

**DIARIO DELLE LEZIONI DEL CORSO DI
MECCANICA RAZIONALE A.A. 2018-2019
CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA**

DANIELE ANDREUCCI
DIP. SCIENZE DI BASE E APPLICATE PER L'INGEGNERIA
UNIVERSITÀ LA SAPIENZA
VIA A.SCARPA 16, 00161 ROMA, ITALY

Le dimostrazioni fanno parte del programma, salvo che quando viene esplicitamente indicato il contrario con il simbolo (s.d.).

I richiami al testo si riferiscono alla *Versione preliminare* degli Appunti del corso, pubblicata sul sito del corso prima dell'inizio del corso. La numerazione n/m relativa agli esercizi si riferisce all'esercizio n del gruppo m , nella raccolta pubblicata sul sito del corso prima dell'inizio del corso.

1. LUNEDÌ 24/09/2018
(AULA 16: 14-16)

Presentazione del corso.

Equazioni alle derivate ordinarie del primo ordine. Definizione di soluzione.

Problema di Cauchy, istante iniziale, dato iniziale, punto iniziale.

Funzioni localmente lipschitziane e criterio della derivata limitata.

Teorema di esistenza e unicità di soluzioni locali.

Passaggio da sistemi di ordine 2 a sistemi di ordine 1 con numero doppio di incognite. Passaggio dai dati di Cauchy del primo sistema a quelli del secondo.

Esempio 1.1. Il sistema

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1,$$

e l'equazione collegata

$$\ddot{x} + x = 0.$$

Risoluzione del sistema; integrali generali; dati di Cauchy per l'equazione ricavati da quelli del sistema. $\square$

Per casa 1.2. Riscrivere il sistema precedente in termini delle coordinate polari nel piano (x_1, x_2) . $\square$

Tecnica della separazione delle variabili.

Esempio 1.3. Risoluzione dei problemi di Cauchy

$$\begin{aligned} \dot{y} &= y^2, & y(0) &= c \in \mathbb{R}; \\ \dot{y} &= -\sqrt{y}, & y(0) &= c > 0. \end{aligned}$$

Negli ultimi due casi si ha solo esistenza su intervalli limitati a destra o a sinistra. Discussione del perché la soluzione non può essere continuata. $\square$

Per casa 1.4. Controesempio all'unicità: problema di Cauchy

$$\dot{y} = y^{4/7}, \quad y(0) = 0.$$

$\square$

Per casa 1.5. Esercizi del gruppo 100. $\square$

Paragrafi di riferimento sul testo: 1.1.

2. MARTEDÌ 25/09/2018
(AULA 16: 16-19)

Definizione di soluzioni massimali; teorema sul comportamento agli estremi dell'intervallo di definizione.

Esempi dei due comportamenti possibili.

Definizione di dipendenza continua dai dati iniziali.

Teorema di dipendenza continua delle soluzioni del problema di Cauchy.

Esercizio 2.1. Dipendenza continua per

$$x' = x .$$

□

Esercizio 2.2. Trasformazione in coordinate polari del sistema

$$\dot{x}_1 = x_2 , \quad \dot{x}_2 = -x_1 .$$

□

Esempio 2.3. Espressione dell'anomalia polare come funzione di (x, y) .

□

Sistemi autonomi; traslabilità in t delle soluzioni.

Teorema 2.4. *Se una soluzione φ di un sistema autonomo soddisfa $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$, allora è periodica.*

Definizione di punti di equilibrio per un sistema autonomo del primo ordine. Collegamento con le soluzioni costanti: una costante è soluzione se e solo se è un punto di equilibrio.

Esempi; diverso comportamento qualitativo dei punti di equilibrio di

$$y' = y(1 - y) .$$

Definizione di punti di equilibrio stabile e instabile.

Esercizio 2.5. Studio della stabilità per:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= y ; & \dot{y} &= -y ; \\ \dot{x}_1 &= x_2 , & \dot{x}_2 &= -x_1 , & (\text{invarianza distanza da } \mathbf{y}_{\text{eq}}); \\ \dot{x}_1 &= x_1 , & \dot{x}_2 &= x_2 , & (\text{soluzione esplicita}); \\ \dot{x}_1 &= x_2 , & \dot{x}_2 &= x_1 , & (\text{soluzione esplicita}); \end{aligned}$$

Risoluzione esplicita; $x_1^2 + x_2^2 = \text{costante}$ o decrescente in t implica stabilità.

□

Esercizio 2.6. 5/100.

□

Paragrafi di riferimento sul testo: 1.1, 1.2.

3. LUNEDÌ 01/10/2018

(AULA 16: 14-16)

Definizione di funzione di Liapunov in un punto di equilibrio di un sistema autonomo. Monotonia lungo le soluzioni del sistema.

Teorema 3.1. *Se un punto di equilibrio ammette una funzione di Liapunov, allora è stabile.*

Esempio 3.2. Il sistema

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1$$

ammette la funzione di Liapunov $x_1^2 + x_2^2$ in $(0, 0)$. □

Sistemi del II ordine: punti di equilibrio e di equilibrio stabile.

Teorema 3.3. (DIRICHLET) *Il sistema*

$$\ddot{\mathbf{z}} = \nabla U(\mathbf{z}) + \mathbf{a}(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}})$$

è stabile in $\mathbf{z}_{\text{eq}}$ se $\mathbf{z}_{\text{eq}}$ è un massimo isolato per U e

$$\mathbf{a}(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}) \cdot \dot{\mathbf{z}} \leq 0, \quad \mathbf{a}(\mathbf{z}, 0) = 0.$$

Corollario 3.4. (CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA) *La funzione*

$$\frac{1}{2}|\dot{\mathbf{z}}|^2 - U(\mathbf{z})$$

è costante lungo le soluzioni di

$$\ddot{\mathbf{z}} = \nabla U(\mathbf{z}).$$

Esercizio 3.5. 3, 5/120. □

Per casa 3.6. 1, 2/120 □

Paragrafi di riferimento sul testo: 1.3, 1.4.

4. MARTEDÌ 02/10/2018

(AULA 16: 16-19)

Lemma 4.1. Sia $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^N$ e $\varphi : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^N$ soluzione di $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{F}(\mathbf{y})$ con $\mathbf{F}$ localmente lipschitziana e $\varphi(t) \rightarrow \mathbf{y}_0$ per $t \rightarrow \beta -$. Allora:

1) Se $\mathbf{y}_0$ è di equilibrio, $\beta = +\infty$.

2) Se $\mathbf{y}_0$ non è di equilibrio, $\beta < +\infty$.

Definizione di orbita di un sistema autonomo.

Teorema 4.2. Se l'orbita di un sistema autonomo si autointerseca corrisponde a una soluzione periodica.

Teorema 4.3. Se due orbite di un sistema periodico si intersecano allora coincidono.

Caso delle equazioni scalari del II ordine; conservazione dell'energia.

Piano delle fasi; equazione delle orbite

$$p = \pm \sqrt{\frac{2}{m}[E + U(x)]}.$$

Riconoscimento di punti stabili e instabili. Verso di percorrenza delle orbite; punti di inversione del moto, orbite degeneri.

Esercizio 4.4. 1) Piano delle fasi dell'oscillatore armonico $m\ddot{x} = -kx$.

2) Piano delle fasi del pendolo fisico $m\ddot{x} = -k \sin x$.

3) 14, 21/150.

4) 1/120. □

Per casa 4.5. 18, 20/150. □

Paragrafi di riferimento sul testo: 1.2, 1.5.

5. LUNEDÌ 08/10/2018
(AULA 16: 14-16)

Definizione di moto $\mathbf{X} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$. Velocità e accelerazione.

Esempio 5.1. Alcuni semplici moti: quiete; moto rettilineo; moto circolare; calcolo di velocità e accelerazione. $\square$

Moto piano in coordinate polari: velocità e accelerazione trasversale e radiale.

Esercizio 5.2. Moto su $x = 1$ in coordinate polari. $\square$

Per casa 5.3. Moto in coordinate polari su $r = \varphi$. $\square$

Terne mobili.

Scomposizione di funzioni vettoriali in terne mobili.

Definizione di derivata relativa a una terna mobile $\mathcal{M} = (\mathbf{u}_i)$ e suo significato intuitivo.

Proprietà elementari della derivata relativa: linearità, regole di Leibnitz per i prodotti con uno scalare e tra vettori.

Definizione di vettore costante in una terna mobile.

Teorema 5.4. *Un vettore è costante in una terna mobile se e solo se la sua derivata relativa a quella terna è nulla.*

Lemma 5.5. *Esiste un unico vettore $\boldsymbol{\omega}$ tale che*

$$\frac{d\mathbf{u}_i}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Teorema 5.6. *Esiste un unico vettore $\boldsymbol{\omega}$ tale che per ogni $\mathbf{f}$*

$$\frac{d\mathbf{f}}{dt} = \left[\frac{d\mathbf{f}}{dt} \right]_{\mathcal{M}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{f}.$$

Esempio 5.7. Calcolo della velocità angolare per una terna $(\mathbf{u}_h)$ che si muove di rotazione intorno a $\mathbf{u}_3$. $\square$

Per casa 5.8. Calcolo della velocità angolare per una terna $(\mathbf{u}_h)$ che si muove di rotazione intorno a $\mathbf{u}_2$. $\square$

Esercizio 5.9. 20/150. $\square$

Paragrafi di riferimento sul testo: 2.1, 2.2, 4.5 (esempio 4.12).

6. LUNEDÌ 15/10/2018
(AULA 16: 14-16)

Teorema 6.1. $\mathbf{f}$ è costante in $\mathcal{M}$ se e solo se

$$\frac{d\mathbf{f}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{f}.$$

Teorema 6.2. Sia $\mathbf{u}_h \in C^k(I)$, $k \geq 2$. Allora $\boldsymbol{\omega} \in C^{k-1}(I)$ e

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \left[\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \right]_{\mathcal{M}}.$$

Inoltre:

- i) $\boldsymbol{\omega}$ è costante se e solo se è costante in $\mathcal{M}$;
- ii) $\boldsymbol{\omega}$ ha direzione costante se e solo se ha direzione costante in $\mathcal{M}$.

Esempio 6.3. 1) Se $\boldsymbol{\omega}(t) = F(t)\mathbf{u}_3(t)$ si ha una rotazione.

2) Se $\boldsymbol{\omega}(t) = F(t)\mathbf{e}_3$ si ha una rotazione. □

Sistemi di riferimento mobili. Vettori caratteristici del sistema.

Definizione di velocità e di accelerazione relativa, con loro espressione nelle componenti in $\mathcal{M}$.

Moti solidali.

Teorema di scomposizione della velocità.

Teorema (di Coriolis) di scomposizione dell'accelerazione.

Velocità e accelerazione di trascinamento. Accelerazione di Coriolis.

Teorema 6.4. Se $\mathbf{X}_1$ e $\mathbf{X}_2$ sono due moti solidali, allora

$$\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2).$$

Moti particolari: moti polari, traslazioni, rotazioni e rotazioni uniformi.

Esercizio 6.5. 3, 5/340. □

Per casa 6.6. 4, 10, 11, 18, 21, 26, 30, 36/340. □

Paragrafi di riferimento sul testo: 2.2, 2.3.

7. LUNEDÌ 15/10/2018

(AULA 16: 16-19)

Caso dei sistemi differenziali lineari a coefficienti costanti $N \times N$ $\dot{\mathbf{y}} =$

$\mathbf{A}\mathbf{y}$: metodo degli autovettori. Criteri di stabilità:

1) se tutti gli autovalori di $\mathbf{A}$ hanno parte reale negativa, $\mathbf{y}_{\text{eq}} = 0$ è stabile;

2) se esiste un autovalore con parte reale positiva, $\mathbf{y}_{\text{eq}} = 0$ è instabile.

Caso di

$$m\ddot{\mathbf{x}} = \nabla U(\mathbf{x}),$$

vicino a un punto critico $\mathbf{x}_0$ di U . Linearizzazione; il punto è stabile se $D^2U(\mathbf{x}_0)$ è definita negativa.

Curve regolari. Definizione. Supporto della curva.

Ascissa curvilinea. Riparametrizzazione con l'ascissa curvilinea.

Curvatura.

Terna intrinseca (o triedro principale) ove $k \neq 0$.

Formule di Frenet-Serret.

Curve e cinematica: traiettoria di $\mathbf{X}$ come supporto $\mathbf{X}(I)$.

Velocità e accelerazione scomposte nella terna intrinseca.

Esercizio 7.1. 31, 34/340

□

Paragrafi di riferimento sul testo: 3.1, 3.2, 3.3.

8. MARTEDÌ 16/10/2018
(AULA 16: 16-19)

Moto di una terna mobile $\mathcal{N}$ relativo a un'altra terna mobile $\mathcal{M}$.
Velocità angolare relativa $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{MN}}$ e formula fondamentale:

$$\left[\frac{d\mathbf{f}}{dt} \right]_{\mathcal{M}} = \left[\frac{d\mathbf{f}}{dt} \right]_{\mathcal{N}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{MN}} \times \mathbf{f}.$$

Formule della velocità e dell'accelerazione per cambiamento da un sistema mobile a un altro.

Teorema 8.1. $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{MN}} = -\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{NM}}$.

Teorema 8.2. $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{PN}} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{PM}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{MN}}$.

Uso del teorema di composizione delle velocità angolari per determinare la velocità angolare assoluta di terne mobili.

Esercizio 8.3. 13, 35/340. □

Problema della determinazione della terna mobile una volta nota $\boldsymbol{\omega}$:

Teorema 8.4. *Data una terna mobile $\mathcal{M}$, $\mathbf{f} \in C^0(I)$ e una terna ortonormale positiva $(\mathbf{w}_{0i})$ esiste unica la terna $\mathcal{N}$ che ha $\mathbf{f}$ come velocità angolare relativa $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{MN}}$ e $(\mathbf{w}_{0i})$ come posizione iniziale.*

Teorema 8.5. *Data una terna mobile $\mathcal{M}$, $\mathbf{f} \in C^0(I \times \mathbb{R}^9)$, localmente lipschitziana nelle ultime 9 variabili, e una terna ortonormale positiva $(\mathbf{w}_{0i})$ esiste unica la terna $\mathcal{N} = (\mathbf{w}_h)$ che ha $\mathbf{f}(t, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3)$ come velocità angolare relativa $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{MN}}$ e $(\mathbf{w}_{0i})$ come posizione iniziale.*

Esercizio 8.6. Calcolo esplicito del termine $\boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{X} - \mathbf{X}_O)]$ nella formula di Coriolis. □

Per casa 8.7. 8, 14, 25, 28/340. □

Paragrafi di riferimento sul testo: 2.4, 2.5.

9. LUNEDÌ 22/10/2018

(AULA 16: 14-16)

Teorema 9.1. *Se una curva ha curvatura nulla nell'intervallo (a, b) , per $s \in (a, b)$ è una parte di retta, e viceversa.*

Teorema 9.2. *Se una curva ha curvatura positiva e torsione nulla nell'intervallo (a, b) , per $s \in (a, b)$ giace su un piano, e viceversa.*

Teorema 9.3. *La velocità angolare della terna intrinseca $(\mathbf{T}(s(t)), \mathbf{N}(s(t)), \mathbf{B}(s(t)))$ è $\boldsymbol{\omega} = \dot{s}[-\tau\mathbf{T} + k\mathbf{B}]$.*

Vincoli lisci e con attrito.

Esercizio 9.4. 9, 22/560. □

Per casa 9.5. 11/560, 1, 3/620. □

Paragrafi di riferimento sul testo: 3.2, 3.3, 5.3, 5.4.

10. MARTEDÌ 23/10/2018

(AULA 16: 16-19)

Vincoli olonomi.

Esempio della sfera intersecata dal piano; vari casi possibili.

Definizione. Significato geometrico della condizione sulla iacobiana.

Vincoli fissi e mobili.

Coordinate indipendenti. Gradi di libertà.

Dinamica relativa: forze di Coriolis $\mathbf{F}_C$ e di trascinamento $\mathbf{F}_T$.

L'equazione del moto nel sistema mobile $\mathcal{S}$

$$m\mathbf{a}_S = \mathbf{F} + \mathbf{F}_T + \mathbf{F}_C.$$

Esercizio 10.1. 1/580. □

Coordinate lagrangiane.

Esercizio 10.2. 1/620. □

Per casa 10.3. 6, 7, 9, 36/620. □

Paragrafi di riferimento sul testo: 4.1, 4.2, 4.4, 4.5, 5.1.

11. LUNEDÌ 05/11/2018
(AULA 16: 14-16)

Definizione di lavoro di una forza lungo un moto.

Forze posizionali e conservative. Conservazione dell'energia in presenza di forze conservative e di altre che non fanno lavoro. Lavoro di una forza conservativa in termini del potenziale.

Moto lagrangiano e rappresentazione lagrangiana.

Velocità in coordinate lagrangiane.

Ipotesi dei lavori virtuali per sistemi di punti e componenti lagrangiane delle forze.

Esempio 11.1. Esempio di due punti P_1, m_1 e P_2, m_2 vincolati al piano $x_3 = 0$; P_1 anche vincolato all'asse x_1 e la distanza tra P_1 e P_2 rimane costante. Infine $\mathbf{F}_1 = a\mathbf{e}_1$, $\mathbf{F}_2 = c\mathbf{e}_2$. $\square$

Per casa 11.2. Due punti P_1, m_1 e P_2, m_2 vincolati a rimanere alla stessa quota da $x_{3P_1} = x_{3P_2}$, con forze $\mathbf{F}_1 = \alpha\mathbf{e}_1 + \beta\mathbf{e}_3$ e $\mathbf{F}_2 = 0$. $\square$

Paragrafi di riferimento sul testo: 5.2, 7.1, 8.1.

12. LUNEDÌ 12/11/2018
(AULA 16: 14-16)

Definizione di energia cinetica di un sistema di punti materiali (in forma lagrangiana).

Dimostrazione dell'identità

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i^L}{\partial \dot{q}_h} = \frac{\partial \mathbf{X}_i^L}{\partial q_h}.$$

Equazioni di Lagrange (per sistemi di punti materiali) come conseguenza dell'ipotesi dei lavori virtuali.

Componenti lagrangiane delle forze conservative in senso lagrangiano.

Potenziale lagrangiano. Equazioni di Lagrange in forma conservativa.

Se le forze sono conservative in senso tradizionale, il potenziale lagrangiano si ottiene dal potenziale sostituendoci la parametrizzazione lagrangiana.

Caso di $\ell = 1$.

Esercizio 12.1. 10, 34/620. $\square$

Per casa 12.2. 21, 40, 57/620. $\square$

Paragrafi di riferimento sul testo: 7.4, 9.1, 10.1.

13. VENERDÌ 16/11/2018
(AULA 14: 14-17)

Le equazioni di Lagrange in sistemi di riferimento mobili. Forze fittizie. Due casi in cui la forza di Coriolis ha componenti lagrangiane nulle: sistemi con un solo grado di libertà, e punti su piano ruotante intorno a un suo asse.

Esercizio 13.1. 1/630. □

Spazi V (spazio degli spostamenti virtuali) e W nel caso dei vincoli fissi.

Teorema 13.2. $V^\perp = W$, $W^\perp = V$.

Ipotesi dei lavori virtuali e sua interpretazione in termini di proiezione su V . Lavoro virtuale delle reazioni vincolari. Cenno al caso dei vincoli mobili.

Per casa 13.3. 6, 17, 29, 31, 42/630. □

Paragrafi di riferimento sul testo: 8.5, 9.4.

14. LUNEDÌ 19/11/2018
(AULA 16: 14-16)

Esempio di equazione di moto di un corpo non rigido: equazione della corda vibrante. (*Questo esempio non fa parte del programma.*)

Coordinate locali di un sistema rigido non degenerare. Rappresentazione di tutti i moti solidali con un sistema rigido in termini delle coordinate locali.

Coordinate locali: il caso del punto; il caso dell'asta rigida (rigido degenerare).

Lemma 14.1. *Dato un versore $\mathbf{u} \in C^1(I)$ esiste un unico $\tilde{\boldsymbol{\omega}} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che*

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \tilde{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{u}, \quad \tilde{\boldsymbol{\omega}} \cdot \mathbf{u} = 0.$$

Esercizio 14.2. 54/630. □

Per casa 14.3. 59, 66/620. □

Paragrafi di riferimento sul testo: 4.6, 4.7.

15. MARTEDÌ 20/11/2018
(AULA 16: 16-19)

Esempio 15.1. Cilindro vincolato a avere centro su una circonferenza e asse perpendicolare al piano di essa. Ricerca delle coordinate locali, delle equazioni dei vincoli olonomi e delle coordinate lagrangiane. $\square$

Definizioni di corpo rigido non degenerare, degenerare rettilineo, di punto materiale.

Distribuzioni di forze su corpi rigidi non degeneri e degeneri.

Massa e energia cinetica di un corpo rigido.

Ipotesi dei lavori virtuali per sistemi di corpi rigidi vincolati da vincoli olonomi. Equazioni di Lagrange.

Esercizio 15.2. 58/620. $\square$

Distribuzioni di potenziale per distribuzioni di forze conservative.

Esercizio 15.3. 55/620. $\square$

Paragrafi di riferimento sul testo: 4.8, 6.1, 6.2, 7.2, 7.3, 7.4, 8.1.

16. VENERDÌ 23/11/2018
(AULA 14: 14-17)

Definizione di massa, quantità di moto, momento delle quantità di moto, energia cinetica, centro di massa come integrali.

Definizione del tensore d'inerzia di un corpo rigido in un polo Z .

Supponiamo nel seguito che il polo di σ sia O , che denota l'origine del sistema di riferimento solidale con il rigido.

Teorema 16.1. *Vale:*

$$T(t) = \frac{1}{2} \sigma \omega \cdot \omega + \frac{1}{2} m \left| \frac{d\mathbf{X}_O}{dt} \right|^2 + m \frac{d\mathbf{X}_O}{dt} \cdot \omega \times (\mathbf{X}_G - \mathbf{X}_O).$$

Corollario 16.2. (KÖNIG) *Se $\mathbf{X}_G = \mathbf{X}_O$, allora*

$$T(t) = \frac{1}{2} \sigma \omega \cdot \omega + \frac{1}{2} m \left| \frac{d\mathbf{X}_O}{dt} \right|^2.$$

Se $\dot{\mathbf{X}}_O = 0$, allora

$$T(t) = \frac{1}{2} \sigma \omega \cdot \omega.$$

Teorema 16.3. *Vale*

$$\mathbf{L}_O(t) = \sigma \omega(t) + m(\mathbf{X}_G(t) - \mathbf{X}_O(t)) \times \frac{d\mathbf{X}_O}{dt}(t).$$

Corollario 16.4. *Se O è fisso, o coincide con G ,*

$$\mathbf{L}_O(t) = \sigma \omega(t).$$

Esercizio 16.5. 47/620

□

Atti di moto in coordinate locali e lagrangiane.

Esercizio 16.6. 41/620

□

Per casa 16.7. 25/660

□

Paragrafi di riferimento sul testo: 4.3, 6.2, 6.3, 9.3.

17. LUNEDÌ 26/11/2018
(AULA 16: 14-16)

Esempio 17.1. Calcolo di σ per una lamina quadrata omogenea, di polo il centro. $\square$

Definizione di momento di inerzia e deviatore.

Lemma 17.2. *Se $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ sono solidali allora $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ e $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$ sono costanti.*

Proposizione 17.3. *Se $\mathbf{X}_Z, \mathbf{u}, \mathbf{v}$ sono solidali con il rigido, allora I_{uu} e I_{uv} sono costanti.*

Teorema 17.4. *Valgono per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ coppia di versori ortogonali:*

$$\sigma \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = I_{uu}, \quad \sigma \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = I_{uv}.$$

Corollario 17.5. *Vale per ogni terna ortonormale $\mathcal{M} = (\mathbf{u}_h)$*

$$\sigma^{\mathcal{M}} = (I_{\mathbf{u}_h \mathbf{u}_k}),$$

cosicché la matrice risulta simmetrica.

Inoltre la matrice è semidefinita positiva, e definita positiva se il rigido non è degenerare.

Esercizio 17.6. 27/630. $\square$

Per casa 17.7. 12/630. $\square$

Paragrafi di riferimento sul testo: 6.3, 6.4.

18. MARTEDÌ 27/11/2018
(AULA 16: 16-19)

Teorema 18.1. *Esiste almeno una terna solidale $\mathcal{M}$ tale che $\sigma_{\mathcal{M}}$ è diagonale.*

Definizione di vettore principale d'inerzia.

Teorema 18.2. *Il vettore $\mathbf{v}$ è principale d'inerzia se e solo se è un autovettore di σ .*

Definizione di terna principale di inerzia; una terna è principale di inerzia se e solo se la relativa matrice di σ è diagonale.

Ricerca degli assi principali d'inerzia in presenza di simmetrie materiali, teorema di Huygens (s.d.).

Esempio 18.3. Il caso della lamina: il versore ortogonale $\mathbf{u}_3$ è principale; formula

$$I_{33} = I_{11} + I_{22} .$$

□

Esercizio 18.4. 36, 46/330.

□

Per casa 18.5. 41, 42/330.

□

Paragrafi di riferimento sul testo: 6.4, 6.6.

19. LUNEDÌ 03/12/2018
(AULA 16: 14-16)

La forma quadratica

$$I_{uu} = \sum_{h=1}^3 I_{hh} \beta_h^2, \quad \mathbf{u} = \sum_{h=1}^3 \beta_h \mathbf{u}_h.$$

Proprietà di massimo degli assi principali:

Teorema 19.1. *Sia $\mathcal{M} = (\mathbf{u}_h)$ una terna principale in P . Allora ogni momento d'inerzia relativo a un asse per P soddisfa*

$$\min_{h=1,2,3} I_{hh} \leq I_{uu} \leq \max_{h=1,2,3} I_{hh}.$$

Il minimo assoluto del momento d'inerzia è assunto nel centro di massa. Esempi di ricerca di assi principali: sfera, cubo, lamina quadrata e rettangolare.

Teorema 19.2. *Assumiamo che gli assi siano principali.*

1) *Se $I_{11} = I_{22} = I_{33}$, tutte le direzioni sono principali con uguale momento d'inerzia.*

2) *Se $I_{11} = I_{22}$, tutte le direzioni del piano generato da $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ sono principali con uguale momento d'inerzia.*

Teorema 19.3. (I EQUAZIONE CARDINALE) *Per un corpo rigido libero l'ipotesi dei lavori virtuali implica*

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}^{\text{ext}}.$$

Esercizio 19.4. 21, 36, 42/330.

□

Paragrafi di riferimento sul testo: 6.5, 8.3.

20. MARTEDÌ 04/12/2018
(AULA 16: 16-19)

Definizione di $\mathbf{M}_Z^{\text{ext}}$.

Lemma 20.1. (s.d.) *Consideriamo un sistema rigido con un punto solidale fisso O ; fissiamo $\mathbf{q}_0 \in Q$. Allora per ogni $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^3$ fissato, esistono $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \in \mathbb{R}$ tali che per ogni $\lambda \in \mathbb{R}^3$*

$$\sum_{h=1}^3 \frac{\partial \mathbf{X}^L}{\partial q_h}(\mathbf{q}_0; \lambda) \mu_h = \mathbf{g} \times \mathbf{X}^L(\mathbf{q}_0; \lambda).$$

Teorema 20.2. (II EQUAZIONE CARDINALE) *Per un corpo rigido con un punto solidale fisso O l'ipotesi dei lavori virtuali implica*

$$\frac{d\mathbf{L}_O}{dt} = \mathbf{M}_O^{\text{ext}}.$$

Teorema 20.3. (EQUAZIONI DI EULERO) *Vale sotto l'ipotesi dei lavori virtuali per un rigido con un punto solidale fisso O*

$$\boldsymbol{\sigma} \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\omega} = \mathbf{M}_O^{\text{ext}}, \quad (20.1)$$

ove $\boldsymbol{\sigma}$ ha polo O .

Corollario 20.4. *In componenti (in una terna principale $(\mathbf{u}_h)$) la (20.1) implica*

$$\begin{aligned} I_{11} \dot{\omega}_1 &= (I_{22} - I_{33}) \omega_2 \omega_3 + \mathbf{M}_O^{\text{ext}} \cdot \mathbf{u}_1, \\ I_{22} \dot{\omega}_2 &= (I_{33} - I_{11}) \omega_1 \omega_3 + \mathbf{M}_O^{\text{ext}} \cdot \mathbf{u}_2, \\ I_{33} \dot{\omega}_3 &= (I_{11} - I_{22}) \omega_1 \omega_2 + \mathbf{M}_O^{\text{ext}} \cdot \mathbf{u}_3. \end{aligned}$$

Il sistema delle equazioni di Eulero come sistema differenziale del secondo ordine nelle coordinate lagrangiane, o come sistema del primo ordine nelle ω_h se $\mathbf{M}_O^{\text{ext}}$ dipende solo da $\boldsymbol{\omega}$.

Esercizio 20.5. 60, 71/450.

Caso della sfera con forza applicata in un punto fisso (non solidale) della superficie; scelta della terna fissa per scomporre le equazioni di Eulero. $\square$

Per casa 20.6. 64, 65, 75, 76/450. $\square$

Paragrafi di riferimento sul testo: 8.4, 11.1.

21. MERCOLEDÌ 05/12/2018
(AULA 16: 12-14)

Energia cinetica nei moti polari:

$$T = \frac{1}{2} I_{\mathbf{u}(t)\mathbf{u}(t)} |\boldsymbol{\omega}(t)|^2,$$

se $\mathbf{u}$ è il versore di $\boldsymbol{\omega}$.

Definizione di moti polari per inerzia.

Teorema 21.1. *In un moto polare per inerzia di polo O valgono i due integrali primi*

$$\mathbf{L}_O(t) = \mathbf{L}_O(0), \quad T(t) = T(0), \quad t \in I.$$

Definizione di ellissoide d'inerzia solidale e di ellissoide d'inerzia mobile. Equazione dell'ellissoide d'inerzia mobile nel sistema di riferimento fisso.

Lemma 21.2. *La normale all'ellissoide d'inerzia nel punto $\mathbf{x}$ è data da $\boldsymbol{\sigma}\mathbf{x}$.*

Esercizio 21.3. 35/450; 47/660. □

Per casa 21.4. 41, 45/450. □

Paragrafi di riferimento sul testo: 11.1, 11.2.

22. LUNEDÌ 10/12/2018
(AULA 16: 14-16)

Definizione di contatto senza strisciamento; vincolo di rotolamento puro.

Teorema 22.1. (s.d.) (MOTO ALLA POINSOT) *In un moto polare per inerzia l'ellissoide d'inerzia si muove mantenendosi tangente a un piano fisso di normale $\mathbf{L}_O(0)$. Il moto è di rotolamento puro (cioè il punto di contatto ha velocità istantanea nulla).*

Definizione di polodia ed erpolodia.

Teorema 22.2. (s.d.) *Le sole rotazioni per inerzia sono quelle intorno agli assi principali (e sono uniformi).*

Esercizio 22.3. 47, 69/450. □

Teorema 22.4. (s.d.) *Se due lagrangiane $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ soddisfano*

$$\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2 + \frac{d}{dt}F(q, t),$$

allora danno luogo a equazioni di Lagrange equivalenti.

Per casa 22.5. 18, 26, 40, 49/450. □

Paragrafi di riferimento sul testo: 10.3, 11.2.

23. MARTEDÌ 11/12/2018
(AULA 16: 16-19)

Teorema 23.1. *L'energia cinetica in forma lagrangiana ha la struttura*

$$T_1^L + T_2^L,$$

con T_1^L polinomio di primo grado nelle $\dot{q}_h$, e T_2^L forma quadratica nelle $\dot{q}_h$. Inoltre $T_1^L \equiv 0$ se i vincoli sono fissi.

Teorema 23.2. *La matrice della forma quadratica T_2^L è simmetrica e definita positiva.*

Teorema 23.3. *Le equazioni di Lagrange si possono mettere in forma normale nelle $\ddot{\mathbf{q}}$.*

Perciò per le equazioni di Lagrange valgono gli usuali risultati di esistenza, unicità, dipendenza continua e stabilità visti per e.d.o. in forma normale.

Esercizio 23.4. 26/450. □

Piccole oscillazioni in punti di equilibrio con hessiana del potenziale definita negativa. Lagrangiana ridotta.

Teorema di esistenza delle coordinate normali (s.d.).

Metodo diretto per il calcolo delle frequenze normali.

Esercizio 23.5. 16/680. □

Per casa 23.6. 6, 10/680. □

Paragrafi di riferimento sul testo: 9.2, 10.2.

24. LUNEDÌ 17/12/2018
(AULA 16: 14-16)

Campo delle velocità di trascinamento.

Definizione di asse istantaneo di moto e di istantanea rotazione.

Teorema sull'esistenza dell'asse istantaneo di moto (s.d.).

Definizione di rigata fissa, solidale, mobile.

Moti rigidi piani: piani rappresentativi. Base e rulletta.

Esercizio 24.1. 42/620; 35/660. □

Per casa 24.2. 43/620; 9, 16/630. □

Paragrafi di riferimento sul testo: 2.6.

25. MARTEDÌ 18/12/2018
(AULA 16: 16-18)

Esercizio 25.1. 23, 49/630.



Per casa 25.2. 20, 21, 29, 52, 55/630;
23, 59/330.



FINE DEL CORSO