

**DIARIO DELLE LEZIONI DEL CORSO DI
MECCANICA RAZIONALE A.A. 2017/2018
CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA**

DANIELE ANDREUCCI
DIP. SCIENZE DI BASE E APPLICATE PER L'INGEGNERIA
UNIVERSITÀ LA SAPIENZA
VIA A.SCARPA 16, 00161 ROMA, ITALY

Le dimostrazioni fanno parte del programma, salvo che quando viene esplicitamente indicato il contrario con il simbolo (s.d.).

I richiami al testo si riferiscono alla *Versione preliminare* degli Appunti del corso, pubblicata sul sito del corso prima dell'inizio del corso. La numerazione n/m relativa agli esercizi si riferisce all'esercizio n del gruppo m , nella raccolta pubblicata sul sito del corso prima dell'inizio del corso.

1. LUNEDÌ 25/09/2017
(AULA 16)

Presentazione del corso.

Equazioni alle derivate ordinarie del primo ordine. Definizione di soluzione.

Problema di Cauchy, istante iniziale, dato iniziale, punto iniziale. Soluzione massimale.

Orbita di una soluzione; grafico di una soluzione.

Funzioni localmente lipschitziane e criterio della derivata limitata.

Controesempio all'unicità: $\dot{\varphi} = \varphi^{2/5}$.

Tecnica della separazione delle variabili.

Teorema di esistenza e unicità di soluzioni massimali, e loro comportamento sull'intervallo di definizione.

Esempio 1.1. Risoluzione dei problemi di Cauchy

$$\begin{aligned}\dot{\varphi} &= t\varphi, & \varphi(0) &= c \in \mathbb{R}; \\ \dot{\varphi} &= \varphi^2, & \varphi(0) &= c \in \mathbb{R}; \\ \dot{\varphi} &= -\sqrt{\varphi}, & \varphi(0) &= c > 0.\end{aligned}$$

Negli ultimi due casi si ha solo esistenza su intervalli limitati a destra o a sinistra. $\square$

Applicazione dell'unicità: i grafici di soluzioni diverse non possono intersecarsi.

Riduzione di un sistema del II ordine a uno del I ordine (mediante duplicazione del numero delle variabili).

Definizione di sistema autonomo.

Le soluzioni di un sistema autonomo sono traslabili nel tempo.

Paragrafi di riferimento sul testo: 1.1.

2. VENERDÌ 29/09/2017
(AULA 16)

Orbite di un sistema autonomo.

Teorema 2.1. *Se un'orbita di un sistema autonomo si autointerseca, corrisponde a una soluzione periodica.*

Teorema 2.2. *Se due orbite di un sistema autonomo si intersecano allora coincidono.*

Definizione di dipendenza continua. Teorema di dipendenza continua.

Esercizio 2.3. Dipendenza continua per le due equazioni

$$x' = x, \quad x' = -x,$$

e diverso comportamento su $(0, +\infty)$. $\square$

Definizione di punti di equilibrio per un sistema autonomo del primo ordine. Definizione di punti di equilibrio stabile.

Esercizio 2.4. Studio della stabilità per il sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_1.\end{aligned}$$

Risoluzione esplicita; integrale primo $x_1^2 + x_2^2 = \text{costante}$. $\square$

Per casa 2.5. Studiare la stabilità per le e.d.o.:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1; \end{cases} \quad \dot{x} = x(1-x); \quad \dot{x} = x(x-1);$$
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_2; \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2. \end{cases}$$

$\square$

Paragrafi di riferimento sul testo: 1.2, 1.5.

3. LUNEDÌ 02/10/2017
(AULA 16)

Definizione di funzione di Liapunov in un punto di equilibrio di un sistema autonomo. Monotonia lungo le soluzioni del sistema.

Teorema 3.1. *Se un punto di equilibrio ammette una funzione di Liapunov, allora è stabile.*

Esempio 3.2. Il sistema

$$\dot{x}_1 = -x_2, \quad \dot{x}_2 = x_1$$

ammette la funzione di Liapunov $x_1^2 + x_2^2$ in $(0, 0)$. $\square$

Caso dei sistemi differenziali lineari $N \times N$ $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y}$: metodo degli autovettori. Criteri di stabilità:

- 1) se tutti gli autovalori di $\mathbf{A}$ hanno parte reale negativa, $\mathbf{y}_{\text{eq}} = 0$ è stabile;
 - 2) se esiste un autovalore con parte reale positiva, $\mathbf{y}_{\text{eq}} = 0$ è instabile.
- Sistemi del II ordine: punti di equilibrio e di equilibrio stabile.

Teorema 3.3. (DIRICHLET) *Il sistema*

$$\ddot{\mathbf{z}} = \nabla U(\mathbf{z}) + \mathbf{a}(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}})$$

è stabile in $\mathbf{z}_{\text{eq}}$ se $\mathbf{z}_{\text{eq}}$ è un massimo isolato per U e

$$\mathbf{a}(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}) \cdot \dot{\mathbf{z}} \leq 0, \quad \mathbf{a}(\mathbf{z}, 0) = 0.$$

Corollario 3.4. (CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA) *La funzione*

$$\frac{1}{2}|\dot{\mathbf{z}}|^2 - U(\mathbf{z})$$

è costante lungo le soluzioni di

$$\ddot{\mathbf{z}} = \nabla U(\mathbf{z}).$$

Esercizio 3.5. 1, 7/120. $\square$

Lemma 3.6. *Sia $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^N$ e $\varphi : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^N$ soluzione di $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{F}(\mathbf{y})$ con $\mathbf{F}$ localmente lipschitziana e $\varphi(t) \rightarrow \mathbf{y}_0$ per $t \rightarrow \beta^-$. Allora:*

- 1) *Se $\mathbf{y}_0$ è di equilibrio, $\beta = +\infty$.*
- 2) *Se $\mathbf{y}_0$ non è di equilibrio, $\beta < +\infty$.*

Per casa 3.7. 3, 8/120; tutto il gruppo 100. $\square$

Paragrafi di riferimento sul testo: 1.2, 1.3, 1.4.

4. VENERDÌ 06/10/2017
(AULA 16)

Caso delle equazioni scalari del II ordine; conservazione dell'energia.
Piano delle fasi; equazione delle orbite

$$p = \pm \sqrt{\frac{2}{m}[E + U(x)]}.$$

Riconoscimento di punti stabili e instabili. Verso di percorrenza delle orbite; punti di inversione del moto, orbite degeneri.

Esercizio 4.1. 1) Piano delle fasi dell'oscillatore armonico $m\ddot{x} = -kx$.
2) Piano delle fasi del pendolo fisico $m\ddot{x} = -k \sin x$.
3) 13/150. □

Per casa 4.2. 1, 14, 15/150. □

Paragrafi di riferimento sul testo: 1.5.

5. LUNEDÌ 9/10/2017
(AULA 16)

Definizione di moto $\mathbf{X} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$. Velocità e accelerazione.

Esempio 5.1. Alcuni semplici moti: quiete; moto rettilineo; moto circolare; calcolo di velocità e accelerazione. $\square$

Moto piano in coordinate polari: velocità e accelerazione trasversale e radiale.

Esercizio 5.2. Moto uniforme su $r = \varphi$. $\square$

Esercizio 5.3. 18/150. $\square$

Per casa 5.4. 20, 21/150. $\square$

Terne mobili; relazioni tra versori di una stessa terna.

Scomposizione di funzioni vettoriali in terne mobili.

Definizione di derivata relativa a una terna mobile $\mathcal{M} = (\mathbf{u}_i)$ e suo significato intuitivo.

Proprietà elementari della derivata relativa: linearità, regole di Leibnitz per i prodotti con uno scalare e tra vettori.

Definizione di vettore costante in una terna mobile.

Teorema 5.5. *Un vettore è costante in una terna mobile se e solo se la sua derivata relativa a quella terna è nulla.*

Lemma 5.6. *Esiste un unico vettore $\boldsymbol{\omega}$ tale che*

$$\frac{d\mathbf{u}_i}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Teorema 5.7. *Esiste un unico vettore $\boldsymbol{\omega}$ tale che per ogni $\mathbf{f}$*

$$\frac{d\mathbf{f}}{dt} = \left[\frac{d\mathbf{f}}{dt} \right]_{\mathcal{M}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{f}.$$

Esempio 5.8. Calcolo della velocità angolare per una terna $(\mathbf{u}_h)$ che si muove di rotazione intorno a $\mathbf{u}_3$. $\square$

Per casa 5.9. Calcolo della velocità angolare per una terna $(\mathbf{u}_h)$ che si muove di rotazione intorno a $\mathbf{u}_1$ o a $\mathbf{u}_2$. $\square$

Paragrafi di riferimento sul testo: 2.1, 2.2, 4.5 (esempio 4.12).

6. VENERDÌ 13/10/2017
(AULA 16)

Teorema 6.1. $\mathbf{f}$ è costante in $\mathcal{M}$ se e solo se

$$\frac{d\mathbf{f}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{f}.$$

Teorema 6.2. Sia $\mathbf{u}_h \in C^k(I)$, $k \geq 2$. Allora $\boldsymbol{\omega} \in C^{k-1}(I)$ e

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \left[\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \right]_{\mathcal{M}}.$$

Inoltre:

- i) $\boldsymbol{\omega}$ è costante se e solo se è costante in $\mathcal{M}$;
- ii) $\boldsymbol{\omega}$ ha direzione costante se e solo se ha direzione costante in $\mathcal{M}$.

Esempio 6.3. 1) Se $\boldsymbol{\omega}(t) = F(t)\mathbf{u}_3(t)$ si ha una rotazione.

2) Se $\boldsymbol{\omega}(t) = F(t)\mathbf{e}_3$ si ha una rotazione. □

Sistemi di riferimento mobili. Vettori caratteristici del sistema.

Definizione di velocità e di accelerazione relativa, con loro espressione nelle componenti in $\mathcal{M}$.

Moti solidali.

Teorema di scomposizione della velocità.

Teorema (di Coriolis) di scomposizione dell'accelerazione.

Velocità e accelerazione di trascinamento. Accelerazione di Coriolis.

Esercizio 6.4. 4, 5/340. □

Per casa 6.5. 10, 11, 18, 26, 30, 34, 36/340. □

Paragrafi di riferimento sul testo: 2.2, 2.3.

7. LUNEDÌ 16/10/2017
(AULA 16)

Moti particolari: moti polari, traslazioni, rotazioni e rotazioni uniformi.
Moto di una terna mobile $\mathcal{N}$ relativo a un'altra terna mobile $\mathcal{M}$.
Velocità angolare relativa $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{MN}}$ e formula fondamentale:

$$\left[\frac{d\mathbf{f}}{dt} \right]_{\mathcal{M}} = \left[\frac{d\mathbf{f}}{dt} \right]_{\mathcal{N}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{MN}} \times \mathbf{f}.$$

Formule della velocità e dell'accelerazione per cambiamento da un sistema mobile a un altro.

Teorema 7.1. $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{MN}} = -\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{NM}}$.

Teorema 7.2. $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{PN}} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{PM}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{MN}}$.

Esempio 7.3. Caso della precessione regolare: composizione di due rotazioni uniformi. $\square$

Esercizio 7.4. Calcolo esplicito del termine $\boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{X} - \mathbf{X}_O)]$ nella formula di Coriolis. $\square$

Esercizio 7.5. 6, 7, 9/340. $\square$

Problema della determinazione della terna mobile una volta nota $\boldsymbol{\omega}$:

Teorema 7.6. *Data una terna mobile $\mathcal{M}$, $\mathbf{f} \in C^0(I)$ e una terna ortonormale positiva $(\mathbf{w}_{0i})$ esiste unica la terna $\mathcal{N}$ che ha $\mathbf{f}$ come velocità angolare relativa $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{MN}}$ e $(\mathbf{w}_{0i})$ come posizione iniziale.*

Teorema 7.7. *Data una terna mobile $\mathcal{M}$, $\mathbf{f} \in C^0(I \times \mathbb{R}^9)$, localmente lipschitziana nelle ultime 9 variabili, e una terna ortonormale positiva $(\mathbf{w}_{0i})$ esiste unica la terna $\mathcal{N} = (\mathbf{w}_h)$ che ha $\mathbf{f}(t, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3)$ come velocità angolare relativa $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{MN}}$ e $(\mathbf{w}_{0i})$ come posizione iniziale.*

Paragrafi di riferimento sul testo: 2.3, 2.4, 2.5.

8. VENERDÌ 20/10/2017
(AULA 16)

Curve regolari. Definizione. Supporto della curva.

Ascissa curvilinea. Riparametrizzazione con l'ascissa curvilinea.

Curvatura.

Terna intrinseca (o triedro principale) ove $k \neq 0$.

Formule di Frenet-Serret.

Curve e cinematica: traiettoria di $\mathbf{X}$ come supporto $\mathbf{X}(I)$.

Velocità e accelerazione scomposte nella terna intrinseca.

Esercizio 8.1. 8, 9/560. □

Per casa 8.2. 11, 12, 22/560. □

Paragrafi di riferimento sul testo: 3.1, 3.2, 3.3.

9. LUNEDÌ 23/10/2017
(AULA 16)

Raggio di curvatura; cenno al cerchio osculatore.

Teorema 9.1. *Se una curva ha curvatura nulla nell'intervallo (a, b) , per $s \in (a, b)$ è una parte di retta, e viceversa.*

Teorema 9.2. *Se una curva ha curvatura positiva e torsione nulla nell'intervallo (a, b) , per $s \in (a, b)$ giace su un piano, e viceversa.*

Teorema 9.3. *La velocità angolare della terna intrinseca $(\mathbf{T}(s(t)), \mathbf{N}(s(t)), \mathbf{B}(s(t)))$ è $\boldsymbol{\omega} = \dot{s}[-\tau\mathbf{T} + k\mathbf{B}]$.*

Esercizio 9.4. 32/340. □

Per casa 9.5. 34, 35/340. □

Vincoli olonomi.

Esempio della sfera intersecata dal piano; vari casi possibili.

Definizione. Significato geometrico della condizione sulla iacobiana.

Vincoli fissi e mobili.

Coordinate indipendenti. Gradi di libertà.

Esercizio 9.6. 7/620. □

Per casa 9.7. 1, 8/620. □

Paragrafi di riferimento sul testo: 3.2, 3.3, 4.1, 4.2.

10. VENERDÌ 27/10/2017
(AULA 14)

Coordinate lagrangiane.

Esempio 10.1. 1) punto vincolato a una sfera.

2) due punti vincolati a un piano: P_1 sulla circonferenza di centro l'origine e raggio R ; P_2 sull'asse x ; $|\overrightarrow{P_1 P_2}| = L$; discussione dell'olonomia dei vincoli. $\square$

Dinamica relativa: forze di Coriolis $\mathbf{F}_C$ e di trascinamento $\mathbf{F}_T$.
L'equazione del moto nel sistema mobile $\mathcal{S}$

$$m\mathbf{a}_S = \mathbf{F} + \mathbf{F}_T + \mathbf{F}_C.$$

Esercizio 10.2. 8/350. $\square$

Per casa 10.3. 3, 4, 7/350; 5/580. $\square$

Paragrafi di riferimento sul testo: 4.4, 4.5, 5.1; opzionale: 4.10.

11. LUNEDÌ 30/10/2017
(AULA 16)

Coordinate locali di un sistema rigido non degenerare. Rappresentazione di tutti i moti solidali con un sistema rigido in termini delle coordinate locali.

Coordinate locali: il caso del punto; il caso dell'asta rigida (rigido degenerare).

Lemma 11.1. *Dato un vettore $\mathbf{u} \in C^1(I)$ esiste un unico $\tilde{\boldsymbol{\omega}} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che*

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \tilde{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{u}, \quad \tilde{\boldsymbol{\omega}} \cdot \mathbf{u} = 0.$$

Esempio 11.2. Sistema rigido degenerare con $\mathbf{X}_O = 0$ e

$$\mathbf{u}(t) = \alpha \cos(\lambda t) \mathbf{e}_1 + \alpha \sin(\lambda t) \mathbf{e}_2 + \beta \mathbf{e}_3.$$

□

Vincoli olonomi per sistemi di corpi rigidi.

Esercizio 11.3. 16/620 (senza equazioni di Lagrange).

□

Definizione di lavoro di una forza lungo un moto.

Forze posizionali e conservative. Conservazione dell'energia in presenza di forze conservative e di altre che non fanno lavoro. Lavoro di una forza conservativa in termini del potenziale.

Potenziale in presenza di più punti materiali nel sistema: due punti che si attraggono con forza elastica.

Esercizio 11.4. 10/620.

□

Paragrafi di riferimento sul testo: 4.6, 4.7, 4.8, 5.2.

12. VENERDÌ 03/11/2017
(AULA 14)

Moto lagrangiano e rappresentazione lagrangiana.

Velocità in coordinate lagrangiane; velocità virtuale.

Spazio degli spostamenti virtuali e suo significato geometrico. Spazi V e W .

Teorema 12.1. $V^\perp = W$, $W^\perp = V$.

Ipotesi dei lavori virtuali.

Esempio 12.2. Applicare l'ipotesi dei lavori virtuali a:

1) Due punti P_1 , m_1 e P_2 , m_2 vincolati a rimanere alla stessa quota da $x_{3P_1} = x_{3P_2}$, con forze $\mathbf{F}_1 = \alpha \mathbf{e}_1 + \beta \mathbf{e}_3$ e $\mathbf{F}_2 = 0$.

2) Due punti $P_1 = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, m_1 e $P_2 = (\xi_4, \xi_5, \xi_6)$, m_2 , vincolati da

$$\xi_2 = 0, \quad \xi_3 = 0, \quad \xi_4 - \xi_1 = 0, \quad \xi_5^2 + \xi_6^2 - \xi_1^2 = 0.$$

Il vincolo è olonomo se $\xi_1 > 0$.

Coordinate lagrangiane $(r, \varphi) \in (0, +\infty) \times (-\pi, \pi)$ date da

$$\xi_1 = \xi_4 = r, \quad \xi_2 = \xi_3 = 0, \quad \xi_5 = r \cos \varphi, \quad \xi_6 = r \sin \varphi.$$

□

Paragrafi di riferimento sul testo: 7.1, 8.1, 8.5.

13. LUNEDÌ 06/11/2017
(AULA 16)

Ipotesi dei lavori virtuali per sistemi di punti e componenti lagrangiane delle forze.

Completamento e discussione dell'esempio di venerdì 3/11.

Teorema 13.1. *Per un punto materiale libero l'ipotesi dei lavori virtuali implica $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$.*

Definizione di energia cinetica di un sistema di punti materiali (in forma lagrangiana).

Dimostrazione dell'identità

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i^L}{\partial \dot{q}_h} = \frac{\partial \mathbf{X}_i^L}{\partial q_h}.$$

Equazioni di Lagrange (per sistemi di punti materiali) come conseguenza dell'ipotesi dei lavori virtuali.

Esercizio 13.2. 1/620, 6/630. □

Per casa 13.3. 7, 16, 34, 37, 64, 65/620.
17, 45/630. □

Paragrafi di riferimento sul testo: 8.2, 9.1.

14. VENERDÌ 19/11/2017
(AULA 14)

Esercizio 14.1. 59, 64/620; 13, 17/630. □

15. LUNEDÌ 13/11/2017
(AULA 16)

Definizione di sistema di forze conservative in senso lagrangiano.
Potenziale lagrangiano.

Funzione lagrangiana. Equazioni di Lagrange nel caso conservativo, ossia scritte mediante la funzione lagrangiana.

Teorema 15.1. *Se le forze sono conservative, anche le componenti lagrangiane delle forze lo sono, e il potenziale lagrangiano si ottiene dal potenziale composto con la rappresentazione lagrangiana.*

Se $\ell = 1$ e le componenti lagrangiane delle forze dipendono solo dalla coordinata lagrangiana (non dalla sua derivata) e dal tempo, il sistema di forze è sempre conservativo in senso lagrangiano.

Esempio 15.2. Un punto materiale vincolato alla circonferenza

$$x_1^2 + x_2^2 = R^2, \quad x_3 = 0,$$

e soggetto alla forza $\mathbf{F} = \alpha(-x_2\mathbf{e}_1 + x_1\mathbf{e}_2)$ è conservativo in senso lagrangiano nonostante $\mathbf{F}$ non lo sia in senso tradizionale. Commenti sulla conservazione dell'energia. $\square$

Esempio 15.3. Il campo di forze

$$\mathbf{F} = -\frac{y}{x^2 + y^2}\mathbf{e}_1 + \frac{x}{x^2 + y^2}\mathbf{e}_2,$$

è chiuso ma non conservativo in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Lo è in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \mid x \leq 0\}$, con potenziale dato dall'anomalia polare $\varphi \in (-\pi, \pi)$. $\square$

Esercizio 15.4. 26/620. $\square$

Due casi in cui la forza di Coriolis ha componenti lagrangiane nulle: sistemi con un solo grado di libertà, e punti su piano ruotante intorno a un suo asse.

Esercizio 15.5. 44/630. $\square$

Per casa 15.6. 21, 24/620; 37, 42, 45/630. $\square$

Paragrafi di riferimento sul testo: 7.4, 9.4, 10.1.

16. VENERDÌ 17/11/2017
(AULA 14)

Definizione di corpo rigido non degenerare e degenerare.

Definizione di massa, quantità di moto, momento delle quantità di moto, energia cinetica, centro di massa come integrali.

Esempio 16.1. L'equazione della corda vibrante come esempio di equazione di moto di un continuo non rigido. (Quest'esempio non fa parte del programma.) $\square$

Parametrizzazione di un corpo rigido.

Definizione del tensore d'inerzia di un corpo rigido in un polo Z .

Teorema 16.2. Se O denota l'origine del sistema di riferimento solidale con il rigido, vale

$$\mathbf{L}_Z(t) = \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\omega}(t) + m(\mathbf{X}_G(t) - \mathbf{X}_Z(t)) \times \left[\frac{d\mathbf{X}_O}{dt}(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times (\mathbf{X}_Z(t) - \mathbf{X}_O(t)) \right].$$

Corollario 16.3. Se $\mathbf{X}_Z$ è solidale vale

$$\mathbf{L}_Z(t) = \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\omega}(t) + m(\mathbf{X}_G(t) - \mathbf{X}_Z(t)) \times \frac{d\mathbf{X}_Z}{dt}(t).$$

Se inoltre $\mathbf{X}_Z \equiv \mathbf{X}_G$ o $\frac{d\mathbf{X}_Z}{dt} \equiv 0$ allora

$$\mathbf{L}_Z(t) = \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\omega}(t).$$

Esercizio 16.4. 37/630. $\square$

Paragrafi di riferimento sul testo: 6.1, 6.2, 6.3.

17. LUNEDÌ 20/11/2017
(AULA 16)

Esercizio 17.1. 1/330. □

Teorema 17.2. *Se il polo di σ è O , allora*

$$T(t) = \frac{1}{2} \sigma \omega \cdot \omega + \frac{1}{2} m \left| \frac{d\mathbf{X}_O}{dt} \right|^2 + m \frac{d\mathbf{X}_O}{dt} \cdot \omega \times (\mathbf{X}_G - \mathbf{X}_O).$$

Corollario 17.3. (KÖNIG) *Se $\mathbf{X}_G = \mathbf{X}_O$, allora*

$$T(t) = \frac{1}{2} \sigma \omega \cdot \omega + \frac{1}{2} m \left| \frac{d\mathbf{X}_O}{dt} \right|^2.$$

Se $\dot{\mathbf{X}}_O = 0$, allora

$$T(t) = \frac{1}{2} \sigma \omega \cdot \omega.$$

Esempio 17.4. Calcolo di σ per un disco, di polo il centro. □

Definizione di momento di inerzia e deviatore.

Lemma 17.5. *Se $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ sono solidali allora $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ e $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$ sono costanti.*

Proposizione 17.6. *Se $\mathbf{X}_Z, \mathbf{u}, \mathbf{v}$ sono solidali con il rigido, allora I_{uu} e I_{uv} sono costanti.*

Teorema 17.7. *Valgono per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ coppia di versori ortogonali:*

$$\sigma \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = I_{uu}, \quad \sigma \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = I_{uv}.$$

Esercizio 17.8. 42/630; 5/330. □

Per casa 17.9. 3, 6, 12, 15, 17/330. □

Paragrafi di riferimento sul testo: 6.3, 6.4.

18. VENERDÌ 24/11/2017
(AULA 14)

Richiami sulla rappresentazione di applicazioni lineari come matrici.

Corollario 18.1. *Vale per ogni terna ortonormale $\mathcal{M} = (\mathbf{u}_h)$*

$$\boldsymbol{\sigma}^{\mathcal{M}} = (I_{\mathbf{u}_h \mathbf{u}_k}),$$

cosicché la matrice risulta simmetrica.

Inoltre la matrice è semidefinita positiva, e definita positiva se il rigido non è degenere.

Definizione di vettore principale d'inerzia. Il vettore $\mathbf{v}$ è principale d'inerzia se e solo se è un autovettore di $\boldsymbol{\sigma}$. Definizione di terna principale di inerzia; una terna è principale di inerzia se e solo se la relativa matrice di $\boldsymbol{\sigma}$ è diagonale.

Teorema 18.2. (s.d.) *Esiste almeno una terna solidale $\mathcal{M}$ tale che $\boldsymbol{\sigma}_{\mathcal{M}}$ è diagonale.*

La forma quadratica

$$I_{\mathbf{u}\mathbf{u}} = \sum_{h=1}^3 I_{hh} \beta_h^2, \quad \mathbf{u} = \sum_{h=1}^3 \beta_h \mathbf{u}_h.$$

Proprietà di massimo degli assi principali:

Teorema 18.3. *Sia $\mathcal{M} = (\mathbf{u}_h)$ una terna principale in P . Allora ogni momento d'inerzia relativo a un asse per P soddisfa*

$$\min_{h=1,2,3} I_{hh} \leq I_{\mathbf{u}\mathbf{u}} \leq \max_{h=1,2,3} I_{hh}.$$

Ricerca degli assi principali d'inerzia in presenza di simmetrie materiali, teorema di Huygens (s.d.). Minimo assoluto di un momento principale d'inerzia.

Esempio 18.4. Il caso della lamina: il versore ortogonale $\mathbf{u}_3$ è principale; proprietà di massimo e minimo dei momenti, formula

$$I_{33} = I_{11} + I_{22}.$$

□

Esercizio 18.5. 46/330.

□

Paragrafi di riferimento sul testo: 6.4, 6.5, 6.6.

19. LUNEDÌ 27/11/2017
(AULA 16)

Esempi di ricerca di assi principali: sfera, cubo, lamina quadrata e rettangolare.

Teorema 19.1. *Assumiamo che gli assi siano principali.*

1) Se $I_{11} = I_{22} = I_{33}$, tutte le direzioni sono principali con uguale momento d'inerzia.

2) Se $I_{11} = I_{22}$, tutte le direzioni del piano generato da $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ sono principali con uguale momento d'inerzia.

La ipotesi dei lavori virtuali per i corpi rigidi (non degeneri e degeneri).

Esercizio 19.2. 38/620. □

Definizioni di $\mathbf{F}^{\text{ext}}$ e $\mathbf{M}_Z^{\text{ext}}$.

Teorema 19.3. (I EQUAZIONE CARDINALE) *Per un corpo rigido libero l'ipotesi dei lavori virtuali implica*

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}^{\text{ext}}.$$

Lemma 19.4. (s.d.) *Consideriamo un sistema rigido con un punto solidale fisso O ; fissiamo $\mathbf{q}_0 \in Q$. Allora per ogni $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^3$ fissato, esistono $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \in \mathbb{R}$ tali che per ogni $\lambda \in \mathbb{R}^3$*

$$\sum_{h=1}^3 \frac{\partial \mathbf{X}^L}{\partial q_h}(\mathbf{q}_0; \lambda) \mu_h = \mathbf{g} \times \mathbf{X}^L(\mathbf{q}_0; \lambda).$$

Teorema 19.5. (II EQUAZIONE CARDINALE) *Per un corpo rigido con un punto solidale fisso O l'ipotesi dei lavori virtuali implica*

$$\frac{d\mathbf{L}_O}{dt} = \mathbf{M}_O^{\text{ext}}.$$

Esercizio 19.6. 5/630. □

Per casa 19.7. 58/620; 27, 61/630; 28/660. □

Paragrafi di riferimento sul testo: 6.5, 8.1, 8.3, 8.4.

20. VENERDÌ 01/12/2017
(AULA 14)

Teorema 20.1. *L'energia cinetica in forma lagrangiana ha la struttura*

$$T_1^L + T_2^L,$$

con T_1^L polinomio di primo grado nelle $\dot{q}_h$, e T_2^L forma quadratica nelle $\dot{q}_h$. Inoltre $T_1^L \equiv 0$ se i vincoli sono fissi.

Teorema 20.2. *La matrice della forma quadratica T_2^L è simmetrica e definita positiva.*

Teorema 20.3. *Le equazioni di Lagrange si possono mettere in forma normale nelle $\ddot{\mathbf{q}}$.*

Perciò per le equazioni di Lagrange valgono gli usuali risultati di esistenza, unicità, dipendenza continua e stabilità visti per e.d.o. in forma normale.

Esercizio 20.4. 34/340; 8/660. □

Paragrafi di riferimento sul testo: 9.2.

21. LUNEDÌ 04/12/2017
(AULA 16)

Teorema 21.1. (EQUAZIONI DI EULERO) *Vale sotto l'ipotesi dei lavori virtuali per un rigido con un punto solidale fisso O*

$$\boldsymbol{\sigma}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\omega} = \mathbf{M}_O^{\text{ext}}, \quad (21.1)$$

ove $\boldsymbol{\sigma}$ ha polo O .

Corollario 21.2. *In componenti (in una terna principale $(\mathbf{u}_h)$) la (21.1) implica*

$$\begin{aligned} I_{11}\dot{\omega}_1 &= (I_{22} - I_{33})\omega_2\omega_3 + \mathbf{M}_O^{\text{ext}} \cdot \mathbf{u}_1, \\ I_{22}\dot{\omega}_2 &= (I_{33} - I_{11})\omega_1\omega_3 + \mathbf{M}_O^{\text{ext}} \cdot \mathbf{u}_2, \\ I_{33}\dot{\omega}_3 &= (I_{11} - I_{22})\omega_1\omega_2 + \mathbf{M}_O^{\text{ext}} \cdot \mathbf{u}_3. \end{aligned}$$

Il sistema delle equazioni di Eulero come sistema differenziale del secondo ordine nelle coordinate lagrangiane, o come sistema del primo ordine nelle ω_h se $\mathbf{M}_O^{\text{ext}}$ dipende solo da $\boldsymbol{\omega}$.

Energia cinetica nei moti polari:

$$T = \frac{1}{2} I_{\mathbf{u}(t)\mathbf{u}(t)} |\boldsymbol{\omega}(t)|^2,$$

se $\mathbf{u}$ è il versore di $\boldsymbol{\omega}$.

Esercizio 21.3. 1, 14, 17, 28/450. □

Per casa 21.4. 3, 4, 7, 15, 27, 47/450. □

Paragrafi di riferimento sul testo: 11.1.

22. MARTEDÌ 12/12/2017
(AULA 14)

Definizione di moti polari per inerzia.

Teorema 22.1. *In un moto polare per inerzia di polo O valgono i due integrali primi*

$$\mathbf{L}_O(t) = \mathbf{L}_O(0), \quad T(t) = T(0), \quad t \in I.$$

Definizione di ellissoide d'inerzia solidale e di ellissoide d'inerzia mobile.

Lemma 22.2. (s.d.) *La normale all'ellissoide d'inerzia nel punto $\mathbf{x}$ è data da $\boldsymbol{\sigma}\mathbf{x}$.*

Teorema 22.3. (s.d.) (MOTO ALLA POINSOT) *In un moto polare per inerzia l'ellissoide d'inerzia si muove mantenendosi tangente a un piano fisso di normale $\mathbf{L}_O(0)$. Il moto è di rotolamento puro (cioè il punto di contatto ha velocità istantanea nulla).*

Definizione di polodia ed erpolodia. Diagramma delle polodie in ellipsoidi sferici, di rotazione e generici.

Teorema 22.4. (s.d.) *Le sole rotazioni per inerzia sono quelle intorno agli assi principali (e sono uniformi).*

Definizione di contatto senza strisciamento; vincolo di rotolamento puro.

Esercizio 22.5. 42/620; 35/450. □

Per casa 22.6. 43/620. □

Paragrafi di riferimento sul testo: 4.9, 11.2.

23. VENERDÌ 15/12/2017
(AULA 14)

Piccole oscillazioni in punti di equilibrio con hessiana del potenziale definita negativa. Lagrangiana ridotta.

Teorema di esistenza delle coordinate normali (s.d.).

Metodo diretto per il calcolo delle frequenze normali.

Esercizio 23.1. 10/680. □

Teorema 23.2. (s.d.) *Se due lagrangiane $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ soddisfano*

$$\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2 + \frac{d}{dt}F(q, t),$$

allora danno luogo a equazioni di Lagrange equivalenti.

Esempio 10.22 degli Appunti.

Per casa 23.3. 5, 25, 27/680. □

Paragrafi di riferimento sul testo: 10.2, 10.3.

24. LUNEDÌ 18/12/2017
(AULA 16)

Campo delle velocità di trascinamento.

Definizione di asse istantaneo di moto e di istantanea rotazione.

Teorema sull'esistenza dell'asse istantaneo di moto (s.d.).

Definizione di rigata fissa, solidale, mobile.

Moti rigidi piani: piani rappresentativi. Base e rulletta.

Esercizio 24.1. 23/630. □

Atti di moto; atti di moto lagrangiani.

Esercizio 24.2. Effetto deviatore dei momenti deviatori: rotazione intorno a un asse non principale: 27/450. □

Paragrafi di riferimento sul testo: 2.3, 2.6, 2.7, 4.3, 9.3.

FINE DEL CORSO