DIARIO DELLE LEZIONI DEL CORSO DI MECCANICA RAZIONALE A.A. 2019-2020 CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA

DANIELE ANDREUCCI
DIP. SCIENZE DI BASE E APPLICATE PER L'INGEGNERIA
UNIVERSITÀ LA SAPIENZA
VIA A.SCARPA 16, 00161 ROMA, ITALY

Le dimostrazioni fanno parte del programma, salvo che quando viene esplicitamente indicato il contrario con il simbolo (s.d.).

I richiami al testo MMM si riferiscono al testo *Meccanica Razionale, Modelli Matematici per l'Ingegneria*, D. Andreucci, edizioni La Dotta. La numerazione n/m relativa agli esercizi si riferisce all'esercizio n del gruppo m, nella raccolta pubblicata sul sito del corso prima dell'inizio del corso.

1. Lunedì 23/09/2019
(Aula 14: 14-17)

Presentazione del corso.
Il moto di un punto come funzione vettoriale. Significato della continuità del moto.
Grafico (linea di universo) e orbita (traiettoria) di un moto. Esempio di moti con uguale orbita ma diverso grafico $\boldsymbol{X}(t) = at^n\boldsymbol{e}_1$, $0 \le t \le 1$.
Velocità e accelerazione. Passaggio dall'accelerazione al moto, condizioni iniziali.
Esempio di un moto di classe C^2 ma con orbita con uno spigolo:

$$\boldsymbol{X}(t) = t^3\boldsymbol{e}_1 + |t|^3\boldsymbol{e}_2 \,.$$

Confronto con il caso del grafico di una funzione scalare.
Definizione di retta tangente per la traiettoria di un moto.

Teorema 1.1. *Se un moto ammette retta tangente, allora è derivabile e la sua derivata è il vettore tangente.*

Per casa 1.2. 1) Se un moto è derivabile e la derivata è diversa da zero, allora ammette retta tangente.
2) Calcolare la retta tangente nell'istante generico per

$$\boldsymbol{X}(t) = R\cos\varphi(t)\boldsymbol{e}_1 + R\sin\varphi(t)\boldsymbol{e}_2 \,,$$

con $R > 0$, $\varphi \in C^2(\boldsymbol{R})$. □

Base canonica, prodotto scalare di vettori in $\boldsymbol{R}^N$ e sue proprietà. Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. Angolo φ tra due vettori.
Prodotto vettoriale di vettori in $\boldsymbol{R}^3$ e sue proprietà. Formula

$$|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|^2 = |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2 - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2 \,,$$

da cui $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\varphi$.

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 1.1, 1.2, 1.4.

2. Martedì 24/09/2019
(Aula 14: 16-18)

Legge del moto. Definizione di punto materiale. Problema di Cauchy o ai valori iniziali.
Funzioni localmente lipschitziane.
Soluzioni massimali.

Teorema 2.1. (s.d.) *La soluzione massimale del problema di Cauchy per l'equazione* $m\ddot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}, \dot{\boldsymbol{X}}, t)$ *esiste ed è unica se* $\boldsymbol{F}$ *è continua in un aperto* $A \subset \boldsymbol{R}^7$ *e localmente lipschitziana rispetto a* $\boldsymbol{X}$, $\dot{\boldsymbol{X}}$.
Il suo intervallo di definizione (σ, Σ) *è aperto e per* $t \to \Sigma-$ *si deve avere che* $(\boldsymbol{X}(t), \dot{\boldsymbol{X}}(t), t)$ *diventa illimitata oppure la sua distanza da* ∂A *tende a* 0.

Esempio 2.2. Risoluzione completa del problema

$$\begin{aligned} m\ddot{\boldsymbol{X}} &= -k\boldsymbol{X}\,, \\ \boldsymbol{X}(0) &= L\boldsymbol{e}_1\,, \\ \dot{\boldsymbol{X}}(0) &= c\boldsymbol{e}_2\,, \end{aligned}$$

con k, $c > 0$. La traiettoria è un'ellisse (percorsa infinite volte). □

Per casa 2.3. 1, 2, 3/100. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 1.3.

3. Giovedì 26/09/2019
(Aula 14: 14-17)

Esercizio 3.1. Punto materiale che si muove sotto l'effetto dell'attrazione gravitazionale: caso del moto rettilineo. $\square$

Energia cinetica T, lavoro di una forza.

Teorema 3.2 (del lavoro)**.** *Se* $m\ddot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{F}$, *allora*

$$T(t_1) - T(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{F} \cdot \dot{\boldsymbol{X}} \, \mathrm{d}t \,.$$

Per casa 3.3. Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{aligned} m\ddot{\boldsymbol{X}} &= \boldsymbol{B} \times \dot{\boldsymbol{X}} \,, \\ \boldsymbol{X}(0) &= R\boldsymbol{e}_1 \,, \\ \dot{\boldsymbol{X}}(0) &= c\boldsymbol{e}_2 \,. \end{aligned}$$

Qui $R > 0$, $c > 0$. Integrale dell'energia cinetica. $\square$

Autovettori di matrici e sistemi differenziali a coefficienti costanti.

Esercizio 3.4. 3/100. $\square$

Riduzione dell'ordine di un sistema differenziale, aumentando il numero delle variabili.

Per casa 3.5. Trovare tutte le soluzioni di

$$\begin{aligned} \dot{X}_1 &= X_2 \,, \\ \dot{X}_2 &= -X_1 . \,. \end{aligned}$$

$\square$

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 1.5, 1.8.

4. Lunedì 30/09/2019
(Aula 14: 14-17)

Dipendenza continua. Stima di Gronwall per sistemi di ordine 1. Necessità di assumere intervalli limitati.

Esempio 4.1. Il caso scalare $\dot{x} = x$; il caso del moto con $\boldsymbol{F} = 0$. □

Per casa 4.2. Dimostrare la dipendenza continua per $m\ddot{\boldsymbol{X}} = \gamma \boldsymbol{X}$, m, $\gamma > 0$. □

Sistemi differenziali autonomi. Traslazione nel tempo delle soluzioni. Definizione di punto di equilibrio $\boldsymbol{x}_{\mathrm{eq}} \in \boldsymbol{R}^3$ per un sistema autonomo.

Teorema 4.3. *Il punto $\boldsymbol{x}_{\mathrm{eq}}$ è di equilibrio se e solo se la funzione costante $\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{x}_{\mathrm{eq}}$ è soluzione.*

Definizione di equilibrio stabile.

Esercizio 4.4. Tutti i punti di $\boldsymbol{R}^3$ sono di equilibrio stabile per $m\ddot{\boldsymbol{X}} = -\mu\dot{\boldsymbol{X}}$, m, $\mu > 0$. □

Esercizio 4.5. Scrittura in coordinate polari del sistema

$$\dot{x}_1 = -x_2\,, \qquad \dot{x}_2 = x_1\,.$$

□

Per casa 4.6. 1) Studiare la stabilità dell'equilibrio per $m\ddot{X} = -\mu\dot{X}^{1+q}$, m, μ, $q > 0$. Si assuma $\dot{X} > 0$.
2) Studiare la stabilità dell'origine per $\boldsymbol{F} = (ax_1 - x_2)\boldsymbol{e}_1 - x_2\boldsymbol{e}_2 - x_3\boldsymbol{e}_3$.
3) Sia $x \in C^1(\boldsymbol{R})$, $x \geq 0$, $x(0) > 0$, $\dot{x} \geq -x$. Dimostrare che $x(t) > 0$ per ogni $t > 0$. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 1.6, 1.7.

5. Martedì 01/10/2019
(Aula 14: 16-18)

Integrali primi di sistemi differenziali del secondo ordine.
Calcolo del lavoro per le forze

$$\boldsymbol{F} = -k\boldsymbol{X}\,, \qquad \boldsymbol{F} = -\gamma m \frac{\boldsymbol{X}}{|\boldsymbol{X}|^3}\,.$$

Forze posizionali e conservative. Potenziale. Definizione di energia.

Teorema 5.1. *Se un moto $\boldsymbol{X}$ soddisfa $m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}$ e $\boldsymbol{F}$ è conservativa con potenziale U, allora l'energia*

$$\mathcal{E}(t) = \frac{m}{2}|\dot{\boldsymbol{X}}(t)|^2 - U(\boldsymbol{X}(t))$$

si mantiene costante durante il moto.

Teorema 5.2. *Se un moto $\boldsymbol{X}$ soddisfa $m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_0$, con $\boldsymbol{F}$ conservativa con potenziale U, e $\boldsymbol{F}_0 \cdot \dot{\boldsymbol{X}} = 0$, allora l'energia*

$$\mathcal{E}(t) = \frac{m}{2}|\dot{\boldsymbol{X}}(t)|^2 - U(\boldsymbol{X}(t))$$

si mantiene costante durante il moto.

Esempi di forza a lavoro nullo: forza di Lorentz, reazioni vincolari di vincoli lisci.
L'energia come integrale primo; il caso unidimensionale di $m\ddot{x} = F(x)$.

Esercizio 5.3. 1) Uso dell'integrale primo dell'energia per ricavare stime sul moto; 7/120.
2) Resistenza idraulica, casi di stabilità e instabilità. □

Per casa 5.4. 1, 3, 5, 9/120. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 2.1, 2.2, 2.3.

6. Giovedì 03/10/2019
(Aula 14: 14-17)

Campi di forze chiusi e conservativi (esatti).
Un campo conservativo è chiuso, ma non vale l'implicazione contraria.

Teorema 6.1. (s.d.) *Un campo $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \in A \subset \boldsymbol{R}^3$ è conservativo in A se e solo se il suo integrale su tutte le curve chiuse contenute in A è nullo.*

Semplicemente connessi in $\boldsymbol{R}^2$ e $\boldsymbol{R}^3$. Criterio ((s.d.)): un campo chiuso in un semplicemente connesso A è conservativo in A.

Esempio 6.2. Il campo

$$\boldsymbol{F} = -\frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}\boldsymbol{e}_1 + \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}\boldsymbol{e}_2 ,$$

in $A = \boldsymbol{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. È chiuso ma non conservativo. Le primitive locali sono anomalie polari. □

Il caso 1-dimensionale: tutte le forze posizionali sono conservative. Passaggio da $m\ddot{x} = F(x) = U'(x)$ al sistema equivalente

$$\begin{aligned} \dot{x} &= p , \\ \dot{p} &= \frac{1}{m} F(x) . \end{aligned}$$

Conservazione dell'energia.
Il piano delle fasi. Orbite. Orbite nella forma

$$p = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E + U(x))} , \quad x \in J(E) = \{x \in \boldsymbol{R} \mid E + U(x) \geq 0\} .$$

Esercizio 6.3. 9/120.
Stabilità dell'origine per $\boldsymbol{F} = (ax_1 - x_2)\boldsymbol{e}_1 - x_2\boldsymbol{e}_2 - x_3\boldsymbol{e}_3$. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 2.4, 2.5.

7. Lunedì 07/10/2019
(Aula 14: 14-17)

Energia come funzione di due variabili:
$$W(x,p)=\frac{m}{2}p^2-U(x)\,;$$
uguaglianza $W(X(t),\dot{X}(t))=\mathcal{E}(t)$.
Punti di equilibrio di $m\ddot{x}=U'(x)$ sono i punti critici del potenziale e corrispondono ai punti $(\boldsymbol{x}_{\mathrm{eq}},0)$ critici per W. Questi ultimi possono essere sella o minimi.
Le orbite del piano delle fasi (x,p) giacciono su curve di livello di W.

Teorema 7.1. *Se due orbite si intersecano, allora coincidono.*

Teorema 7.2. *Se un'orbita si autointerseca, allora corrisponde a una soluzione periodica.*

Esercizio 7.3. Studio del diagramma di fase di
$$U(x)=\frac{1}{16}(x^2-4)^2\,,\qquad x\in\boldsymbol{R}\,.$$
□

Teorema 7.4. *Se* $X\in C^2((\sigma,\Sigma))$ *è una soluzione massimale di* $m\ddot{X}=F(X)$ *e*
$$X(t)\to x_0\,,\qquad \dot{X}(t)\to 0\,,\qquad t\to\Sigma-\,,$$
allora $\Sigma=+\infty$ *e* $F(x_0)=0$*.*

Esempio 7.5. Diagramma di fase e sua interpretazione per $m\ddot{x}=-k\sin x$. □

Esercizio 7.6. 20/150. □

Velocità in coordinate polari: velocità radiale e trasversale.

Per casa 7.7. 14, 15, 16/150.
Accelerazione radiale e trasversale. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 2.5, 2.6.

8. Martedì 08/10/2019
(Aula 14: 16-18)

Curve di livello di W vicino a massimi e minimi di U e confronto con il diagramma di fase.

Teorema 8.1. (Dirichlet) *Punti di massimo isolato di U corrispondono a punti di equilibrio stabile di $m\ddot{X} = U'(X)$.*

Teorema 8.2. *Punti di massimo isolato di U corrispondono a punti di equilibrio stabile di $m\ddot{X} = U'(X) - r(X, \dot{X})\dot{X}$, ove $r \geq 0$.*

Teorema 8.3. (s.d.) *(Dimensione $N > 1$). Punti di massimo isolato di U corrispondono a punti di equilibrio stabile di $m\ddot{\boldsymbol{X}} = \nabla U(\boldsymbol{X}) + \boldsymbol{h}(\boldsymbol{X}, \dot{\boldsymbol{X}})$, ove $\boldsymbol{h} \cdot \dot{\boldsymbol{X}} \leq 0$.*

Velocità e accelerazione in coordinate polari; velocità e accelerazione radiali e trasversali.
Velocità areolare.

Esempio 8.4. Se l'accelerazione trasversale è nulla, la velocità areolare è costante. □

Esercizio 8.5. 47/660. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 2.6, 2.8.

9. Giovedì 10/10/2019
(Aula 14: 14-17)

Forze a direzione radiale. Moti centrali.

Teorema 9.1. *In un moto centrale il vettore* $\boldsymbol{X}(t) \times \dot{\boldsymbol{X}}(t)$ *è costante.*

Teorema 9.2. *Sia* $\boldsymbol{X}$ *un moto centrale.*
1) Se $\boldsymbol{X}(t_0) \times \dot{\boldsymbol{X}}(t_0) \neq 0$*, allora il moto avviene nel piano per* $\boldsymbol{X}(t_0)$ *perpendicolare al vettore* $\boldsymbol{X}(t_0) \times \dot{\boldsymbol{X}}(t_0)$*.*
2) Se $\boldsymbol{X}(t_0) \times \dot{\boldsymbol{X}}(t_0) = 0$*, allora il moto avviene sulla retta per* $\boldsymbol{X}(t_0)$ *e l'origine.*

Equazioni del moto centrale scomposte nella base dei versori radiale e trasversale; l'accelerazione trasversale è nulla, quindi la velocità areolare è costante.

Teorema 9.3. *Una forza a direzione radiale è conservativa se e solo se è nella forma*

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = F(|\boldsymbol{x}|)\frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|}\,,$$

e allora il suo potenziale è (per $d > 0$ *arbitrario)*

$$U(\boldsymbol{x}) = \int_d^{|\boldsymbol{x}|} F(s)\,\mathrm{d}s\,.$$

La formula di Binet (s.d.).

Esercizio 9.4. 3/220
2.23 □

Il teorema di Rolle non vale per le funzioni vettoriali (e neppure quello della media integrale).
Sia $\boldsymbol{X} \in C([a,b])$, $a < b$; vale la disuguaglianza

$$\left|\int_a^b \boldsymbol{X}(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b |\boldsymbol{X}(t)|\,\mathrm{d}t\,.$$

Sia $\boldsymbol{X} \in C^2([a,b])$, $a < b$; vale la formula di Taylor

$$\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{X}(t_0) + (t-t_0)\dot{\boldsymbol{X}}(t_0) + O((t-t_0)^2)\,, \qquad t \to t_0\,.$$

Per casa 9.5. 1, 5/220. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 2.8, 3.1.

10. Lunedì 14/10/2019
(Aula 14: 14-17)

Definizione di lunghezza L della traiettoria di un moto come estremo superiore delle lunghezze delle approssimazioni con spezzate. Si ha

$$L \leq \int_{t_0}^{t_1} |\dot{\boldsymbol{X}}(\tau)| \, \mathrm{d}\tau \,.$$

In effetti

Teorema 10.1. (s.d.)

$$L = \int_{t_0}^{t_1} |\dot{\boldsymbol{X}}(\tau)| \, \mathrm{d}\tau \,.$$

Definizione di lughezza d'arco s. Funzione inversa della lunghezza d'arco per moti regolari. Parametrizzazione mediante s.
Moto dato mediante la traiettoria e la legge oraria.
Versore tangente, versore normale principale, curvatura, raggio di curvatura.
Scomposizione di velocità e accelerazione:

$$\boldsymbol{v} = \dot{s}\boldsymbol{T}(s) \,, \qquad \boldsymbol{a} = \ddot{s}\boldsymbol{T}(s) + \dot{s}^2 k(s)\boldsymbol{N}(s) \,.$$

Accelerazione tangente e normale.
La terna intrinseca $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$.

Esempio 10.2. 1) Circonferenza.
2) Elica cilindrica. □

Prodotto scalare di due vettori calcolato con le componenti in una base ortonormale. Componenti parallela e perpendicolare di un vettore rispetto a un altro.
Moto vincolato a una curva, reazioni vincolari. Necessità di ipotesi costitutive. Legge di attrito di Coulomb-Morin.

Esercizio 10.3. 3/560. □

Per casa 10.4. 7, 14, 21, 22/560. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 3.2, 3.4, 3.5, 3.6..

11. Martedì 15/10/2019
(Aula 14: 16-18)

Sistema del moto per un vincolo scabro; legge di Coulomb-Morin.

Teorema 11.1. *Il problema ai valori iniziali per il sistema del moto per un punto vincolato a una curva scabra, se le forze sono continue e localmente lipschitziane in* $(s, \dot{s})$*, ammette unica soluzione.*

Esercizio 11.2. 22/560. □

Il caso del vincolo liscio; la componente tangente dell'equazione del moto è indipendente dalle altre 2, che servono a determinare la reazione vincolare.

Esercizio 11.3. 9/560. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 3.6, 3.7.

12. Giovedì 17/10/2019
(Aula 14: 14-17)

Vincoli mobili: punto materiale vincolato a circonferenza che trasla:

$$\boldsymbol{\psi}(s,t) = R\cos\frac{s}{R}\boldsymbol{e}_1 + R\sin\frac{s}{R}\boldsymbol{e}_2 + \frac{ct^2}{2}\boldsymbol{e}_1\,,$$

soggetto al peso $-mg\boldsymbol{e}_2$.

Per casa 12.1. Trovare le posizioni di equilibrio relativo nel caso precedente. □

Il cerchio osculatore.
Una curva è una retta se e solo se la curvatura è ovunque nulla.

Teorema 12.2. *Una curva è piana se e solo se $\boldsymbol{B}(s)$ è costante.*

Superfici regolari e loro parametrizzazioni; i vettori derivate rispetto ai due parametri; la normale.
Definizione di piano tangente. Le velocità dei moti vincolati alla superficie appartengono al piano tangente.

Esempio 12.3. La sfera. □

Esercizio 12.4. 3/620
Parametrizzazione del toro. □

Forma delle orbite nel piano delle fasi vicino a punti di inversione del moto (hanno tangente verticale) o di equilibrio instabile (non hanno tangente verticale).

Per casa 12.5. 2, 5, 11/120. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 3.8, 4.1, 4.2.

13. Lunedì 21/10/2019 (Aula 14: 14-17)

Accelerazione per il moto di un punto vincolato a una superficie.
Vincolo liscio e scabro per una superficie.

Teorema 13.1. *Sia S una superficie con parametrizzazione di classe C^3, e $\boldsymbol{F}(\varphi, \theta, \dot{\varphi}, \dot{\theta}, t)$ una forza continua e localmente lipschitziana in $(\varphi, \theta, \dot{\varphi}, \dot{\theta})$. Allora il problema del moto del punto vincolato a una superficie liscia ha unica soluzione massimale.*

Anche per la superficie scabra vale il teorema di esistenza e unicità, usando la componente normale della reazione per ricavare quella tangente, se $\boldsymbol{v} \neq 0$.

Esercizio 13.2. 1/620. □

Attrito statico; coni di attrito per la superficie e la curva.

Esercizio 13.3. 2/520, 13/560. □

Per casa 13.4. 7, 12/620; 1/520. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 4.2, 4.4, 4.5.

14. Martedì 22/10/2019
(Aula 14: 16-18)

Sistemi di punti materiali $(\boldsymbol{X}_h, m_h)$, $h = 1, \dots, n$.
Vettore delle coordinate $\boldsymbol{z} = (z_1, \dots, z_{3n}) = (\boldsymbol{X}_1, \dots, \boldsymbol{X}_n)$ e scrittura del sistema del moto come

$$m\ddot{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{z}, \dot{\boldsymbol{z}}, t)\,,$$

con $\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{F}_1, \dots, \boldsymbol{F}_n)$ e $m = \mathrm{diag}(m_1, m_1, m_1, \dots, m_n, m_n, m_n)$. Si può applicare il teorema di esistenza e unicità di soluzioni del problema di Cauchy.
Definizione di centro di massa $\boldsymbol{X}_G$, quantità di moto $\boldsymbol{P}$, momento delle quantità di moto $\boldsymbol{L}_A$, forza totale $\boldsymbol{F}$ e momento delle forze $\boldsymbol{M}_A$.

Teorema 14.1. (Equazioni globali) *Valgono:*

$$m\ddot{\boldsymbol{X}}_G = \boldsymbol{F}\,, \qquad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_A}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M}_A + \boldsymbol{P} \times \dot{\boldsymbol{X}}_A\,.$$

Le equazioni globali in genere non determinano il moto del sistema di punti materiali.
Sotto le ipotesi opportune sulle forze interne, le equazioni globali valgono ancora se in $\boldsymbol{F}$ e $\boldsymbol{M}_A$ si tiene conto solo delle forze esterne.
Energia cinetica del sistema.
Sistemi di forze conservative $\boldsymbol{F}_i$, cioè tali che

$$\boldsymbol{F}_i = \nabla_{\boldsymbol{x}_i} U(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n)\,.$$

Esempio 14.2. Due punti che si attraggono a vicenda con forze elastiche. □

Conservazione dell'energia, anche in presenza di ulteriori forze che non fanno lavoro.

Esempio 14.3. Potenziale del sistema di due masse puntiformi che si attraggono con attrazione gravitazionale e sono attratte da una terza massa esterna al sistema (posta nell'origine):

$$U(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = \gamma m_1 m_2 \frac{1}{|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2|} + \gamma m_1 M \frac{1}{|\boldsymbol{x}_1|} + \gamma m_2 M \frac{1}{|\boldsymbol{x}_2|}\,.$$

□

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 5.1, 5.2.

15. Giovedì 24/10/2019
(Aula 14: 14-17)

Esempi di vincoli per un singolo moto: superficie, curva come intersezione di due superficie.
Calcolo dei gradi di libertà.
Superfici come superfici di livello di funzioni. Idea dell'intersezione non tangente, ossia dei due gradienti delle funzioni non paralleli.
Cono: non è regolare nel vertice (ove il gradiente della funzione che ha il cono come superficie di livello si annulla).
Altri vincoli per due punti.
Vincoli in generale.
Teorema del Dini (s.d.).
Vincolo di parallelismo per due moti (4 gradi di libertà); una delle componenti del prodotto vettoriale (che devono essere tutte nulle) risulta combinazione lineare delle altre.

Esercizio 15.1. 9/560. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 5.3, 5.4, 5.5.

16. Lunedì 28/10/2019
(Aula 14: 14-16:30)

Definizione di vincolo olonomo regolare. Spazio delle configurazioni compatibili. Numero dei gradi di libertà.
Coordinate indipendenti e dipendenti.

Esempio 16.1. Un punto soggetto ai vincoli

$$z_3 - az_1z_2 = 0\,, \qquad z_3 - bt = 0\,.$$

Il vincolo è olonomo regolare tranne in $t = 0$. □

Coordinate lagrangiane e rappresentazione lagrangiana del moto. Moto lagrangiano. Velocità in coordinate lagrangiane. Il vettore $\dot{\boldsymbol{q}}$ può assumere qualunque valore.

Per casa 16.2. Mostrare che le coordinate indipendenti sono anche coordinate lagrangiane. □

Esempio 16.3. Longitudine e colatitudine come coordinate lagrangiane sulla sfera. □

Esempio 16.4. Esempio di un punto vincolato a una sfera di raggio variabile e di un punto vincolato a essere allineato con il primo e con l'origine. □

Esercizio 16.5. 16/620. □

Per casa 16.6. 17, 21, 26/620. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 5.6, 5.7, 6.1.

17. Martedì 29/10/2019
(Aula 14: 16-18)

Definizione di spazio tangente al vincolo. Ne segue (per la formula di Taylor) che lo spazio tangente è il sottospazio di $\boldsymbol{R}^{n_c}$ generato dai vettori derivata

$$\frac{\partial \boldsymbol{z}^{\mathrm{L}}}{\partial q_h}\,, \qquad h = 1\,, \dots \ell\,.$$

Definizione di $V^{\perp}$.

Teorema 17.1. (s.d.) *Se $V \subset \boldsymbol{R}^N$ è un sottospazio, allora $V^{\perp}$ è un sottospazio di $\boldsymbol{R}^N$, vale* $\dim V + \dim V^{\perp} = N$ *e* $(V^{\perp})^{\perp} = V$, $V \cap V^{\perp} = \{0\}$.

Corollario 17.2. (s.d.) *Per ogni $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^N$ esistono unici $[\boldsymbol{x}]_{\parallel} \in V$, $[\boldsymbol{x}]_{\perp} \in V^{\perp}$ tali che $\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{x}]_{\parallel} + [\boldsymbol{x}]_{\perp}$.*

Esempio 17.3. Calcolo di $V^{\perp}$ per 1) $V = \langle(0,1,2)\rangle \subset \boldsymbol{R}^3$; 2) $V = \langle(0,1,0,0,0,0,0),(1,0,1,1,0,0,0)\rangle \subset \boldsymbol{R}^7$. □

Atti di moto.
Vale per ogni $j \in \{1\,, \dots\,, \ell\}$, $k \in \{1\,, \dots\,, m\}$

$$\nabla_{\boldsymbol{z}}\, f_k \cdot \frac{\partial \boldsymbol{z}^{\mathrm{L}}}{\partial q_j} = 0\,.$$

Definizione di spazio normale come sottospazio di $\boldsymbol{R}^{n_c}$ generato dai $\nabla_{\boldsymbol{z}}\, f_k$.

Teorema 17.4. *Lo spazio normale è l'ortogonale dello spazio tangente.*

In particolare lo spazio tangente è indipendente dalla parametrizzazione lagrangiana.

Esercizio 17.5. 26/620. □

Per casa 17.6. Calcolare spazio normale e tangente per i vincoli: 1) due punti vincolati a stare alla stessa quota; 2) un punto vincolato al piano mobile

$$-x_1 \sin(\alpha t) + x_2 \cos(\alpha t) = 0\,,$$

ove $\alpha > 0$ è costante. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 6.2, 6.3.

18. Giovedì 31/10/2019
(Aula 14: 14-17)

Teorema 18.1. *Gli atti di moto costituiscono lo spazio affine*

$$V_{\boldsymbol{z},t}\boldsymbol{f} + \frac{\partial \boldsymbol{z}^{\mathrm{L}}}{\partial t}\,.$$

Spostamenti virtuali e effettivi, e loro significato. Coincidono per i vincoli fissi.
Il metodo dei moltiplicatori di Lagrange è conseguenza della scomposizione dello spazio nei sottospazi normale e tangente ai vincoli.

Esercizio 18.2. Spostamenti virtuali e effettivi per il vincolo ($n_c = 3$, $m = 1$)

$$-z_1 \sin(\alpha t) + z_2 \cos(\alpha t) = 0\,,$$

ove $\alpha > 0$, $t \in \boldsymbol{R}$. □

Esempio 18.3. Sistema vincolato di due punti, con $n_c = 6$, $m = 1$,

$$f_1(z_1, \dots, z_6) = 2z_1 - z_4 = 0\,.$$

Inoltre le forze sono $\boldsymbol{F}_1 = \alpha_1 \boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{F}_2 = \alpha_2 \boldsymbol{e}_1$.
Equazioni di moto; ipotesi sulle reazioni vincolari $\mathbf{f}_{\mathrm{vin}} \in N_{\boldsymbol{z},t}\boldsymbol{f}$.
Soluzione esplicita quando le condizioni iniziali sono $\boldsymbol{z}(0) = 0$, $\dot{\boldsymbol{z}}(0) = 0$.
La $\mathbf{f}_{\mathrm{vin}} = {\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}}^1 + {\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}}^2$ fa lavoro complessivo nullo, ma ciascuna ${\mathbf{f}_{\mathrm{vin}}}^i$ fa lavoro non nullo sul moto $\boldsymbol{X}_i$. □

Ipotesi dei lavori virtuali (ILV).

Esercizio 18.4. 5/120; 10, 24/620 □

Per casa 18.5. 59/620.
10/620 con scelta delle coordinate lagrangiane come l'anomalia del primo punto e la differenza delle anomalie dei due punti. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 6.3, 6.4, 7.1, 7.2.

19. Lunedì 04/11/2019
(Aula 14: 14-17)

L'ipotesi dei lavori virtuali.

Teorema 19.1. *L'ipotesi dei lavori virtuali determina il moto.*

Energia cinetica T^{L} in forma lagrangiana.

Teorema 19.2. *Vale*

$$T^{\mathrm{L}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{p}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{p} + \boldsymbol{b}_1 \cdot \boldsymbol{p} + b_0 \,.$$

$\boldsymbol{\mathcal{A}}$ *è la matrice simmetrica e definita positiva data da*

$$a_{hk} = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\partial \boldsymbol{X}_i^{\mathrm{L}}}{\partial q_h} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{X}_i^{\mathrm{L}}}{\partial q_k} \,,$$

e $\boldsymbol{b}_1$ *e* b_0 *si annullano se* $\partial \boldsymbol{z}^{\mathrm{L}}/\partial t = 0$.

Lemma 19.3. *Valgono*

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}_i^{\mathrm{L}}}{\partial p_h}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t) = \frac{\partial \boldsymbol{X}_i^{\mathrm{L}}}{\partial q_h}(\boldsymbol{q}, t) \,,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\frac{\partial \boldsymbol{X}^{\mathrm{L}}}{\partial q_h}(\boldsymbol{q}(t), t)\Big) = \frac{\partial \boldsymbol{v}_i^{\mathrm{L}}}{\partial q_h}(\boldsymbol{q}(t), \dot{\boldsymbol{q}}(t), t) \,.$$

Notazione

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_h} = \frac{\partial}{\partial p_h} \,.$$

Le componenti lagrangiane delle forze Q_h.

Teorema 19.4. (Equazioni di Lagrange) *Le* ℓ *equazioni*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\frac{\partial T^{\mathrm{L}}}{\partial \dot{q}_h}\Big] - \frac{\partial T^{\mathrm{L}}}{\partial q_h} = Q_h \,, \quad h = 1\,, \dots\,, \ell\,,$$

sono equivalenti all'ipotesi dei lavori virtuali.

Esercizio 19.5. 1/620 (con le equazioni di Lagrange); 59, 57/620. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 7.3, 7.5, 7.6.

20. Martedì 05/11/2019 (Aula 14: 16-18)

Forze conservative e componenti lagrangiane delle forze.

Teorema 20.1. *Se il sistema di punti materiali è soggetto a sollecitazioni conservative di potenziale $U(\boldsymbol{z})$, si ha*

$$Q_h = \frac{\partial}{\partial q_h}[U(\boldsymbol{z}^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}, t))]\,, \qquad h = 1\,, \dots\,, \ell\,.$$

Se i vincoli sono mobili l'energia in genere non si conserva anche se le forze direttamente applicate sono conservative.
Definizione di potenziale lagrangiano e forze conservative in senso lagrangiano.

Per casa 20.2. Se nella definizione di forze conservative (in senso tradizionale) si permettesse al potenziale di dipendere dal tempo, l'energia non si conserverebbe. □

Teorema 20.3. *Se i vincoli sono fissi e il sistema di punti materiali è soggetto a sollecitazioni conservative di potenziale $U(\boldsymbol{z})$, l'energia*

$$T^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) - U(\boldsymbol{z}^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}))\,,$$

si conserva lungo un moto lagrangiano che soddisfa l'ipotesi dei lavori virtuali.

Definizione di lagrangiana.
Equazioni di Lagrange in forma conservativa.

Esercizio 20.4. 7/620;
Un punto materiale soggetto al peso, vincolato a una circonferenza ruotante intorno al suo diametro verticale con velocità angolare costante $\alpha > 0$. □

Per casa 20.5. 32, 57/620; 1, 6, 9/630. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 8.1, 8.2.

21. Giovedì 07/11/2019
(Aula 14: 14-17)

Teorema 21.1. *Consideriamo un sistema di punti materiali vincolato da vincoli olonomi fissi, con componenti lagrangiane delle forze conservative in senso lagrangiano e* $U^{\mathrm{L}} = U^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q})$*. Allora se*

$$\frac{\partial U^{\mathrm{L}}}{\partial q_h}(\boldsymbol{q}_0) = 0 \,, \qquad h = 1 \,, \dots \,, \ell \,,$$

la funzione costante $\boldsymbol{q}(t) = \boldsymbol{q}_0$ *risolve le equazioni di Lagrange.*

Teorema 21.2. *Nelle ipotesi del teorema precedente, se inoltre le forze direttamente applicate sono conservative in senso tradizionale, e* $\boldsymbol{q}_0$ *è un punto di massimo isolato per* U^{L}*, allora è di equilibrio stabile.*

Per casa 21.3. 38, 39, 41, 44/660. □

Basi ortonormali. Matrici di cambiamento di base $\boldsymbol{\Gamma}_{\mathcal{M}\mathcal{N}}$. Si ha $\boldsymbol{\Gamma}_{\mathcal{M}\mathcal{N}} = {\boldsymbol{\Gamma}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}}^{\mathrm{t}}$.

Teorema 21.4. *Se* $\boldsymbol{a}$ *ha componenti* $\boldsymbol{\lambda}$ *in* $\mathcal{M}$ *e* $\boldsymbol{\mu}$ *in* $\mathcal{N}$*, allora* $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\Gamma}_{\mathcal{M}\mathcal{N}}\boldsymbol{\mu}$*,* $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\Gamma}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}\boldsymbol{\lambda}$*.*

Definizione di matrice ortogonale.

Teorema 21.5. *Le matrici di cambiamento di base sono ortogonali:* $\boldsymbol{\Gamma}_{\mathcal{M}\mathcal{N}} = (\boldsymbol{\Gamma}_{\mathcal{N}\mathcal{M}})^{-1}$*. Quindi il loro determinante ha valore assoluto pari a* 1*.*

Definizione di base ortonormale positiva.

Teorema 21.6. *Composizione delle matrici del cambiamento di base:* $\boldsymbol{\Gamma}_{\mathcal{M}\mathcal{P}} = \boldsymbol{\Gamma}_{\mathcal{M}\mathcal{N}}\boldsymbol{\Gamma}_{\mathcal{N}\mathcal{P}}$*.*

Caratterizzazione delle matrici ortogonali in $\boldsymbol{R}^2$. Prodotto triplo in $\boldsymbol{R}^3$.

Teorema 21.7. *Se* $(\boldsymbol{u}_h)$ *è una base ortonormale positiva di* $\boldsymbol{R}^3$*, allora*

$$\boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u}_3 \,, \quad \boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_3 = -\boldsymbol{u}_2 \,, \quad \boldsymbol{u}_2 \times \boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{u}_1 \,.$$

Corollario 21.8. *Se* $(\boldsymbol{u}_h)$ *è una base ortonormale positiva,*

$$\boldsymbol{a} = \sum_{h=1}^{3} \alpha_h \boldsymbol{u}_h \,, \quad \boldsymbol{b} = \sum_{h=1}^{3} \beta_h \boldsymbol{u}_h \,, \quad \textit{si ha} \quad \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{u}_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} \,.$$

Definizione di sistema di riferimento in $\boldsymbol{R}^3$. Cambiamento di coordinate.
Definizione di sistema di riferimento mobile in $\boldsymbol{R}^3$.
Moto $\boldsymbol{X}(t) = (L + ct)\boldsymbol{e}_1$ nel sistema mobile $\mathcal{S}$ con origine mobile nell'origine del sistema fisso e base ruotante intorno all'asse $\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{u}_3$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \cos(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_2 \,, \\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_1 + \cos(\alpha t)\, \boldsymbol{e}_2 \,, \\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3 \,. \end{aligned}$$

Per casa 21.9. 1) Calcolare le derivate $\mathrm{d}\boldsymbol{u}_h/\,\mathrm{d}t$ nel caso dell'Esempio precedente.
2) Siano, nel caso di un sistema mobile generico, $\boldsymbol{X}_1$, $\boldsymbol{X}_2$ due moti con coordinate mobili costanti. Dimostrare che $|\boldsymbol{X}_1(t) - \boldsymbol{X}_2(t)|$ si mantiene costante. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 8.4, 9.1, 10.1, 10.2.

22. Lunedì 11/11/2019
(Aula 14: 14-17)

Idea di velocità relativa.
Definizione di derivata relativa a una terna mobile. Regole di derivazione.
Velocità e accelerazione relativa a un sistema di riferimento mobile. Loro rappresentazione in componenti.
Funzioni vettoriali costanti in una terna mobile; moti solidali con un sistema di riferimento mobile.

Esercizio 22.1. Due moti solidali mantengono costante la distanza tra di loro. □

Teorema 22.2. *Data una terna mobile* $(\boldsymbol{u}_h)$ *esiste unica funzione* $\boldsymbol{\omega}$ *tale che*

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_h}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{u}_h \,, \qquad h = 1\,,2\,,3\,.$$

$\boldsymbol{\omega}$ si dice velocità angolare della terna.

Esempio 22.3. 1) La terna

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \cos\varphi(t)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi(t)\,\boldsymbol{e}_2\,, \\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sin\varphi(t)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi(t)\,\boldsymbol{e}_2\,, \\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\,, \end{aligned}$$

ha $\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\boldsymbol{e}_3$.
2) Se

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \alpha(t)\boldsymbol{u}_3\,, \qquad \boldsymbol{u}_h(0) = \boldsymbol{e}_h\,,$$

allora siamo nel caso precedente con $\varphi(t) = \int_0^t \alpha(\tau)\,\mathrm{d}\tau$. □

Per casa 22.4. Trovare $\boldsymbol{\omega}$ per rotazioni intorno a $\boldsymbol{e}_1$ e $\boldsymbol{e}_2$. □

Teorema 22.5. *Per ogni* $\boldsymbol{a} \in C^1(I)$ *si ha*

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t} = \left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{M}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{a}\,.$$

Teorema del moto relativo sulla scomposizione della velocità nel sistema fisso. Velocità di trascinamento.
Teorema di Coriolis sulla scomposizione dell'accelerazione nel sistema fisso. Accelerazione di trascinamento e di Coriolis.

Esercizio 22.6. Epicicli: quando un moto circolare uniforme in un sistema mobile la cui origine si muove a sua volta di moto circolare uniforme, e la base è fissa, può avere istanti di arresto.
4, 26/340. □

Per casa 22.7. 1) Trovare la accelerazione di Coriolis per un moto nel sistema di riferimento terrestre, con velocità diretta lungo il parallelo e lungo il meridiano.
2) Completare il seguente versore in una base mobile e calcolarne la velocità angolare:

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{\cos(\alpha t)}{\sqrt{2}}\boldsymbol{e}_1 + \frac{\sin(\alpha t)}{\sqrt{2}}\boldsymbol{e}_2 + \frac{\boldsymbol{e}_3}{\sqrt{2}}\,.$$

3) 5, 18, 23, 31/340. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 10.3, 10.4, 10.5.

23. Martedì 12/11/2019
(Aula 14: 16-18)

Teorema 23.1. *La velocità angolare di $\mathcal{M}$ è costante in $\mathcal{M}$ se e solo se è costante; ha direzione costante in $\mathcal{M}$ se e solo se ha direzione costante.*

Definizione di rotazione e rotazione costante per una terna.
Definizione di traslazione di un sistema di riferimento. Definizione di moto polare e rotazione (e rotazione costante) per un sistema mobile di riferimento.
Velocità angolare relativa di una terna mobile rispetto a un'altra.

Teorema 23.2. *Date due terne mobili $\mathcal{N}$ e $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_h)$ esiste un'unica $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}$ tale che*

$$\left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_h}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{N}} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}} \times \boldsymbol{u}_h \,.$$

Teorema 23.3. *Per ogni $\boldsymbol{a} \in C^1(I)$ si ha*

$$\left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{N}} = \left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{M}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}} \times \boldsymbol{a} \,.$$

Dalla definizione segue $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{M}\mathcal{M}} = 0$, $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}} = -\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{M}\mathcal{N}}$.

Teorema 23.4. *Se $\mathcal{P}$, $\mathcal{N}$, $\mathcal{M}$ sono terne mobili, vale*

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{P}\mathcal{M}} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{P}\mathcal{N}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}} \,.$$

Esempio 23.5. Precessioni regolari: la composizione di due rotazioni costanti non è una rotazione costante. □

Esercizio 23.6. 6, 15/340. □

Per casa 23.7. 7, 8, 9, 13, 29, 34, 35/340. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 10.6, 10.7.

24. Giovedì 14/11/2019
(Aula 14: 14-17)

Dinamica in un sistema mobile; forze apparenti di Coriolis e di trascinamento. Vincoli regolari nel sistema fisso rimangono regolari nel mobile (ma possono passare da fissi a mobili o viceversa). Le coordinate lagrangiane sono ammissibili in un sistema se lo sono nell'altro.

Esempio 24.1. Equazioni di Lagrange per punto materiale vincolato a piano ruotante. □

Teorema 24.2. *La forza di Coriolis ha componenti lagrangiane nulle se nel sistema mobile i vincoli sono fissi e* $\ell = 1$.

Teorema 24.3. *La forza di Coriolis ha componenti lagrangiane nulle se nel sistema mobile i moti sono vincolati a un piano solidale cui appartiene anche la velocità angolare.*

Le formule di Frenet-Serret. La velocità angolare della terna intrinseca di una curva descritta da un moto di legge oraria $s(t)$.

Esercizio 24.4. 15, 25/630. □

Per casa 24.5. 32/330.
17, 29, 37, 47/630. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 10.8, 12.1, 12.2, 12.4.

25. Lunedì 18/11/2019
(Aula 14: 14-17)

Vincoli di rigidità per n moti $\boldsymbol{X}_i$. Numero dei gradi di libertà per 3 moti non allineati ($\ell = 6$).
Prodotto scalare nella forma:

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \frac{1}{2}|\boldsymbol{a}|^2 + \frac{1}{2}|\boldsymbol{b}|^2 - \frac{1}{2}|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}|^2 .$$

Teorema 25.1. *Risultano costanti nel tempo le quantità:*

$$(\boldsymbol{X}_j - \boldsymbol{X}_i) \cdot (\boldsymbol{X}_k - \boldsymbol{X}_h) ,$$
$$|(\boldsymbol{X}_j - \boldsymbol{X}_i) \times (\boldsymbol{X}_k - \boldsymbol{X}_h)| .$$

Teorema 25.2. *Per ogni $r \geq 4$ esistono $\lambda_h \in \boldsymbol{R}$ costanti tali che*

$$\boldsymbol{X}_r(t) - \boldsymbol{X}_1(t) = \sum_{h=1}^{3} \lambda_h \boldsymbol{u}_h(t) , \qquad t \in I .$$

Qui $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{X}_2 - \boldsymbol{X}_1$, $\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{X}_3 - \boldsymbol{X}_1$, $\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_2$.

Dunque $\ell = 6$ per ogni $n \geq 3$. Significato intuitivo.
Sistema rigido non degenere. Sistema di riferimento solidale.
Angoli di Eulero.

Per casa 25.3. Velocità angolare nella forma

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\phi}\boldsymbol{e}_3 + \dot{\theta}\boldsymbol{w}_1 + \dot{\psi}\boldsymbol{u}_3 .$$

□

Corpo rigido degenere rettilineo.

Teorema 25.4. *Dato un versore $\boldsymbol{u} \in C^1(I)$ esiste unico $\boldsymbol{\omega}$ tale che*

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{u} , \qquad \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{u} = 0 .$$

Esercizio 25.5. 28, 29/340. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 6.5, 6.6, 13.1, 13.2, 13.3.

26. Martedì 19/11/2019 (Aula 14: 16-18)

Corpi rigidi continui (e non continui). Distribuzioni di massa: solidi, superfici, curve, punti isolati.
Definizione di corpo rigido non degenere e degenere rettilineo.
Massa.

Esempio 26.1. Massa di una lamina quadrata $C = [0, L] \times [0, L]$ nei due casi diversi di densità

$$1) \quad \rho(\lambda_1, \lambda_2)\,\mathrm{d}\lambda_1\,\mathrm{d}\lambda_2\,, \quad \rho(\lambda_1, \lambda_2) = \rho_0\,, \quad (\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0)\,, \quad \rho(0, 0) = \rho_1\,;$$
$$2) \quad \rho(\lambda_1, \lambda_2)\,\mathrm{d}\mu = \rho_0\,\mathrm{d}\lambda_1\,\mathrm{d}\lambda_2 + \rho_1\,\mathrm{d}\delta_O\,.$$

□

Moti solidali al rigido $\boldsymbol{X}(t, \boldsymbol{\lambda})$. Scomposizione

$$\boldsymbol{X}(t, \boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{X}_O(t) + \sum_{h=1}^{3} \lambda_h \boldsymbol{u}_h(t)\,.$$

Campo della velocità di trascinamento del sistema solidale $\boldsymbol{V}_{\mathrm{T}}$.
Definizione di moto del centro di massa $\boldsymbol{X}_G$.

Teorema 26.2. *($\boldsymbol{X}_G$ è solidale) Si ha $\boldsymbol{X}_G(t) = \boldsymbol{X}(t, \boldsymbol{\lambda}_G)$, con*

$$\boldsymbol{\lambda}_G = \frac{1}{m} \int_C \boldsymbol{\lambda} \rho(\boldsymbol{\lambda})\,\mathrm{d}\mu\,.$$

Teorema 26.3. *(additività)* (s.d.) *Se $C = C_1 \cup C_2$, con $\int_{C_1 \cap C_2} \rho\,\mathrm{d}\mu = 0$, allora*

$$\boldsymbol{\lambda}_G = \frac{m_1}{m} \boldsymbol{\lambda}_{G_1} + \frac{m_2}{m} \boldsymbol{\lambda}_{G_2}\,,$$

con m_i e G_i rispettivamente massa e centro di massa di C_i.

Definizione di piano di simmetria materiale ortogonale.

Teorema 26.4. (s.d.) *Se Π è di simmetria materiale ortogonale per C allora $\boldsymbol{\lambda}_G \in \Pi$.*

Per casa 26.5. Sia $C = \{\boldsymbol{X}_1, \dots, \boldsymbol{X}_n\}$, con ciascun $\boldsymbol{X}_i$ di massa m_i. Allora $\boldsymbol{\lambda}_G$ è l'unico punto di minimo di

$$f(\boldsymbol{\lambda}) = \sum_{i=1}^{n} m_i |\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_i|^2\,.$$

□

Definizione di quantità di moto e momento delle quantità di moto di polo Z.
Momento delle quantità di moto in cui si sostituisce la formula della velocità di trascinamento.
Definizione del tensore d'inerzia $\boldsymbol{\sigma}_Z$ di polo Z.

Esercizio 26.6. 66/620. □

Per casa 26.7. 1) Si calcoli $\boldsymbol{\sigma}_Z$ per il rigido degenere (asta ruotante)

$$\boldsymbol{X}(t, \boldsymbol{\lambda}) = \lambda(\cos\varphi(t)\boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi(t)\boldsymbol{e}_2)\,,$$

$0 \le \lambda \le L$, omogenea di massa m.
2) 61/620; 65, 67/630. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 14.1, 14.2, 14.3.

27. Giovedì 21/11/2019
(Aula 14: 14-17)

Formula delle velocità dei moti solidali:

$$\boldsymbol{v}_A - \boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{X}_A - \boldsymbol{X}_B)\,,$$

per tutti i moti $\boldsymbol{X}_A$, $\boldsymbol{X}_B$ solidali.

Teorema 27.1. *Vale per ogni moto $\boldsymbol{X}_Z$*

$$\boldsymbol{L}_Z = \boldsymbol{\sigma}_Z \boldsymbol{\omega} + m(\boldsymbol{X}_G - \boldsymbol{X}_Z) \times \boldsymbol{V}_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{X}_Z, t)\,.$$

In particolare $\boldsymbol{L}_Z = \boldsymbol{\sigma}_Z \boldsymbol{\omega}$ se $\boldsymbol{X}_G = \boldsymbol{X}_Z$ o se $\boldsymbol{X}_Z$ è sia fisso che solidale.

Calcolo degli elementi della matrice di inerzia in un sistema qualunque. La matrice è simmetrica. Definizione di momenti di inerzia e deviatori.

Teorema 27.2. *Le quantità $\boldsymbol{\sigma u} \cdot \boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{\sigma u} \cdot \boldsymbol{w}$ (con $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w} = 0$) espresse in funzione di distanze da rette e piani (mediante integrali).*

Corollario 27.3. *La $\boldsymbol{\sigma}$ è definita positiva se il corpo è non degenere, e semidefinita positiva nel caso dell'asta rigida.*

Momenti d'inerzia e deviatori possono dipendere dal tempo. Però:

Teorema 27.4. *Se $\mathcal{M}$ e $\boldsymbol{X}_Z$ sono solidali con il corpo rigido, allora la matrice $\boldsymbol{\sigma}_Z^{\mathcal{M}}$ è costante nel tempo.*

Esercizio 27.5. 1) Calcolo di $\boldsymbol{\sigma}$ per l'asta rigida.
2) 23/340.
3) 67/630.
4) Calcolo di $\boldsymbol{\sigma}$ per il disco omogeneo. □

Per casa 27.6. 17, 24/330. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 14.3, 14.4.

28. Lunedì 25/11/2019
(Aula 14: 14-17)

Distribuzioni di forze su un corpo rigido. Per il corpo rigido degenere rettilineo si deve assumere che la distribuzione di forze si annulli fuori della retta del corpo, per il punto materiale che sia concentrata solo sul punto.
Risultante e momento risultante delle forze.
Equazioni globali per un corpo rigido. Forze esterne.

Teorema 28.1. *Le due equazioni globali determinano il moto di un corpo rigido.*

Autovettori e autovalori. Definizione di vettori principali di inerzia, assi principali di inerzia, terne principali di inerzia.

Teorema 28.2. *Sia $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_h)$ una terna ortonormale. Allora se $\boldsymbol{u}_1$ è principale si ha $I_{12} = I_{13} = 0$ e I_{11} è l'autovalore di $\boldsymbol{u}_1$.*

Teorema 28.3. *Sia C un rigido non degenere. In ogni punto esiste una terna ortonormale principale, che rende la matrice di $\boldsymbol{\sigma}$ diagonale. Se $\boldsymbol{X}_Z$ è un moto solidale, esiste una base solidale principale $\mathcal{M}$ in $\boldsymbol{X}_Z$ (ossia tale che $\boldsymbol{\sigma}_Z^{\mathcal{M}}$ sia diagonale e costante).*

Proprietà di minimo e massimo dei momenti principali.

Teorema 28.4. *1) Dati due versori ortogonali principali, il loro prodotto vettoriale è principale.*
2) Se in un punto tutti i momenti d'inerzia principali sono uguali, tutti i vettori sono principali in quel punto.
3) Se in un punto due momenti d'inerzia principali sono uguali, tutti i versori del piano generato dai due versori principali corrispondenti sono principali.

Ricerca di assi principali (s.d.):
traslabilità di terne principali centrali lungo gli assi;
teorema di Huygens;
la normale a un piano di simmetria materiale ortogonale è principale (in un punto del piano).
Applicazioni a corpi piani e di rotazione.

Per casa 28.5. Determinare la terna principale in un vertice di un quadrato e di un rettangolo. □

Esercizio 28.6. 29/330. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 14.5, 14.6, 15.1, 15.3, 15.4.

29. Martedì 26/11/2019
(Aula 14: 16-18)

Supponiamo che l'origine O del sistema solidale con il rigido non degenere sia fissa o coincida con il centro di massa.

Teorema 29.1. (Equazioni di Eulero) *Vale*

$$\boldsymbol{\sigma}_O\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\sigma}_O\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{M}_O^{\text{ext}} . \tag{29.1}$$

Corollario 29.2. *In componenti, in una terna principale* $(\boldsymbol{u}_h)$, *denotando*

$$\boldsymbol{\omega} = \sum_{h=1}^{3} \omega_h \boldsymbol{u}_h , \qquad \boldsymbol{M}_O^{\text{ext}} = \sum_{h=1}^{3} M_h \boldsymbol{u}_h ,$$

la (29.1) *equivale a*

$$\begin{aligned} I_{11}\dot{\omega}_1 &= (I_{22} - I_{33})\omega_2\omega_3 + M_1 , \\ I_{22}\dot{\omega}_2 &= (I_{33} - I_{11})\omega_1\omega_3 + M_2 , \\ I_{33}\dot{\omega}_3 &= (I_{11} - I_{22})\omega_1\omega_2 + M_3 . \end{aligned}$$

Le equazioni di Eulero in genere sono accoppiate con la I equazione globale.
Nel caso del moto polare determinano il moto. Sono sempre un sistema del II ordine negli angoli di Eulero, e possono essere considerate un sistema nelle ω_h se $\boldsymbol{M}_O^{\text{ext}}$ dipende dalle ω_h e da t.

Teorema 29.3. *Sia O fisso.*
Se il moto è una rotazione intorno a un asse principale allora $\boldsymbol{M}_O^{\text{ext}}$ *è parallelo all'asse di rotazione.*
Se viceversa $\boldsymbol{M}_O^{\text{ext}}$ *è parallelo a un asse principale, il moto è di rotazione intorno a quell'asse per le opportune condizioni iniziali.*

Teorema 29.4. *Sia O fisso.*
Se il moto è una rotazione intorno a un asse non principale, allora il momento $\boldsymbol{M}_O^{\text{ext}}$ *ha componente ortogonale all'asse non nulla in ogni istante in cui* $\boldsymbol{\omega}(t) \neq 0$.

Motivazione della denominazione di momenti deviatori.

Esercizio 29.5. 1, 60/450. □

Per casa 29.6. 3, 17, 64, 77/450. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 15.5, 15.6.

30. Giovedì 28/11/2019 (Aula 14: 14-17)

Teorema 30.1. *Vale per un corpo rigido C e un moto $\boldsymbol{X}_Z$*

$$T(t) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_Z\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega} + \frac{m}{2}|\boldsymbol{V}_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{X}_Z, t)|^2 + m\boldsymbol{V}_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{X}_Z, t)\cdot\boldsymbol{\omega}\times[\boldsymbol{X}_G - \boldsymbol{X}_Z]\,.$$

Corollario 30.2. (König)

$$T(t) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_G\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega} + \frac{m}{2}|\boldsymbol{v}_G|^2\,.$$

Corollario 30.3. *In un moto polare di polo Z*

$$T(t) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_Z\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega}\,.$$

Teorema 30.4. *In un moto polare di polo Z*

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M}_Z^{\mathrm{ext}}\cdot\boldsymbol{\omega}\,.$$

Moti polari per inerzia di polo O.

Teorema 30.5. *In un moto polare per inerzia valgono gli integrali primi:*
1) $\boldsymbol{L}_O(t) = \boldsymbol{\sigma}_O\boldsymbol{\omega}(t) = \boldsymbol{L}(t_0)$.
2) $T(t) = \boldsymbol{\sigma}_O\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega}/2 = T(t_0)$.

Per casa 30.6. Dimostrare che da $\boldsymbol{\sigma}_O\boldsymbol{\omega}$ costante non segue che $\boldsymbol{\omega}$ è costante. □

Il vettore $\boldsymbol{\sigma}_O\boldsymbol{\omega}$ è costante nella terna fissa ma in genere non solidale al rigido. Se $\boldsymbol{\omega}(t) \neq 0$ per un t allora non si annulla mai. Le rotazioni uniformi intorno a assi principali sono moti polari per inerzia.

Teorema 30.7. *Se C si muove di moto polare per inerzia, e di rotazione, allora la rotazione è uniforme e l'asse di rotazione è principale d'inerzia.*

Esercizio 30.8. 26, 35/450. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 15.7, 15.8.

31. Lunedì 02/12/2019
(Aula 14: 14-17)

Ellissoide d'inerzia solidale e mobile. Normale all'ellissoide.

Teorema 31.1. (Moto alla Poinsot) *Consideriamo un corpo rigido non degenere che si muove di moto polare per inerzia di polo O. Allora l'ellissoide d'inerzia mobile si muove rotolando senza strisciare su un piano fisso, che ha normale $\boldsymbol{L}_O(t)$.*

Definizioni di poloidi ed erpoloidi. Rotazioni per inerzia stabili e instabili. Moti per inerzia non periodici (corrispondono alle 4 polodie separatrici).

Per casa 31.2. Determinare tutte le polodie nei casi di ellissoide di rotazione e sferico. ☐

Sistemi di corpi rigidi vincolati. Coordinate locali.
Moti solidali a un corpo rigido del sistema; velocità di moti solidali in forma lagrangiana; energia cinetica del sistema.
Ipotesi dei lavori virtuali.

Teorema 31.3. (s.d.) *Le equazioni date dall'ipotesi dei lavori virtuali determinano il moto.*

Esercizio 31.4. 47/620. ☐

Per casa 31.5. 20, 44, 51/620. ☐

Le equazioni di Lagrange per sistemi di corpi rigidi.

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 15.8, 15.9, 16.1, 16.2.

32. Giovedì 05/12/2019

(Aula 14: 14-17)

Piccole oscillazioni in punti di equilibrio, con hessiana del potenziale definita negativa, per sistemi vincolati da vincoli olonomi fissi e soggetti a forze conservative.
Energia cinetica ridotta, potenziale ridotto, lagrangiana ridotta.
Il caso 1-dimensionale: moto armonico.
Equazioni di Lagrange delle piccole oscillazioni nel caso $\ell > 1$:

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}\ddot{\boldsymbol{q}} - \boldsymbol{\mathcal{U}}\boldsymbol{q} = 0\,.$$

Ricerca delle frequenze delle piccole oscillazioni con la sostituzione $\boldsymbol{q}(t) = \boldsymbol{q}_0 \cos(\omega t + \varphi)$; equazione $\det(\omega^2 \boldsymbol{\mathcal{A}} + \boldsymbol{\mathcal{U}}) = 0$.
Teorema di diagonalizzazione contemporanea di due forme quadratiche (s.d.).
Teorema di esistenza delle coordinate normali.
La composizione di moti normali non è necessariamente periodica; condizione dei periodi commensurabili.

Esercizio 32.1. 6/680, 51/330, 47/630. □

Per casa 32.2. 10, 11/680. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 9.2, 9.3.

33. Lunedì 09/12/2019

(Aula 14: 14-17)

Lemma 33.1. *Siano $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}^3$, $\boldsymbol{a} \neq 0$; allora*

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = -|\boldsymbol{a}|^2 \, [\boldsymbol{b}]_{\perp}\,.$$

Campo della velocità di trascinamento $\boldsymbol{V}_{\mathrm{T}}$ come campo delle velocità dei moti solidali con un sistema di riferimento mobile.

Teorema 33.2. *Per ogni $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2 \in \boldsymbol{R}^3$ si ha*

$$\boldsymbol{V}_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_1, t) - \boldsymbol{V}_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_2, t) = \boldsymbol{\omega}(t) \times (\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2)\,.$$

In particolare $\boldsymbol{V}_{\mathrm{T}}$ è costante sulle rette parallele a $\boldsymbol{\omega}(t) \neq 0$.

Studio del campo $\boldsymbol{V}_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}, t)$. Centro istantaneo di moto, asse di istantanea rotazione o istantaneo di moto (o di Mozzi). Atto di moto elicoidale. Atto di moto traslatorio o istantanea traslazione.
Teorema di Chasles.

Esercizio 33.3. 28/660; 44, 58/620. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 11.1.

34. Martedì 10/12/2019
(Aula 14: 16-18)

Le rigate del moto: fissa, solidale, mobile.
Definizione di contatto di rotolamento puro.
Il contatto della rigata fissa con quella mobile sull'asse istantaneo di moto è di rotolamento puro se e solo se la componente parallela (a $\boldsymbol{\omega}$) della velocità di trascinamento è nulla.

Esempio 34.1. Caso di $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}_O, (\boldsymbol{u}_h))$ con $\boldsymbol{X}_O(t) = ct\boldsymbol{e}_1$ e $(\boldsymbol{u}_h)$ data dalla rotazione di velocità angolare $\boldsymbol{\omega}(t) = \alpha\boldsymbol{u}_3 = \alpha\boldsymbol{e}_3$, α, $c > 0$. □

Moti rigidi piani; il piano rappresentativo è costante e solidale. Le rigate sono cilindri. Base e rulletta.

Esempio 34.2. Compasso ellittico. □

Esercizio 34.3. 24/450. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 11.2, 11.3.

35. Giovedì 12/12/2019
(Aula 14: 14-17)

Precessioni regolari; le rigate fissa e solidale del moto sono coni circolari retti.

Esercizio 35.1. Due circonferenze γ_1, γ_2 sono contenute nel piano $x_3 = 0$; γ_1 ha il centro nell'origine. La circonferenza γ_2 rotola senza strisciare sulla γ_1, mantenendosi esterna a essa. Trovare l'energia cinetica del sistema. □

Esercizio 35.2. 34/450. □

Paragrafi di riferimento sul testo: MMM: 11.4, 16.4.

36. Lunedì 16/12/2019
(Aula 14: 14-16)

Esercizio 36.1. Esempio del paragrafo MMM 12.3; 37/660, 47/450. □

37. Martedì 17/12/2019
(Aula 14: 14-16)

Esercizio 37.1. 29/340; 23/330; 38/620. □

38. Giovedì 19/12/2019
(Aula 14: 14-16)

Esercizio 38.1. 17/560, 52/630. ☐

Per casa 38.2. 31, 76/450; 54, 61, 62/630. ☐

FINE DEL CORSO