

**DIARIO DELLE LEZIONI DEL CORSO DI
MECCANICA RAZIONALE A.A. 2016/2017
CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA**

DANIELE ANDREUCCI
DIP. SCIENZE DI BASE E APPLICATE PER L'INGEGNERIA
UNIVERSITÀ LA SAPIENZA
VIA A.SCARPA 16, 00161 ROMA, ITALY

Le dimostrazioni fanno parte del programma, salvo che quando viene esplicitamente indicato il contrario con il simbolo (s.d.).

I richiami al testo si riferiscono alla *Versione preliminare* degli Appunti del corso, pubblicata sul sito del corso prima dell'inizio del corso. La numerazione n/m relativa agli esercizi si riferisce all'esercizio n del gruppo m , nella raccolta pubblicata sul sito del corso prima dell'inizio del corso.

1. LUNEDÌ 4/10/2015

Presentazione del corso.

Equazioni alle derivate ordinarie del primo ordine.

Problema di Cauchy, istante iniziale, dato iniziale, punto iniziale.

Funzioni localmente lipschitziane e derivabilità. Controesempio all'unicità: $\dot{\varphi} = \varphi^{2/3}$.

Definizione di dipendenza continua delle soluzioni dal dato iniziale.

Teorema di esistenza unicità e dipendenza continua.

Esempio 1.1. Motivazione della limitatezza dell'intervallo richiesta nella definizione di dipendenza continua; caso di

$$\dot{\varphi} = \varphi, \quad \varphi(0) = c.$$

□

Esempio 1.2. Soluzioni con intervalli di definizione dipendenti dal dato iniziale: $\dot{x} = x^2$. □

Esempio 1.3. (Lemma di Gronwall) Se

$$\dot{\varphi} \leq A\varphi + B, \quad t \geq 0, \quad \varphi \geq 0,$$

con $A, B > 0$, allora

$$A\varphi(t) + B \leq e^{At}(A\varphi(0) + B), \quad t \geq 0.$$

□

Per casa 1.4. 1, 2, 3, 4/100. □

Paragrafi di riferimento sul testo: 1.1.

2. MERCOLEDÌ 5/10/2016

Soluzioni massimali. Comportamento delle soluzioni massimali negli estremi dell'intervallo di definizione.

Sistemi autonomi.

Se $\varphi(t)$ è soluzione di un sistema autonomo, $\varphi(t+\bar{t})$ è ancora soluzione.

Teorema 2.1. *Se φ è soluzione di un sistema autonomo e $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$, $t_2 > t_1$, allora φ è periodica di periodo $t_2 - t_1$. Se inoltre $N = 1$ allora φ è costante.*

Definizione di punto di equilibrio $\mathbf{y}_{\text{eq}}$ per un sistema autonomo.

Lemma 2.2. *Se φ risolve un sistema autonomo e $\varphi(t) \rightarrow \mathbf{y}_{\text{eq}}$ per $t \rightarrow \beta-$, allora $\beta = +\infty$.*

Lemma 2.3. *Se φ risolve un sistema autonomo e $\varphi(t) \rightarrow \mathbf{y}_0$, con $\mathbf{y}_0$ non di equilibrio, per $t \rightarrow \beta-$, allora $\beta < +\infty$.*

Definizione di punto di equilibrio stabile e instabile.

Esercizio 2.4. Studio della stabilità per $\dot{\varphi} = \varphi$, $\dot{\varphi} = -\varphi$,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1, \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1, \end{cases}$$

□

Per casa 2.5. Studiare la stabilità dei punti di equilibrio di

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2, \end{cases} \quad \dot{x} = \cos(x), \quad \dot{x} = x(x-1) \quad \dot{x} = x(1-x).$$

□

Paragrafi di riferimento sul testo: 1.2.

3. GIOVEDÌ 6/10/2016

Funzioni di Liapunov.

Teorema 3.1. (LIAPUNOV) *Se il sistema del primo ordine $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{F}(\mathbf{y})$ ammette una funzione di Liapunov nel punto di equilibrio $\mathbf{y}_{\text{eq}}$, allora $\mathbf{y}_{\text{eq}}$ è stabile.*

Esercizio 3.2. Risoluzione di esercizi assegnati nell'ultima lezione.
Uso del

Teorema 3.3. *Se $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ e sia φ che $\dot{\varphi}$ hanno limite finito per $t \rightarrow +\infty$, allora il limite di $\dot{\varphi}$ è 0.*

□

Cenno alla risoluzione del sistema

$$\dot{\varphi} = \mathbf{A}\varphi,$$

con il metodo della ricerca degli autovettori. Conseguenze per lo studio della stabilità.

Esercizio 3.4. Risoluzione con il metodo degli autovettori del sistema

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2,$$

$$\dot{x}_2 = x_1 + x_2.$$

□

Riduzione di sistemi di secondo ordine a sistemi di primo ordine.

Punti di equilibrio e di equilibrio stabile per sistemi del secondo ordine.

Teorema 3.5. (DIRICHLET) *Se un sistema autonomo del secondo ordine è nella forma*

$$\ddot{\mathbf{z}} = \nabla U(\mathbf{z}),$$

e U ha in $\mathbf{z}_{\text{eq}}$ un massimo isolato, allora $\mathbf{z}_{\text{eq}}$ è stabile.

Paragrafi di riferimento sul testo: 1.1, 1.3, 1.4.

4. MARTEDÌ 11/10/2016

Definizione di orbita di un sistema del I ordine.

Teorema 4.1. *Se un'orbita di un sistema autonomo si autointerseca, allora corrisponde a una soluzione periodica.*

Teorema 4.2. *Se due orbite di un sistema autonomo si intersecano allora coincidono.*

Esercizio 4.3. 2/120: conservazione dell'energia in presenza di forze non conservative tali che $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = 0$. □

Per casa 4.4. 1, 3, 7/120. □

Caso delle equazioni scalari del II ordine; conservazione dell'energia.
Piano delle fasi; equazione delle orbite

$$p = \pm \sqrt{\frac{2}{m}[E + U(x)]}.$$

Riconoscimento di punti stabili e instabili. Verso di percorrenza delle orbite; punti di inversione del moto, orbite degeneri.

Esercizio 4.5. 1) Piano delle fasi dell'oscillatore armonico.
2) Piano delle fasi del pendolo fisico. □

Per casa 4.6. 1, 6, 13, 14/150. □

Paragrafi di riferimento sul testo: 1.5.

5. MERCOLEDÌ 12/10/2016

Esercizio 5.1. 6, 14/150. □

Definizione di moto, velocità, accelerazione.

Esempi di moti e loro parametrizzazione: quiete, moti rettilinei e circolari in $\mathbb{R}^3$.

Moto in coordinate polari. Velocità e accelerazione radiale e trasversa.
Definizione di moto armonico.

Per casa 5.2. Dimostrare che i moti armonici sono piani. □

Esercizio 5.3. 1, 7/120. □

Paragrafi di riferimento sul testo: 2.1, esempio 4.12.

6. GIOVEDÌ 13/10/2016

Terne mobili. Calcolo di terne mobili a partire da un versore mobile assegnato.

Definizione di derivata relativa a una terna mobile $\mathcal{M} = (\mathbf{u}_i)$.

Proprietà elementari della derivata relativa: linearità, regole di Leibniz.

Definizione di vettore costante in una terna mobile.

Proposizione 6.1. *Un vettore è costante in una terna mobile se e solo se la sua derivata relativa a quella terna è nulla.*

Teorema 6.2. *Esiste un unico vettore $\boldsymbol{\omega}$ tale che per ogni $\mathbf{f}$*

$$\frac{d\mathbf{f}}{dt} = \left[\frac{d\mathbf{f}}{dt} \right]_{\mathcal{M}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{f}.$$

Il teorema discende dal

Lemma 6.3. *Esiste un unico vettore $\boldsymbol{\omega}$ tale che per ogni $\mathbf{f}$*

$$\frac{d\mathbf{u}_i}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Esempio 6.4. Calcolo della velocità angolare per una terna che si muove di rotazione intorno a un suo versore. $\square$

Teorema 6.5. *Vale*

$$\left[\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \right]_{\mathcal{M}} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}.$$

*Inoltre: 1) $\boldsymbol{\omega}$ è costante in $\mathcal{M}$ se e solo se è costante nella terna fissa;
2) $\boldsymbol{\omega}$ ha direzione costante in $\mathcal{M}$ se e solo se ha direzione costante nella terna fissa.*

Esercizio 6.6. 31/340. $\square$

Paragrafi di riferimento sul testo: 2.2.

7. MARTEDÌ 18/10/2016

Esempio 7.1. 1) $\boldsymbol{\omega} = F(t)\mathbf{u}_3$ corrisponde a una rotazione.

2) $\boldsymbol{\omega} = F(t)\mathbf{e}_3$ corrisponde a una rotazione. □

Definizioni di sistema di riferimento mobile, di velocità relativa e di accelerazione relativa.

Espressioni di velocità e accelerazione relativa in componenti.

Teorema di scomposizione della velocità.

Teorema (di Coriolis) di scomposizione dell'accelerazione.

Definizione di moto solidale con $\mathcal{S}$. Formula di scomposizione della velocità per moti solidali.

Velocità e accelerazione di trascinamento e di Coriolis. Campo di velocità di trascinamento.

Esercizio 7.2. 11, 13 (modificato), 17/340. □

Per casa 7.3. 18, 21, 23/340. □

Paragrafi di riferimento sul testo: 2.3.

8. GIOVEDÌ 20/10/2016

Definizione di moto polare, traslazione, rotazione e rotazione uniforme.
Velocità angolare di una terna relativa a un'altra.
Applicazioni alle formule di cambiamento di sistema di riferimento.

Teorema 8.1.

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{MN}} = -\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{NM}}.$$

Teorema 8.2. (COMPOSIZIONE DI VELOCITÀ ANGOLARI)

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{PN}} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{PM}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{MN}}.$$

Esempio 8.3. Calcolo della velocità angolare di una terna con un vettore che ruota secondo una legge assegnata. $\square$

Esercizio 8.4. 26, 28/340. $\square$

Per casa 8.5. 1) 27/340.

2) Se le due funzioni $\mathbf{f}_i$ $i = 1, 2$ soddisfano

$$\frac{d\mathbf{f}_i}{dt} = \mathbf{u} \times \mathbf{f}_i, \quad i = 1, 2,$$

calcolare

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_2).$$

$\square$

Paragrafi di riferimento sul testo: 2.4.

9. MARTEDÌ 25/10/2016

Teorema 9.1. *Data una terna mobile $\mathcal{M}$, $\mathbf{f} \in C^0(I)$ e una terna ortonormale positiva $(\mathbf{w}_{0i})$ esiste unica la terna $\mathcal{N}$ che ha $\mathbf{f}$ come velocità angolare relativa $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{MN}}$ e $(\mathbf{w}_{0i})$ come posizione iniziale.*

Teorema 9.2. *Data una terna mobile $\mathcal{M}$, $\mathbf{f} \in C^0(I \times \mathbb{R}^9)$, localmente lipschitziana nelle ultime 9 variabili, e una terna ortonormale positiva $(\mathbf{w}_{0i})$ esiste unica la terna $\mathcal{N} = (\mathbf{w}_h)$ che ha $\mathbf{f}(t, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3)$ come velocità angolare relativa $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{MN}}$ e $(\mathbf{w}_{0i})$ come posizione iniziale.*

Curve regolari. Definizione. Supporto della curva.

Ascissa curvilinea. Riparametrizzazione con l'ascissa curvilinea.

Curvatura, raggio di curvatura.

Terna intrinseca (o triedro principale) ove $k \neq 0$.

Formule di Frenet-Serret.

Curve e cinematica: traiettoria di $\mathbf{X}$ come supporto $\mathbf{X}(I)$.

Velocità e accelerazione scomposte nella terna intrinseca.

Esercizio 9.3. 21/340; 3/560. □

Paragrafi di riferimento sul testo: 2.5, 3.1, 3.2, 3.3.

10. MERCOLEDÌ 26/10/2016

Teorema 10.1. *Se una curva ha curvatura nulla nell'intervallo (α, β) , per $s \in (\alpha, \beta)$ è una parte di retta, e viceversa.*

Teorema 10.2. *Se una curva ha curvatura positiva e torsione nulla nell'intervallo (α, β) , per $s \in (\alpha, \beta)$ giace su un piano, e viceversa.*

Teorema 10.3. *La velocità angolare della terna intrinseca $(\mathbf{T}(s(t)), \mathbf{N}(s(t)), \mathbf{B}(s(t)))$ è $\boldsymbol{\omega} = \dot{s}[-\tau\mathbf{T} + k\mathbf{B}]$.*

Dinamica relativa: forze di Coriolis $\mathbf{F}_C$ e di trascinamento $\mathbf{F}_T$.
L'equazione del moto nel sistema mobile $\mathcal{S}$

$$m\mathbf{a}_S = \mathbf{F} + \mathbf{F}_T + \mathbf{F}_C.$$

Esercizio 10.4. 1, 3/350. □

Per casa 10.5. 4/350; 1, 5/580; 1/620. □

Paragrafi di riferimento sul testo: 3.3, 5.1, 5.3, 5.4, 5.5.

11. GIOVEDÌ 27/10/2016

Esercitazione: 1/580.

Esercizio 11.1. 23/340.

□

12. MERCOLEDÌ 2/11/2016

Vincoli olonomi.

Definizione. Significato geometrico della definizione.

Esempio della sfera intersecata dal piano; vari casi possibili.

Coordinate indipendenti. Gradi di libertà.

Vincoli fissi e mobili.

Esercizio 12.1. 15/560; 4/580.

□

Paragrafi di riferimento sul testo: 4.1, 4.2.

13. GIOVEDÌ 3/11/2016

Atti di moto di un sistema vincolato; non sono arbitrari.

Coordinate lagrangiane.

Esempi di coordinate lagrangiane sulla sfera.

Definizione di coordinate locali per un sistema rigido non degenerare.

Non esistenza di coordinate globali.

Coordinate locali canoniche.

Velocità in coordinate lagrangiane.

Paragrafi di riferimento sul testo: 4.3, 4.4, 4.6, 7.1.

14. GIOVEDÌ 3/11/2016

Esercizio 14.1. 1/620 (con equazione del moto proiettata su versori tangente e normale); 8/350; 3/620.

□

15. MARTEDÌ 8/11/2015

Rappresentazione di tutti i moti solidali con un sistema rigido in termini delle coordinate locali.

Coordinate locali: il caso del punto; il caso dell'asta rigida (rigido degenere).

Lemma 15.1. *Dato un vettore $\mathbf{u} \in C^1(I)$ esiste un unico $\tilde{\boldsymbol{\omega}} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che*

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \tilde{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{u}, \quad \tilde{\boldsymbol{\omega}} \cdot \mathbf{u} = 0.$$

Velocità in coordinate lagrangiane.

Definizione di lavoro di una forza lungo un moto.

Conservazione dell'energia in presenza di forze conservative e di altre che non fanno lavoro.

Esercizio 15.2. 10, 16/620 (senza equazioni di Lagrange). □

Paragrafi di riferimento sul testo: 4.6, 4.7, 5.2.

16. MERCOLEDÌ 9/11/2016

L'ipotesi dei lavori virtuali per un sistema di punti materiali sottoposto a vincoli olonomi. Discussione.

Teorema 16.1. *Per un punto materiale libero l'ipotesi dei lavori virtuali implica*

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}.$$

Esempio 16.2. Esempio di applicazione dell'ipotesi dei lavori virtuali a:

- 1) sistema costituito da due punti vincolati a restare alla stessa quota;
- 2) sistema costituito da due punti vincolati a restare nel piano $x_3 = 0$ e alla distanza fissa R tra di loro. □

Spostamenti virtuali: gli spazi W e V . Vincoli fissi e mobili.

Paragrafi di riferimento sul testo: 8.1, 8.2, 8.5.

17. GIOVEDÌ 10/11/2016

Spostamenti virtuali, velocità virtuali, lavori virtuali: esempio del punto vincolato a una superficie mobile. Spazi V e W .

Teorema 17.1. $V^\perp = W$, $W^\perp = V$.

Equazioni di Lagrange (per sistemi di punti materiali) come conseguenza dell'ipotesi dei lavori virtuali.

Esercizio 17.2. 34/620. □

Per casa 17.3. 12, 21, 27, 37, 57/620. □

Paragrafi di riferimento sul testo: 8.5, 9.1.

18. MARTEDÌ 15/11/2016

Forze conservative per sistemi di punti materiali. Potenziale.
Componenti lagrangiane delle forze conservative. Potenziale lagrangiano.

Teorema 18.1. *Se le forze sono conservative, anche le componenti lagrangiane delle forze lo sono, e il potenziale lagrangiano si ottiene dal potenziale composto con la rappresentazione lagrangiana.*

Se $\ell = 1$ il sistema di forze è sempre conservativo in senso lagrangiano.

Esempio 18.2. Sia P un punto materiale di massa m vincolato a una circonferenza, soggetto a una forza $\mathbf{F} = \lambda \mathbf{T}$, $\lambda > 0$. Riconoscere che $\mathbf{F}$ non è conservativa, ma la componente lagrangiana delle forze lo è. □

Definizione di funzione lagrangiana. Le equazioni di Lagrange scritte mediante la funzione lagrangiana (“caso conservativo”).

Esercizio 18.3. 10/350; 21/620. □

Paragrafi di riferimento sul testo: 7.4, 10.1.

19. MERCOLEDÌ 16/11/2016

Equazioni di Lagrange in sistemi di riferimento mobili.

Due casi in cui la forza di Coriolis ha componenti lagrangiane nulle: sistemi con un solo grado di libertà, e punti su piano ruotante intorno a un suo asse.

Esercizio 19.1. 10/350 (con vincolo liscio).
37/620.

□

Paragrafi di riferimento sul testo: 9.4.

20. GIOVEDÌ 17/11/2016

Esempio 20.1. L'equazione della corda vibrante come esempio di equazione di moto di un continuo non rigido. (Quest'esempio non fa parte del programma.)

□

Definizioni di corpo rigido non degenerare e degenerare rettilineo. Parametrizzazione di un corpo rigido.

Esempio 20.2. Esempi di moti rigidi:

- 1) Disco che trasla ortogonalmente al suo piano, di moto armonico.
- 2) Circonferenza che ruota intorno a un suo diametro con velocità angolare costante.

□

Definizioni di massa, quantità di moto, energia cinetica di un corpo rigido come integrali (nel senso opportuno).

Esercizio 20.3. 1/330 (anche nel caso in cui il disco non ruoti intorno al proprio asse); usando la definizione di T .

□

Paragrafi di riferimento sul testo: 6.1, 6.2.

Definizioni di momento delle quantità di moto e centro di massa di un corpo rigido.

Definizione del tensore d'inerzia di un corpo rigido in un polo Z .

Teorema 21.1. *Se O denota l'origine del sistema di riferimento solidale con il rigido, vale*

$$\mathbf{L}_Z(t) = \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\omega}(t) + m(\mathbf{X}_G(t) - \mathbf{X}_Z(t)) \times \left[\frac{d\mathbf{X}_O}{dt}(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times (\mathbf{X}_Z(t) - \mathbf{X}_O(t)) \right].$$

Corollario 21.2. *Se $\mathbf{X}_Z$ è solidale vale*

$$\mathbf{L}_Z(t) = \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\omega}(t) + m(\mathbf{X}_G(t) - \mathbf{X}_Z(t)) \times \frac{d\mathbf{X}_Z}{dt}(t).$$

Se inoltre $\mathbf{X}_Z \equiv \mathbf{X}_G$ o $\frac{d\mathbf{X}_Z}{dt} \equiv 0$ allora

$$\mathbf{L}_Z(t) = \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\omega}(t).$$

Teorema 21.3. (s.d.) *Se il polo di $\boldsymbol{\sigma}$ è O , allora*

$$T(t) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2}m \left| \frac{d\mathbf{X}_O}{dt} \right|^2 + m \frac{d\mathbf{X}_O}{dt} \cdot \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{X}_G - \mathbf{X}_O).$$

Corollario 21.4. (KÖNIG) *Se $\mathbf{X}_G = \mathbf{X}_O$, allora*

$$T(t) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2}m \left| \frac{d\mathbf{X}_O}{dt} \right|^2.$$

Se $\dot{\mathbf{X}}_O = 0$, allora

$$T(t) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}.$$

Esempio 21.5. 1) Calcolo di $\boldsymbol{\sigma}$ per una sfera piena, di polo il centro.
2) Calcolo di $\boldsymbol{\sigma}$ per una lamina quadrata, di polo il centro. $\square$

Paragrafi di riferimento sul testo: 6.2, 6.3.

22. MERCOLEDÌ 23/11/2016

Richiami sulla rappresentazione di applicazioni lineari come matrici.
Definizione di momento di inerzia e deviatore.

Proposizione 22.1. *Se $\mathbf{X}_Z$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ sono solidali con il rigido, allora I_{uu} e I_{uv} sono costanti.*

Teorema 22.2. *Valgono per ogni $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ coppia di versori ortogonali:*

$$\boldsymbol{\sigma} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = I_{uu}, \quad \boldsymbol{\sigma} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = I_{uv}.$$

Corollario 22.3. *Vale per ogni terna ortonormale $\mathcal{M} = (\mathbf{u}_h)$*

$$\boldsymbol{\sigma}^{\mathcal{M}} = (I_{\mathbf{u}_h \mathbf{u}_k}),$$

cosicché la matrice risulta simmetrica.

Inoltre la matrice è semidefinita positiva, e definita positiva se il rigido non è degenerare.

Momenti d'inerzia e deviatori calcolati come integrali in coordinate solidali.

Esercizio 22.4. 3, 5/330. □

Paragrafi di riferimento sul testo: 6.4.

Definizione di vettore principale d'inerzia. Il vettore $\mathbf{v}$ è principale d'inerzia se e solo se è un autovettore di $\boldsymbol{\sigma}$. Definizione di terna principale di inerzia; una terna è principale di inerzia se e solo se la relativa matrice di $\boldsymbol{\sigma}$ è diagonale.

Teorema 23.1. (s.d.) *Esiste almeno una terna solidale $\mathcal{M}$ tale che $\boldsymbol{\sigma}_{\mathcal{M}}$ è diagonale.*

La forma quadratica

$$I_{\mathbf{u}\mathbf{u}} = \sum_{h=1}^3 I_{hh} \beta_h^2, \quad \mathbf{u} = \sum_{h=1}^3 \beta_h \mathbf{u}_h.$$

Proprietà di massimo degli assi principali:

Teorema 23.2. *Sia $\mathcal{M} = (\mathbf{u}_h)$ una terna principale in P . Allora ogni momento d'inerzia relativo a un asse per P soddisfa*

$$\min_{h=1,2,3} I_{hh} \leq I_{\mathbf{u}\mathbf{u}} \leq \max_{h=1,2,3} I_{hh}.$$

Se $I_{11} = I_{22}$ allora $I_{\mathbf{u}\mathbf{u}} = I_{11}$ per ogni versore combinazione lineare di $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$.

Se $I_{11} = I_{22} = I_{33}$ allora $I_{\mathbf{u}\mathbf{u}} = I_{11}$ per ogni versore.

Ricerca degli assi principali d'inerzia in presenza di simmetrie materiali, teorema di Huygens (s.d.).

Esempio 23.3. Ricerca di terne principali per la sfera, il cubo e il cono. □

Esempio 23.4. Il caso della lamina: il versore ortogonale $\mathbf{u}_3$ è principale; proprietà di massimo e minimo dei momenti, formula

$$I_{33} = I_{11} + I_{22}.$$

Ricerca degli assi principali per il quadrato e per il rettangolo. □

Esercizio 23.5. 15/330. □

Per casa 23.6. Calcolo degli assi principali di inerzia nel vertice del rettangolo. □

Paragrafi di riferimento sul testo: 6.4, 6.5, 6.6.

24. MARTEDÌ 29/11/2016

Ipotesi dei lavori virtuali per un sistema di corpi rigidi; analogia con il caso dei punti materiali. Le equazioni di Lagrange.

Distribuzioni di forze su corpi rigidi (più precisamente sullo spazio delle coordinate solidali associato). Passaggio alle coordinate lagrangiane. Componenti lagrangiane delle forze.

Esercizio 24.1. 29/330; 38/620. □

Paragrafi di riferimento sul testo: 7.3, 8.1, 9.1.

25. MERCOLEDÌ 30/11/2016

Definizioni di $\mathbf{F}^{\text{ext}}$ e $\mathbf{M}_Z^{\text{ext}}$.

Teorema 25.1. (I EQUAZIONE CARDINALE) *Per un corpo rigido libero l'ipotesi dei lavori virtuali implica*

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}^{\text{ext}}.$$

Teorema 25.2. (II EQUAZIONE CARDINALE) *Per un corpo rigido con un punto solidale fisso O l'ipotesi dei lavori virtuali implica*

$$\frac{d\mathbf{L}_O}{dt} = \mathbf{M}_O^{\text{ext}}.$$

Teorema 25.3. *La velocità angolare della terna intrinseca $(\mathbf{T}(s(t)), \mathbf{N}(s(t)), \mathbf{B}(s(t)))$ è*

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{s}(t)[- \tau(s(t))\mathbf{T}(s(t)) + k(s(t))\mathbf{B}(s(t))].$$

Esercizio 25.4. 43/330. □

Paragrafi di riferimento sul testo: 3.3, 8.1, 8.3, 8.4.

26. GIOVEDÌ 1/12/2016

Teorema 26.1. *L'energia cinetica in forma lagrangiana ha la struttura*

$$T_1^L + T_2^L,$$

con T_1^L polinomio di primo grado nelle $\dot{q}_h$, e T_2^L forma quadratica nelle $\dot{q}_h$. Inoltre $T_1^L \equiv 0$ se i vincoli sono fissi.

Teorema 26.2. *La matrice della forma quadratica T_2^L è simmetrica e semidefinita positiva.*

Distribuzioni di forze conservative in senso tradizionale e relative distribuzioni di potenziale. Dal potenziale tradizionale a quello lagrangiano.

Esercizio 26.3. 2, 5/660. □

Paragrafi di riferimento sul testo: 7.3, 9.2.

27. MARTEDÌ 6/12/2016

Teorema 27.1. *La matrice della forma quadratica T_2^L è definita positiva.*

Teorema 27.2. *Le equazioni di Lagrange si possono mettere in forma normale nelle $\ddot{\mathbf{q}}$. Se i vincoli sono fissi in particolare si ha*

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathcal{A}^{-1} \mathbf{F} + \mathbf{g},$$

ove $\mathcal{A} = (a_{hk}(\mathbf{q}, t))$ è la matrice della forma T_2^L , $\mathbf{F} = (Q_h)$ è il vettore delle componenti lagrangiane delle forze, e $\mathbf{g}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, ha componenti date da forme quadratiche nelle $\dot{\mathbf{q}}$.

Perciò per le equazioni di Lagrange valgono gli usuali risultati di esistenza, unicità, dipendenza continua e stabilità visti per e.d.o. in forma normale.

Esercizio 27.3. 32/630, 3/660. □

Paragrafi di riferimento sul testo: 9.2.

28. MERCOLEDÌ 7/12/2016

Teorema 28.1. (EQUAZIONI DI EULERO) *Vale sotto l'ipotesi dei lavori virtuali per un rigido con un punto solidale fisso O*

$$\boldsymbol{\sigma}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\omega} = \mathbf{M}_O^{\text{ext}}, \quad (28.1)$$

ove $\boldsymbol{\sigma}$ ha polo O .

Esempio 28.2. Effetto deviatore dei momenti deviatori: rotazione intorno a un asse non principale. $\square$

Corollario 28.3. *In componenti (in una terna principale $(\mathbf{u}_h)$) la (28.1) implica*

$$I_{11}\dot{\omega}_1 = (I_{22} - I_{33})\omega_2\omega_3 + \mathbf{M}_O^{\text{ext}} \cdot \mathbf{u}_1,$$

$$I_{22}\dot{\omega}_2 = (I_{33} - I_{11})\omega_1\omega_3 + \mathbf{M}_O^{\text{ext}} \cdot \mathbf{u}_2,$$

$$I_{33}\dot{\omega}_3 = (I_{11} - I_{22})\omega_1\omega_2 + \mathbf{M}_O^{\text{ext}} \cdot \mathbf{u}_3.$$

Il sistema delle equazioni di Eulero come sistema differenziale del secondo ordine nelle coordinate lagrangiane, o come sistema del primo ordine nelle ω_h se $\mathbf{M}_O^{\text{ext}}$ dipende solo da $\boldsymbol{\omega}$.

Esercizio 28.4. 1, 3/450. $\square$

Applicazione delle equazioni di Eulero ai moti di rotazione.

Per casa 28.5. 52, 54, 56/450. $\square$

Paragrafi di riferimento sul testo: 11.1.

29. MARTEDÌ 13/12/2016

Definizione di moti polari per inerzia.

Teorema 29.1. *In un moto polare per inerzia di polo O valgono i due integrali primi*

$$\mathbf{L}_O(t) = \mathbf{L}_O(0), \quad T(t) = T(0), \quad t \in I.$$

Definizione di ellissoide d'inerzia solidale e di ellissoide d'inerzia mobile.

Lemma 29.2. (s.d.) *La normale all'ellissoide d'inerzia nel punto $\mathbf{x}$ è data da $\boldsymbol{\sigma}\mathbf{x}$.*

Teorema 29.3. (s.d.) (MOTO ALLA POINSOT) *In un moto polare per inerzia l'ellissoide d'inerzia si muove mantenendosi tangente a un piano fisso. Il moto è di rotolamento puro (cioè il punto di contatto ha velocità istantanea nulla).*

Definizione di polodia ed erpolodia.

Definizione di contatto senza strisciamento; vincolo di rotolamento puro.

Esercizio 29.4. 42/620. □

Per casa 29.5. 43/620. □

Paragrafi di riferimento sul testo: 4.9, 11.2.

30. MERCOLEDÌ 14/12/2016

Piccole oscillazioni in punti di equilibrio con hessiana del potenziale definita negativa. Lagrangiana ridotta.

Metodo diretto per il calcolo delle frequenze normali.

Teorema di esistenza delle coordinate normali.

Esercizio 30.1. 10/680. □

Per casa 30.2. 16, 24, 25/680. □

Paragrafi di riferimento sul testo: 10.2.

31. GIOVEDÌ 15/12/2016

Definizione di coordinate lagrangiane cicliche e integrali primi associati.

Teorema 31.1. (s.d.) *Se due lagrangiane $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ soddisfano*

$$\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2 + \frac{d}{dt}F(q, t),$$

allora danno luogo a equazioni di Lagrange equivalenti.

Definizione di asse istantaneo di moto e di istantanea rotazione.

Teorema sull'esistenza dell'asse di istantanea rotazione (s.d.).

Definizione di rigata fissa, solidale, mobile.

Moti rigidi piani: piani rappresentativi. Base e rulletta.

Esercizio 31.2. 13/630, 26/450.

□

Paragrafi di riferimento sul testo: 2.6, 2.7, 10.1, 10.3.

32. MARTEDÌ 20/12/2016

Esercizio 32.1. 56, 60/450.

□

FINE DEL CORSO