DIARIO DELLE LEZIONI DEL CORSO DI MECCANICA RAZIONALE A.A. 2015/2016 CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA

DANIELE ANDREUCCI
DIP. SCIENZE DI BASE E APPLICATE PER L'INGEGNERIA
UNIVERSITÀ LA SAPIENZA
VIA A.SCARPA 16, 00161 ROMA, ITALY

Le dimostrazioni fanno parte del programma, salvo che quando viene esplicitamente indicato il contrario con il simbolo (s.d.).

I richiami al testo si riferiscono alla *Versione preliminare* degli Appunti del corso, pubblicata sul sito del corso prima dell'inizio del corso. La numerazione n/m relativa agli esercizi si riferisce all'esercizio n del gruppo m, nella raccolta pubblicata sul sito del corso prima dell'inizio del corso.

1. Lunedì 28/9/2015

Presentazione del corso.
Equazioni alle derivate ordinarie del primo ordine.
Problema di Cauchy, istante iniziale, dato iniziale, punto iniziale.
Funzioni localmente lipschitziane e derivabilità. Controesempio all'unicità: $\dot{\varphi} = \varphi^{2/3}$.
Soluzioni massimali.
Definizione di dipendenza continua delle soluzioni dal dato iniziale.
Teorema di esistenza unicità e dipendenza continua.

Esempio 1.1. Motivazione della limitatezza dell'intervallo richiesta nella definizione di dipendenza continua; caso di

$$\dot{\varphi} = \varphi \,, \qquad \varphi(0) = 0 \,.$$

□

Per casa 1.2. 1) 1, 2, 3/100.
2) Dimostrare che se $\varphi \in C^1([0, +\infty))$, $\varphi > 0$, soddisfa

$$\dot{\varphi} \leq -\varphi \,,$$

allora $\varphi(t) \to 0$ as $t \to +\infty$.
Generalizzare al caso in cui

$$\dot{\varphi} \leq -a(t)\varphi \,,$$

sotto ipotesi opportune su a. □

Paragrafi di riferimento sul testo: 1.1.

2. Martedì 29/9/2015

Sistemi autonomi.
Se $\boldsymbol{\varphi}(t)$ è soluzione di un sistema autonomo, $\boldsymbol{\varphi}(t+\bar{t})$ è ancora soluzione.

Teorema 2.1. *Se $\boldsymbol{\varphi}$ è soluzione di un sistema autonomo e $\boldsymbol{\varphi}(t_1) = \boldsymbol{\varphi}(t_2)$, $t_2 > t_1$, allora $\boldsymbol{\varphi}$ è periodica di periodo $t_2 - t_1$. Se inoltre $N = 1$ allora $\boldsymbol{\varphi}$ è costante.*

Definizione di punto di equilibrio $\boldsymbol{y}_{\mathrm{eq}}$ per un sistema autonomo.

Lemma 2.2. *Se $\boldsymbol{\varphi}$ risolve un sistema autonomo e $\boldsymbol{\varphi}(t) \to \boldsymbol{y}_{\mathrm{eq}}$ per $t \to \beta-$, allora $\beta = +\infty$.*

Definizione di punto di equilibrio stabile e instabile.

Esercizio 2.3. Studio della stabilità per i sistemi

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 \,, \\ \dot{x}_2 = x_1 \,, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \,, \\ \dot{x}_2 = x_1 \,, \end{cases} \qquad \dot{x} = x(1-x) \,.$$

$\square$

Per casa 2.4. Studiare la stabilità dei punti di equilibrio di

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 \,, \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 \,, \end{cases} \qquad \dot{x} = x|x| \,, \qquad \dot{x} = x(x-1) \,.$$

$\square$

Paragrafi di riferimento sul testo: 1.2.

3. Venerdì 2/10/2015

Riduzione di sistemi di secondo ordine a sistemi di primo ordine.
Punti di equilibrio e di equilibrio stabile per sistemi del secondo ordine.
L'equazione scalare

$$m\ddot{x} = U'(x) \,.$$

Cenno alla risoluzione del sistema

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}} = \boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{\varphi} \,,$$

con il metodo della ricerca degli autovettori. Conseguenze per lo studio della stabilità.

Esercizio 3.1. 1) Risoluzione con il metodo degli autovettori del sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + x_2 \,, \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2 \,. \end{aligned}$$

2) Dimostrare che se

$$\dot{\varphi}(t) \geq \varphi(t) \cos t + \sin^2 t \,, \quad 0 < t < \frac{\pi}{2} \,, \qquad \varphi(0) = 1 \,,$$

allora $\varphi(\pi/2) \geq e$. $\square$

Per casa 3.2. 1) Risolvere con il metodo degli autovettori

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + x_2 \,, \\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_2 \,. \end{aligned}$$

2) Trovare la soluzione di

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 1 + x_1^2 + x_2^2 \,, \qquad & x_1(0) &= 1 \,, \\ \dot{x}_2 &= x_2 e^{\operatorname{arctg}(x_1 + t^2)} \,, \qquad & x_2(0) &= 0 \,. \end{aligned}$$

$\square$

Paragrafi di riferimento sul testo: 1.1, 1.4.

4. Lunedì 5/10/2015

Definizione di funzione di Liapunov.

Teorema 4.1. (Liapunov) *Se un sistema autonomo del primo ordine ammette una funzione di Liapunov in $\boldsymbol{y}_{\mathrm{eq}}$ allora $\boldsymbol{y}_{\mathrm{eq}}$ è stabile.*

Richiami sul passaggio da sistemi del secondo ordine a ssitemi del primo ordine, e sui punti di equilibrio per sistemi del secondo ordine.

Teorema 4.2. (Dirichlet) *Se un sistema autonomo del secondo ordine è nella forma*

$$\ddot{\boldsymbol{z}} = \nabla U(\boldsymbol{z}) \, ,$$

e U ha in $\boldsymbol{z}_{\mathrm{eq}}$ un massimo isolato, allora $\boldsymbol{z}_{\mathrm{eq}}$ è stabile.

Esercizio 4.3. 1, 3/120. □

Per casa 4.4. 7/120.
Dimostrare che se

$$U(x) = -x^6 \sin^2 \frac{1}{x} \, , \quad x \neq 0 \, ; \qquad U(0) = 0 \, ,$$

allora $\ddot{x} = U'(x)$ ha un equilibrio stabile in $x = 0$. □

Paragrafi di riferimento sul testo: 1.3, 1.4.

5. Martedì 6/10/2015

Definizione di orbita di un sistema del I ordine.

Teorema 5.1. *Se un'orbita di un sistema autonomo si autointerseca, allora corrisponde a una soluzione periodica.*

Teorema 5.2. *Se due orbite di un sistema autonomo si intersecano allora coincidono.*

Lemma 5.3. *Se $\boldsymbol{\varphi}(t) \to \boldsymbol{y}_0$ per $t \to \beta-$, $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{y}_0) \neq 0$, allora $\beta < +\infty$.*

Caso delle equazioni scalari del II ordine; conservazione dell'energia. Piano delle fasi; equazione delle orbite

$$p = \pm\sqrt{\frac{2}{m}[U(x) + E]}\,.$$

Riconoscimento di punti stabili e instabili.

Esercizio 5.4. 1) Piano delle fasi dell'oscillatore armonico.
2) Piano delle fasi del pendolo fisico.
3) 6/150. □

Per casa 5.5. 2, 13, 14/150. □

Paragrafi di riferimento sul testo: 1.2, 1.5.

6. Venerdì 9/10/2015

Teorema 6.1. *Se φ risolve $m\ddot{\varphi} = U'(\varphi)$, $\dot{\varphi} > 0$ allora*

$$t_2 - t_1 = \int_{\varphi(t_1)}^{\varphi(t_2)} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{2}{m}(E + U(x))}} .$$

Definizione di moto, velocità, accelerazione.
Esempi di moti e loro parametrizzazione: quiete, moti rettilinei e circolari in $\mathbb{R}^3$.
Definizione di moto armonico.

Per casa 6.2. Dimostrare che i moti armonici sono piani. □

Definizione di terna mobile.

Esercizio 6.3. Calcolo di una terna mobile a partire da un versore assegnato. □

Esercizio 6.4. 1, 13/150. □

Paragrafi di riferimento sul testo: 1.5, 2.1, 2.2.

7. Lunedì 12/10/2015

Definizione di derivata relativa a una terna mobile $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_i)$.
Proprietà elementari della derivata relativa: linearità, regole di Leibniz.
Definizione di vettore costante in una terna mobile,

Proposizione 7.1. *Un vettore è costante in una terna mobile se e solo se la sua derivata relativa a quella terna è nulla.*

Teorema 7.2. *Esiste un unico vettore $\boldsymbol{\omega}$ tale che per ogni $\boldsymbol{f}$*

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{f}}{\mathrm{d}t} = \left[\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{M}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{f}\,.$$

Il teorema discende dal

Lemma 7.3. *Esiste un unico vettore $\boldsymbol{\omega}$ tale che per ogni $\boldsymbol{f}$*

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_i}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{u}_i\,, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Esempio 7.4. Caso della rotazione: $\boldsymbol{\omega}(t) = \dot{\theta}(t)$, $\boldsymbol{u}_3(t) = \dot{\theta}(t)\boldsymbol{e}_3$.
Caso $\boldsymbol{\omega}(t) = F(t)\boldsymbol{u}_3(t)$.
Caso $\boldsymbol{\omega}(t) = F(t)\boldsymbol{e}_3$. □

Per casa 7.5. 9/340.
Calcolo di $\boldsymbol{\omega}$ per la terna determinata venerdì 9/10/2015. □

Paragrafi di riferimento sul testo: 2.1, 2.2.

8. Martedì 13/10/2015

Definizioni di sistema di riferimento mobile, di velocità relativa e di accelerazione relativa.
Espressioni di velocità e accelerazione relativa in componenti.
Teorema di scomposizione della velocità.
Teorema (di Coriolis) di scomposizione dell'accelerazione.
Definizione di traslazione, moto polare e polo, rotazione, rotazione uniforme.

Esercizio 8.1. 1, 3/350. □

Per casa 8.2. 6/350. □

Paragrafi di riferimento sul testo: 2.3.

9. Venerdì 16/10/2015

Velocità angolare di una terna relativa a un'altra.
Applicazioni alle formule di cambiamento di sistema di riferimento.

Teorema 9.1.
$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{M}\mathcal{N}} = -\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{N}\mathcal{M}} .$$

Teorema 9.2. (Composizione di velocità angolari)
$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{P}\mathcal{N}} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{P}\mathcal{M}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{M}\mathcal{N}} .$$

Teorema 9.3. *Data $\boldsymbol{\omega} \in C^0(I)$ e una terna ortonormale positiva $(\boldsymbol{w}_{0i})$ esiste unica la terna che ha $\boldsymbol{\omega}$ come velocità angolare e $(\boldsymbol{w}_{0i})$ come posizione iniziale.*

Esercizio 9.4. 1, 4, 6/340. □

Per casa 9.5. 3, 11/340. □

Paragrafi di riferimento sul testo: 2.4, 2.5.

10. Lunedì 19/10/2015

Curve regolari. Definizione. Supporto della curva.
Ascissa curvilinea. Riparametrizzazione con l'ascissa curvilinea.
Curvatura, raggio di curvatura.
Terna intrinseca (o triedro principale) ove $k \neq 0$.
Formule di Frenet-Serret.
Curve e cinematica: traiettoria di $\boldsymbol{X}$ come supporto $\boldsymbol{X}(I)$.
Velocità e accelerazione scomposte nella terna intrinseca.
Velocità angolare della terna intrinseca: $\boldsymbol{\omega} = \dot{s}[-\tau \boldsymbol{T} + k\boldsymbol{B}]$.

Esercizio 10.1. 9, 14/560. □

Per casa 10.2. 11/560. □

Paragrafi di riferimento sul testo: 3.1, 3.2, 3.3.

11. Martedì 20/10/2015

Teorema 11.1. *Se una curva ha curvatura nulla nell'intervallo I, per $s \in I$ è una parte di retta, e viceversa.*

Teorema 11.2. *Se una curva ha curvatura positiva e torsione nulla nell'intervallo I, per $s \in I$ giace su un piano, e viceversa.*

Esercizio 11.3. 1/580. □

Scomposizione polare di velocità e accelerazione.

Esercizio 11.4. 1/620 (risolto mediante l'equazione di moto). □

Per casa 11.5. 3, 5/580. □

Paragrafi di riferimento sul testo: 3.2, 4.5.

12. Venerdì 23/10/2015

Vincoli olonomi.
Definizione. Significato geometrico della definizione.
Esempio della sfera intersecata dal piano; vari casi possibili.
Vincoli fissi e mobili.
Coordinate indipendenti. Gradi di libertà.
Coordinate lagrangiane.
Esempi di coordinate lagrangiane: sulla circonferenza, sulla sfera.
Le coordinate polari nel piano come coordinate lagrangiane.

Paragrafi di riferimento sul testo: 4.1, 4.2, 4.4, 4.5.

13. Lunedì 26/10/2015

Definizione di coordinate locali per un sistema rigido non degenere. Non esistenza di coordinate globali.
Coordinate locali canoniche.
Rappresentazione di tutti i moti solidali in termini delle coordinate locali.
Velocità e accelerazione in coordinate locali.
Il caso dell'asta rigida (rigido degenere).

Lemma 13.1. *Dato un versore* $\boldsymbol{u} \in C^1(I)$ *esiste un unico* $\tilde{\boldsymbol{\omega}} : I \to \mathbb{R}^3$ *tale che*

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} = \tilde{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{u} \,, \qquad \tilde{\boldsymbol{\omega}} \cdot \boldsymbol{u} = 0 \,.$$

Esempio 13.2. Parametrizzazione lagrangiana di un cilindro con asse verticale e centro su circonferenza fissa. □

Esercizio 13.3. 11/560. □

14. Martedì 27/10/2015

Definizione di lavoro di una forza lungo un moto.
Forze posizionali e conservative. Potenziale.

Teorema 14.1. *Il lavoro di una forza conservativa nell'intervallo* (t_1, t_2) *è pari a*

$$U(\boldsymbol{X}(t_2)) - U(\boldsymbol{X}(t_1)) \,.$$

Definizione di energia cinetica, potenziale, meccanica.

Teorema 14.2. *Se il punto è soggetto a una forza* $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2$*, con* $\boldsymbol{F}_1 = \nabla U$*, e* $\boldsymbol{F}_2$ *con lavoro nullo, allora l'energia totale*

$$\frac{1}{2} m |\dot{\boldsymbol{X}}(t)|^2 - U(\boldsymbol{X}(t))$$

si conserva durante il moto.

Leggi di attrito di Coulomb-Morin.

Esempio 14.3. Moto di un punto vincolato a una superficie liscia. □

Esercizio 14.4. 15, 17/560. □

Paragrafi di riferimento sul testo: 5.1, 5.2, 5.3, 5.4.

Definizioni di corpo rigido non degenere e degenere rettilineo.
Definizioni di massa, quantità di moto, momento delle quantità di moto, energia cinetica e centro di massa di un corpo rigido.

Esercizio 15.1. 1, 18/330. □

Definizione del tensore d'inerzia di un corpo rigido in un polo Z.

Teorema 15.2. *Se O denota l'origine del sistema di riferimento solidale con il rigido, vale*

$$\boldsymbol{L}_Z(t) = \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\omega}(t) + m(\boldsymbol{X}_G(t) - \boldsymbol{X}_Z(t)) \times \left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}_O}{\mathrm{d}t}(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times (\boldsymbol{X}_Z(t) - \boldsymbol{X}_O(t))\right].$$

Corollario 15.3. *Se $\boldsymbol{X}_Z$ è solidale vale*

$$\boldsymbol{L}_Z(t) = \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\omega}(t) + m(\boldsymbol{X}_G(t) - \boldsymbol{X}_Z(t)) \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}_Z}{\mathrm{d}t}(t).$$

Se inoltre $\boldsymbol{X}_Z \equiv \boldsymbol{X}_G$ o $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}_Z}{\mathrm{d}t} \equiv 0$ allora

$$\boldsymbol{L}_Z(t) = \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\omega}(t).$$

Paragrafi di riferimento sul testo: 6.1, 6.2, 6.3.

Teorema 16.1. *Se il polo di* $\boldsymbol{\sigma}$ *è solidale*

$$T(t) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2}m\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}_O}{\mathrm{d}t}\right|^2 + m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}_O}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{X}_G - \boldsymbol{X}_O)\,.$$

Corollario 16.2. (KÖNIG) *Se* $\boldsymbol{X}_G = \boldsymbol{X}_O$*, allora*

$$T(t) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2}m\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}_O}{\mathrm{d}t}\right|^2\,.$$

Se $\boldsymbol{X}_O$ *è solidale e* $\dot{\boldsymbol{X}}_O = 0$*, allora*

$$T(t) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega}\,.$$

Esempio 16.3. Calcolo mediante il teorema di König dell'energia cinetica di un disco nel piano. □

Definizione di momento di inerzia e deviatore.

Proposizione 16.4. *Se* $\boldsymbol{X}_Z$*,* $\boldsymbol{u}$*,* $\boldsymbol{v}$ *sono solidali con il rigido, allora* $I_{\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}}$ *e* $I_{\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}}$ *sono costanti.*

Proposizione 16.5. *Valgono per ogni* $\boldsymbol{u}$*,* $\boldsymbol{v}$ *coppia di versori ortogonali:*

$$\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u} = I_{\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}}\,,\qquad \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = I_{\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}}\,.$$

Corollario 16.6. *Vale per ogni terna ortonormale* $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_h)$

$$\boldsymbol{\sigma}^{\mathcal{M}} = (I_{\boldsymbol{u}_h\boldsymbol{u}_k})\,,$$

cosicché la matrice risulta simmetrica.

Esercizio 16.7. 17/330. □

Per casa 16.8. 23/330. □

Paragrafi di riferimento sul testo: 6.3, 6.4.

17. Martedì 3/11/2015

Espressione in coordinate dei momenti d'inerzia e deviatori.

Teorema 17.1. *La forma quadratica definita da $\boldsymbol{\sigma}$ è semidefinita positiva, e definita positiva se il rigido non è degenere.*

Teorema 17.2. *Esiste almeno una terna solidale $\mathcal{M}$ tale che $\boldsymbol{\sigma}_{\mathcal{M}}$ è diagonale.*

Definizione di vettore principale d'inerzia e di terna principale d'inerzia.

Proposizione 17.3. *Il vettore $\boldsymbol{v}$ è principale d'inerzia se e solo se è un autovettore di $\boldsymbol{\sigma}$.*

Esempio 17.4. Il caso della lamina: il versore ortogonale $\boldsymbol{u}_3$ è principale; proprietà di massimo e minimo dei momenti, formula

$$I_{33} = I_{11} + I_{22} \,.$$

$\square$

Esercizio 17.5. 23/330. Calcolo della matrice d'inerzia nel centro della sfera. $\square$

Per casa 17.6. 39/330. $\square$

Paragrafi di riferimento sul testo: 6.4.

18. Venerdì 6/11/2015

Ricerca degli assi principali d'inerzia in presenza di simmetrie materiali, teorema di Huygens (s.d.).

Esempio 18.1. Ricerca di terne principali per il cubo e il quadrato. □

Proprietà di massimo degli assi principali:

Teorema 18.2. *Sia $\mathcal{M} = (\boldsymbol{u}_h)$ una terna principale in P. Allora ogni momento d'inerzia relativo a un asse per P soddisfa*

$$\min_{h=1,2,3} I_{hh} \leq I_{\boldsymbol{uu}} \leq \max_{h=1,2,3} I_{hh} \,.$$

Se $I_{11} = I_{22}$ allora $I_{\boldsymbol{uu}} = I_{11}$ per ogni versore combinazione lineare di $\boldsymbol{u}_1$ e $\boldsymbol{u}_2$.

Distribuzioni di forze su corpi rigidi. Forze e reazioni vincolari.
Ipotesi dei lavori virtuali per un corpo rigido e sua giustificazione.

Esercizio 18.3. 34/450 (solo calcolo $\boldsymbol{M}^{\text{ext}}$). □

Paragrafi di riferimento sul testo: 6.5, 6.6, 7.3, 8.1.

19. Lunedì 9/11/2015

L'ipotesi dei lavori virtuali per un sistema di corpi rigidi sottoposto a vincoli olonomi.

Esempio 19.1. Esempio di applicazione dell'ipotesi dei lavori virtuali al sistema costituito da due punti vincolati a restare alla stessa quota. □

Teorema 19.2. *Per un punto materiale libero l'ipotesi dei lavori virtuali implica*

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}\,.$$

Teorema 19.3. (I equazione cardinale) *Per un corpo rigido libero l'ipotesi dei lavori virtuali implica*

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}^{\mathrm{ext}}\,.$$

Teorema 19.4. (II equazione cardinale) *Per un corpo rigido con un punto solidale fisso O l'ipotesi dei lavori virtuali implica*

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_O}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M}_O^{\mathrm{ext}}\,.$$

Esercizio 19.5. 39/330. □

Paragrafi di riferimento sul testo: 8.1, 8.2, 8.3, 8.4.

Teorema 20.1. (s.d.) (II EQUAZIONE CARDINALE) *Per un corpo rigido libero l'ipotesi dei lavori virtuali implica*

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M}_Z^{\mathrm{ext}} + m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}_G}{\mathrm{d}t} \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}_O}{\mathrm{d}t}\,,$$

ove $\boldsymbol{X}_Z$ è un moto qualsiasi.

Teorema 20.2. (EQUAZIONI DI EULERO) *Vale sotto l'ipotesi dei lavori virtuali per un rigido con un punto solidale fisso O*

$$\boldsymbol{\sigma}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{M}_O^{\mathrm{ext}}\,, \tag{20.1}$$

ove I ha polo O.

Corollario 20.3. *In componenti (in una terna principale $(\boldsymbol{u}_h)$) la* (20.1) *implica*

$$\begin{aligned} I_{11}\dot{\omega}_1 &= (I_{22} - I_{33})\omega_2\omega_3 + \boldsymbol{M}_O^{\mathrm{ext}} \cdot \boldsymbol{u}_1\,, \\ I_{22}\dot{\omega}_2 &= (I_{33} - I_{11})\omega_1\omega_3 + \boldsymbol{M}_O^{\mathrm{ext}} \cdot \boldsymbol{u}_2\,, \\ I_{33}\dot{\omega}_3 &= (I_{11} - I_{22})\omega_1\omega_2 + \boldsymbol{M}_O^{\mathrm{ext}} \cdot \boldsymbol{u}_3\,. \end{aligned}$$

Il sistema delle equazioni di Eulero come sistema differenziale del secondo ordine nelle coordinate lagrangiane, o come sistema del primo ordine nelle ω_h se $\boldsymbol{M}_O^{\mathrm{ext}}$ dipende solo da $\boldsymbol{\omega}$.

Esercizio 20.4. 11, 15, 23/450. □

Per casa 20.5. 34/450. □

Paragrafi di riferimento sul testo: 8.4, 11.1.

21. Venerdì 13/11/2015

Teorema 21.1. *Data* $\boldsymbol{f} \in C^0(I \times \mathbb{R}^9)$ *localmente lipschitziana nelle ultime nove variabili, e una terna ortonormale positiva* $(\boldsymbol{w}_{0i})$ *esiste unica la terna* $(\boldsymbol{w}_h)$ *che ha* $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{w}_h(t))$ *come velocità angolare e* $(\boldsymbol{w}_{0i})$ *come posizione iniziale.*

Definizione di moti polari per inerzia.

Teorema 21.2. *In un moto polare per inerzia di polo O valgono i due integrali primi*

$$\boldsymbol{L}_O(t) = \boldsymbol{L}_O(0)\,, \qquad T(t) = T(0)\,, \qquad t \in I\,.$$

Esercizio 21.3. 19, 25, 28/450. □

Per casa 21.4. 17, 20/450. □

Paragrafi di riferimento sul testo: 2.5, 11.2.

22. Lunedì 16/11/2015

Definizione di ellissoide d'inerzia solidale e di ellissoide d'inerzia.

Lemma 22.1. *La normale all'ellissoide d'inerzia nel punto* $\boldsymbol{x}$ *è data da* $\boldsymbol{\sigma x}$.

Teorema 22.2. (Moto alla Poinsot) *In un moto polare per inerzia l'ellissoide d'inerzia si muove mantenendosi tangente a un piano fisso. Il punto di contatto ha velocità nulla.*

Definizione di polodia ed erpolodia.
Definizione di contatto senza strisciamento; vincolo di rotolamento puro.

Corollario 22.3. *Le equazioni delle polodie sono*

$$\sum_{h=1}^{3} I_{hh}^2 \lambda_{0h}^2 = \frac{c^2}{T(0)} |\boldsymbol{L}_O|^2\,,$$
$$\sum_{h=1}^{3} I_{hh} \lambda_{0h}^2 = 2c^2\,.$$

Esercizio 22.4. 31, 37, 49/450. □

Per casa 22.5. 54/450. □

Paragrafi di riferimento sul testo: 4.9, 11.2.

23. Martedì 17/11/2015

Teorema 23.1. (s.d.) *Un moto polare per inerzia è una rotazione se e solo se* $\boldsymbol{\omega}$ *si mantiene parallelo a un asse principale. In questo caso la rotazione è uniforme.*

Definizione di componenti lagrangiane delle forze.
Le equazioni di Lagrange come conseguenze dell'ipotesi dei lavori virtuali.

Esercizio 23.2. 16, 20/620. □

Per casa 23.3. 34, 38/620. □

Paragrafi di riferimento sul testo: 9.1.

24. Venerdì 20/11/2015

Le equazioni di Lagrange in un sistema di riferimento mobile.
Definizione di sistemi di forze conservative in forma lagrangiana.
La funzione lagrangiana. Equazioni di Lagrange nel caso conservativo.

Esercizio 24.1. 46/630. □

Paragrafi di riferimento sul testo: 7.4, 9.4, 10.1.

25. Lunedì 23/11/2015

Teorema 25.1. *L'energia cinetica in forma lagrangiana ha la struttura*

$$T_1^{\mathrm{L}} + T_2^{\mathrm{L}} ,$$

con T_1^{L} *polinomio di primo grado nelle* $\dot{q}_h$*, e* T_2^{L} *forma quadratica nelle* $\dot{q}_h$*. Inoltre* $T_1^{\mathrm{L}} \equiv 0$ *se i vincoli sono fissi.*

Teorema 25.2. *La matrice della forma quadratica* T_2^{L} *è simmetrica e definita positiva.*

Teorema 25.3. *Le equazioni di Lagrange sono riducibili alla forma normale (ossia con* $\ddot{q}_h$ *isolate).*

Esercizio 25.4. 42/620 (rotolamento puro). □

Per casa 25.5. 43/620. □

Paragrafi di riferimento sul testo: 9.2.

Le componenti lagrangiane della forza di Coriolis si annullano se $\ell = 1$.
Definizione di sistema di forze conservativo (in senso tradizionale).

Teorema 26.1. *Se il sistema di forze è conservativo in senso tradizionale, allora è conservativo anche in senso lagrangiano con potenziale lagrangiano ottenibile da quello tradizionale.*

Se $\ell = 1$ il sistema di forze è sempre conservativo in senso lagrangiano.
Definizione di funzione hamiltoniana $\mathcal{H}$.

Lemma 26.2. *Vale per moti che risolvono le equazioni di Lagrange*

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{H}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}\,.$$

Teorema 26.3. *Se i vincoli sono fissi*

$$\mathcal{H} = T^{\mathrm{L}} - U^{\mathrm{L}}\,.$$

Teorema 26.4. (Conservazione dell'energia) *Se i vincoli sono fissi, le forze conservative in senso tradizionale, vale per moti che risolvono le equazioni di Lagrange*

$$\mathcal{H} = \text{ costante}$$

lungo il moto.

Esercizio 26.5. 23/630. □

Paragrafi di riferimento sul testo: 9.4, 10.1.

27. Venerdì 27/11/2015

Teorema 27.1. *Se le forze sono conservative in senso tradizionale, i vincoli fissi, e* $\boldsymbol{q}_{\mathrm{eq}} \in Q$ *è un punto di massimo isolato per il potenziale, allora* $\boldsymbol{q}_{\mathrm{eq}}$ *è di equilibrio stabile.*

Definizione di coordinata lagrangiana ciclica e relativo integrale primo del moto.
Definizione di equilibrio asintoticamente stabile.

Teorema 27.2. *Se due lagrangiane* $\mathcal{L}_1$ *e* $\mathcal{L}_2$ *soddisfano*

$$\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F(q,t)\,,$$

allora danno luogo a equazioni di Lagrange equivalenti.

Per casa 27.3. Esempio 10.22 degli Appunti. □

Esercizio 27.4. 5, 9/660. □

Paragrafi di riferimento sul testo: 1.2, 10.1, 10.3.

28. Lunedì 30/11/2015

Piccole oscillazioni.
Teorema di esistenza delle coordinate normali.
Metodo diretto per il calcolo delle frequenze normali.

Esercizio 28.1. 34/660, 6/680. □

Paragrafi di riferimento sul testo: 10.2.

29. Venerdì 4/12/2015 I

Moti in campi di forze centrali: definizione di un campo di forze centrale e del suo potenziale.

Proposizione 29.1. *Il campo*

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})\frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|}\,, \qquad \boldsymbol{x} \neq 0\,,$$

è conservativo se e solo se f dipende solo da $|\boldsymbol{x}|$.

Teorema 29.2. *Un moto in un campo centrale avviene nel piano per la posizione iniziale e ortogonale a*

$$\overrightarrow{OP} \times \boldsymbol{v}(0) \neq 0\,.$$

Il moto è rettilineo se

$$\overrightarrow{OP} \times \boldsymbol{v}(0) = 0\,.$$

Integrale primo del moto (integrale delle aree).

Teorema 29.3. *Se*

$$\overrightarrow{OP} \times \boldsymbol{v}(0) \neq 0$$

la traiettoria del moto si può scrivere nella forma

$$r = R(\varphi)\,,$$

almeno in un intervallo opportuno $[0, \bar{t})$.

Esercizio 29.4. 7/220. □

Paragrafi di riferimento sul testo: 12.1.

30. Venerdì 4/12/2015 II

Definizione di atti di moto di un sistema olonomo. Dimensione dello spazio degli atti di moto.
Atti di moto e coordinate indipendenti e lagrangiane.
Spazi W (delle reazioni vincolari) e V (degli spostamenti virtuali.

Teorema 30.1. *$W = V^{\perp}$, $V = W^{\perp}$.*

Lavoro virtuale delle reazioni vincolari e relazione con l'ipotesi dei lavori virtuali.

Esercizio 30.2. 28/660; 18, 20/680. □

Paragrafi di riferimento sul testo: 4.3, 8.5, 9.3.

31. Venerdì 11/12/2015

Definizione di asse di istantanea rotazione.
Teorema sull'esistenza dell'asse di istantanea rotazione (s.d.).
Definizione di rigata fissa, solidale, mobile.
Moti rigidi piani: piani rappresentativi. Base e rulletta. Centro istantaneo di moto.

Esercizio 31.1. 51/450;
27/680. □

Paragrafi di riferimento sul testo: 2.6, 2.7.

32. Martedì 15/12/2015

Esercizio 32.1. 5/580; 21, 28/620. □

FINE DEL CORSO