I_{22})\omega_1\omega_2 + M_3\,. \end{aligned}$$

Le equazioni di Eulero in genere sono accoppiate con la I equazione globale. Nel caso del moto polare determinano il moto. Sono sempre un sistema del II ordine negli angoli di Eulero, e possono essere considerate un sistema nelle ω_h se $\boldsymbol{M}_O^{\text{ext}}$ dipende dalle ω_h e da t.

Teorema 28.6. *In un moto polare di polo Z*

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M}_Z^{\text{ext}}\cdot\boldsymbol{\omega}\,.$$

Esercizio 28.7. Esercizio D/R. 47, 62/450. □

Per casa 28.8. Esercizio MMM 15.42: derivata della T di un corpo rigido nel caso generale. 17, 28, 34, 43/450. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 15.5, 15.7.

29. Martedì 01/12/2020
(A distanza per DPCM 3/11: 17-19)

Sia $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ un sistema solidale al rigido non degenere.

Teorema 29.1. *Sia O fisso.*
Se il moto è una rotazione intorno a un asse principale allora $\boldsymbol{M}_O^{\mathrm{ext}}$ è parallelo all'asse di rotazione.
Se viceversa $\boldsymbol{M}_O^{\mathrm{ext}}$ è parallelo a un asse principale, il moto è di rotazione intorno a quell'asse per le opportune condizioni iniziali.

Teorema 29.2. *Sia O fisso.*
Se il moto è una rotazione intorno a un asse non principale, allora il momento $\boldsymbol{M}_O^{\mathrm{ext}}$ ha componente ortogonale all'asse non nulla in ogni istante in cui $\boldsymbol{\omega}(t) \neq 0$.

Motivazione della denominazione di momenti deviatori.
Caso del corpo vincolato a ruotare intorno a un asse fisso: si possono usare le equazioni di Eulero, quella relativa alla direzione dell'asse di rotazione dà l'equazione del moto, le altre due danno il momento della reazione vincolare.
Nel caso del corpo vincolato a ruotare intorno a un asse fisso con vincolo liscio (cioè se vale l'ipotesi dei lavori virtuali), il momento della reazione vincolare ha componente nulla lungo l'asse di rotazione.
Nel caso del corpo vincolato a muoversi di moto polare con vincolo liscio (cioè se vale l'ipotesi dei lavori virtuali), il momento della reazione vincolare è nullo.

Esercizio 29.3. Esercizio D/R.
4/450. □

Per casa 29.4. 7, 10, 14, 26, 32/450. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 15.6.

30. Giovedì 03/12/2020 (A distanza per DPCM 3/11: 14-17)

Moti polari per inerzia di polo O.

Teorema 30.1. *In un moto polare per inerzia valgono gli integrali primi:*
1) $\boldsymbol{L}_O(t) = \boldsymbol{\sigma}_O\boldsymbol{\omega}(t) = \boldsymbol{L}(t_0)$.
2) $T(t) = \boldsymbol{\sigma}_O\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}/2 = T(t_0)$.

Il vettore $\boldsymbol{\sigma}_O\boldsymbol{\omega}$ è costante nella terna fissa ma in genere non solidale al rigido. Se $\boldsymbol{\omega}(t) \neq 0$ per un t allora non si annulla mai.
Ellissoide d'inerzia solidale e mobile. Normale all'ellissoide.

Teorema 30.2. *(Moto alla Poinsot) Consideriamo un corpo rigido non degenere che si muove di moto polare per inerzia di polo O. Allora l'ellissoide d'inerzia mobile si muove rotolando senza strisciare su un piano fisso, che ha normale $\boldsymbol{L}_O(t)$.*

Le rotazioni uniformi intorno a assi principali sono moti polari per inerzia.

Teorema 30.3. *Se C si muove di moto polare per inerzia, e di rotazione, allora la rotazione è uniforme e l'asse di rotazione è principale d'inerzia.*

Esercizio 30.4. Esercizio D/R. □

Definizioni di poloidi ed erpoloidi. Caso dell'ellissoide non di rotazione: rotazioni per inerzia stabili e instabili; moti per inerzia non periodici (corrispondono alle 4 polodie separatrici); simulazione numerica. Caso dell'ellissoide sferico.

Esercizio 30.5. 29/450. □

Per casa 30.6. 35, 41, 45, 67, 69/450. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 15.8, 15.9.

31. Lunedì 07/12/2020
(A distanza per DPCM 3/12: 14-17)

Esercizio 31.1. 70/620.
33/340.
26/450. □

Per casa 31.2. Trovare le direzioni principali nel vertice di un rettangolo non quadrato (minimizzando il momento d'inerzia di un asse nel piano nel rettangolo).
65, 69/450. □

32. Giovedì 10/12/2020
(A distanza per DPCM 3/12: 14-17)

Studio del campo della velocità di trascinamento.
Scomposizione della velocità di trascinamento in componente parallela e ortogonale a $\boldsymbol{\omega}(t) \neq 0$. Centro istantaneo del moto. Asse istantaneo di moto e sue proprietà (asse di istantanea rotazione).

Lemma 32.1. *Vale*

$$\boldsymbol{V}_{\scriptscriptstyle T}(\boldsymbol{x}_1, t) - \boldsymbol{V}_{\scriptscriptstyle T}(\boldsymbol{x}_2, t) = \boldsymbol{\omega}(t) \times (\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2) \,,$$

e quindi $\boldsymbol{V}_{\scriptscriptstyle T}$ *per* t *fissato è costante sulle rette parallele a* $\boldsymbol{\omega}(t)$.

Rigate del moto.
Moti rigidi piani. Base e rulletta.
Teorema di Chasles.

Esempio 32.2. Il compasso ellittico. □

Esercizio 32.3. 16, 17/340. □

Per casa 32.4. 18, 30, 36/340. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 11.1, 11.2, 11.3.

FINE DEL CORSO