**DIARIO DELLE LEZIONI DEL CORSO DI
MECCANICA RAZIONALE A.A. 2014/2015
CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA**

DANIELE ANDREUCCI
DIP. SCIENZE DI BASE E APPLICATE PER L'INGEGNERIA
UNIVERSITÀ LA SAPIENZA
VIA A.SCARPA 16, 00161 ROMA, ITALY

Le dimostrazioni fanno parte del programma, salvo che quando viene esplicitamente indicato il contrario con il simbolo (s.d.).

La numerazione n/m relativa agli esercizi si riferisce all'esercizio n del gruppo m , nella raccolta pubblicata sul sito del corso.

1. LUNEDÌ 29/9/2014

Presentazione del corso.

Equazioni alle derivate ordinarie del primo ordine.

Problema di Cauchy.

Funzioni lipschitziane.

Esempio 1.1. 1) Soluzione di

$$\dot{\varphi} = a(t)\varphi.$$

2) Se $F \in C^1(\mathbb{R})$, $F(0) = 0$ e φ risolve

$$\dot{\varphi} = F(\varphi), \quad \varphi(t_0) > 0$$

per qualche t_0 allora $\varphi > 0$ su tutto il suo intervallo di definizione. $\square$

Definizione di dipendenza continua delle soluzioni dal dato iniziale.

Esempio 1.2. Motivazione della limitatezza dell'intervallo richiesta nella definizione di dipendenza continua; caso di

$$\dot{\varphi} = \varphi, \quad \varphi(0) = 1.$$

$\square$

Teorema di esistenza, unicità dipendenza continua ed esistenza globale di soluzioni massimali al problema di Cauchy.

Commenti alla non esistenza globale.

Per casa 1.3. 1) Il problema

$$\dot{\varphi} = \varphi^2, \quad \varphi(0) = c > 0,$$

non ha mai esistenza globale.

2) Dimostrare: se $\Omega = \mathbb{R}^N$ e $\mathbf{F}$ soddisfa

$$|\mathbf{F}(\varphi, t)| \leq k|\varphi|,$$

allora l'esistenza è globale.

3) Sia

$$\dot{\varphi} \geq \varphi \cos t + \sin^2 t, \quad 0 < t < \frac{\pi}{2}; \quad \varphi(0) = 1.$$

Determinare una $C > 0$ tale che $\varphi(\pi/2) \geq C$. $\square$

Esercizio 1.4. Dimostrazione di

$$\left| \frac{d}{dt} |\varphi(t)| \right| \leq |\dot{\varphi}(t)|,$$

se $\varphi \in C^1$ e $\varphi(t) \neq 0$. $\square$

Paragrafi di riferimento sul testo: 1.1.

2. MARTEDÌ 30/9/2014

Sistemi autonomi di e.d.o..

Le funzioni traslate nel tempo di soluzioni di una e.d.o. autonoma sono ancora soluzioni.

Se la soluzione di una e.d.o. autonoma assume lo stesso valore in due istanti diversi, allora è periodica.

Esempio 2.1. Risoluzione del problema di Cauchy

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_2, & \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{pmatrix}. \\ \dot{x}_2 &= x_1; \end{aligned}$$

Determinazione e significato dell'integrale primo $x_1^2 + x_2^2 = x_{10}^2 + x_{20}^2$. $\square$

Definizione di punto di equilibrio $\mathbf{y}_{\text{eq}}$.

Lemma 2.2. Se per $t \rightarrow \beta^-$ si ha $\varphi(t) \rightarrow \mathbf{y}_{\text{eq}}$, ove φ risolve una e.d.o. autonoma, allora $\beta = +\infty$,

Definizione di punto di equilibrio stabile, e instabile.

Esempio 2.3. Studio della stabilità dei punti di equilibrio del sistema sopra e di

$$\dot{x} = x, \quad \dot{x} = x(1 - x).$$

$\square$

Per casa 2.4. Trovare tutte le soluzioni di

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x, & \dot{x} &= |x|x, & \dot{x} &= x(1 - x), \\ \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1, \end{cases} & & \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2, \end{cases} \end{aligned}$$

e studiare la stabilità dei relativi punti di equilibrio. $\square$

Paragrafi di riferimento sul testo: 1.1, 1.2.

3. MERCOLEDÌ 1/10/2014

Definizione di funzione di Liapunov per un sistema del primo ordine in un punto di equilibrio.

Teorema 3.1. (LIAPUNOV) *Se un sistema del primo ordine ammette una funzione di Liapunov in un punto di equilibrio, questo è di equilibrio stabile.*

Esempio 3.2. Il sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_1,\end{aligned}$$

ammette in $(0, 0)$ come funzione di Liapunov $W(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$. $\square$

Per casa 3.3. Si studi l'esistenza di funzioni di Liapunov nei punti di equilibrio di $\dot{x} = F(x)$. $\square$

Sistemi di e.d.o. del secondo ordine; loro riduzione a sistemi di e.d.o. del primo ordine.

Definizione di punti di equilibrio e di equilibrio stabile per sistemi del secondo ordine.

Teorema 3.4. (DIRICHLET) *Si assuma che $\mathbf{F} = \nabla U$; si assuma che U abbia un massimo isolato in $\mathbf{z}_{\text{eq}}$. Allora il sistema $\ddot{\mathbf{z}} = \mathbf{F}(\mathbf{z})$ ha un punto di equilibrio stabile in $\mathbf{z}_{\text{eq}}$.*

Nei punti di massimo non isolato in genere l'equilibrio è instabile.

Per casa 3.5. Dimostrare che $(0, 0)$ è instabile per

$$\ddot{\mathbf{z}} = \nabla U(\mathbf{z}), \quad U(\mathbf{z}) = -z_1^2,$$

ove $\mathbf{z} = (z_1, z_2)$. $\square$

Esercizio 3.6. Sia

$$\dot{\varphi} \geq \varphi \cos t + \sin^2 t, \quad 0 < t < \frac{\pi}{2}; \quad \varphi(0) = 1.$$

Allora $\varphi(\pi/2) \geq e$. $\square$

Paragrafi di riferimento sul testo: 1.1, 1.3, 1.4.

4. LUNEDÌ 6/10/2014

Lemma 4.1. *Se una soluzione φ di $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{F}(\mathbf{y})$ tende per $t \rightarrow \beta^-$ a un punto $\mathbf{y}_0$ con $\mathbf{F}(\mathbf{y}_0) \neq 0$, allora $\beta < \infty$. Se φ è massimale, allora $\varphi(\beta) = \mathbf{y}_0$.*

Definizione di orbita di un sistema differenziale autonomo.

Teorema 4.2. *1) Se una soluzione assume lo stesso valore in due istanti diversi, è periodica.*

2) Se due orbite hanno un punto in comune, allora coincidono.

Il caso delle equazioni scalari del II ordine. Conservazione dell'energia.

Orbite nel piano delle fasi (x, p) .

Rappresentazione delle orbite nella forma

$$p = \pm \sqrt{\frac{2}{m}[E + U(x)]}, \quad E + U(x) \geq 0.$$

Verso di percorrenza delle orbite; orbite degeneri corrispondenti a punti di equilibrio.

Esempi del pendolo matematico e del pendolo fisico:

$$m\ddot{x} = -kx, \quad m\ddot{x} = -k \sin x.$$

Punti di equilibrio stabile e instabile riconosciuti dal ritratto di fase.

Esercizio 4.3. 1/150

□

Paragrafi di riferimento sul testo: 1.2, 1.5.

5. MARTEDÌ 7/10/2014

Terne ortonormali mobili $\mathcal{M} = (\mathbf{u}_h)$.

Derivata di una funzione vettoriale relativa alla terna mobile.

Lemma 5.1. *Esiste una unica funzione $\boldsymbol{\omega}$ tale che*

$$\frac{d\mathbf{u}_h}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}_h, \quad h = 1, 2, 3.$$

Teorema 5.2. *Esiste una unica funzione $\boldsymbol{\omega}$ tale che per ogni funzione vettoriale $\mathbf{f}$ valga*

$$\frac{d\mathbf{f}}{dt} = \left[\frac{d\mathbf{f}}{dt} \right]_{\mathcal{M}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{f}.$$

Definizione di velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ di una terna mobile $\mathcal{M}$.

Vettori costanti in $\mathcal{M}$.

Teorema 5.3. *$\mathbf{f}$ è costante in $\mathcal{M}$ se e solo se*

$$\frac{d\mathbf{f}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{f}.$$

Teorema 5.4. *Il vettore $\boldsymbol{\omega}$ è costante, o ha direzione costante, se e solo se questo è vero in $\mathcal{M}$.*

Esempio 5.5. Vari casi di moti di $\mathcal{M}$:

- 1) quiete;
- 2) rotazione;
- 3) $\boldsymbol{\omega}$ ha direzione costante in $\mathcal{M}$ (è una rotazione);
- 4) $\boldsymbol{\omega}$ ha direzione costante (è una rotazione). □

Paragrafi di riferimento sul testo: 2.2.

6. MERCOLEDÌ 8/10/2014

Definizione di moto, velocità e accelerazione.

Definizione di sistema di riferimento mobile $\mathcal{S}$ e di velocità e accelerazione a esso relative $\mathbf{v}_{\mathcal{S}}$.

Esempio 6.1. Calcolo diretto di velocità e accelerazione di trascinamento nel caso della rotazione. $\square$

Teorema 6.2. *Per un qualunque moto vale*

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\mathcal{S}} + \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times [\mathbf{X} - \mathbf{X}_O].$$

Formula della velocità relativa per moti solidali.

Campo di velocità di trascinamento.

Teorema di Coriolis sulla relazione tra accelerazione assoluta e relativa.

Accelerazioni relativa, di trascinamento e di Coriolis.

Esempio 6.3. Calcolo di velocità e accelerazione di trascinamento nel caso della rotazione usando le formule generali. $\square$

Esercizio 6.4. 6/150 $\square$

Definizione di moto armonico.

Per casa 6.5. Dimostrare che un moto armonico è piano. $\square$

Paragrafi di riferimento sul testo: 2.3.

7. LUNEDÌ 13/10/2014

Definizione di moto polare, rotazione, rotazione costante, traslazione.

Passaggi da una base mobile all'altra. La velocità angolare relativa.

Composizione di velocità angolari:

Teorema 7.1. *Se $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$, $\mathcal{P}$ sono basi mobili, allora*

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{P}\mathcal{N}} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{P}\mathcal{M}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{M}\mathcal{N}}.$$

Esercizio 7.2. 1, 4, 6, 16/340 $\square$

La composizione di due rotazioni costanti può non essere una rotazione.

Definizione di precessione regolare.

Paragrafi di riferimento sul testo: 2.4.

8. MARTEDÌ 14/10/2014

Asse istantaneo di moto.

Curve regolari, ascissa curvilinea.

La terna intrinseca $(\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B})$.

Le formule di Frenet-Serret. Curvatura e torsione.

Esempio 8.1. L'elica cilindrica

$$x_1 = R \cos(\alpha t),$$

$$x_2 = R \sin(\alpha t),$$

$$x_3 = ht,$$

$t \in \mathbb{R}$. □

Traiettoria, legge oraria.

Scomposizione di velocità e accelerazione nella terna intrinseca.

Accelerazione tangente e normale.

Esercizio 8.2. 3/560 □

Per casa 8.3. 9, 16/560 □

Paragrafi di riferimento sul testo: 2.6, 3.1, 3.2, 3.3.

9. MERCOLEDÌ 15/10/2014

Teorema 9.1. *Se una curva ha curvatura nulla nell'intervallo I , per $s \in I$ è una parte di retta, e viceversa.*

Teorema 9.2. *Se una curva ha curvatura positiva e torsione nulla nell'intervallo I , per $s \in I$ giace su un piano, e viceversa.*

L'equazione di moto di un punto materiale. Come cambia l'equazione di moto cambiando sistema di riferimento.

Definizione di forza di trascinamento e di forza di Coriolis.

Esercizio 9.3. 1, 4/350. □

Per casa 9.4. 8/350. □

Paragrafi di riferimento sul testo: 5.1, 5.3, 5.4, 5.5.

10. LUNEDÌ 20/10/2014

Esercizio 10.1. 1/620; scomposizione dell'equazione di moto di un punto vincolato a una superficie. $\square$

Esempio 10.2. Punto vincolato da:

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = R^2, \quad \xi_3 = L.$$

$\square$

Sistemi vincolati. Vincoli olonomi. Significato dell'ipotesi sul rango massimo della matrice iacobiana.

Paragrafi di riferimento sul testo: 4.1, 5.4.

11. MARTEDÌ 21/10/2014

Coordinate indipendenti e gradi di libertà.

Definizione di vincoli fissi e mobili.

Coordinate lagrangiane.

Esempio 11.1. 1) Scelta di coordinate indipendenti e lagrangiane su una circonferenza mobile.

2) Scelta di coordinate indipendenti sulla sfera. $\square$

Esercizio 11.2. 1/580 $\square$

Per casa 11.3. Analizzare l'olonomia del sistema di vincoli:

$$\begin{aligned} \xi_1^2 + \xi_2^2 &= R^2, & (\xi_1 - \xi_4)^2 + \xi_2^2 &= L^2, \\ \xi_3 &= 0, & \xi_5 &= 0, & \xi_6 &= 0, \end{aligned}$$

al variare di $R, L > 0$; qui $n_c = 6$. $\square$

Paragrafi di riferimento sul testo: 4.1, 4.2, 4.4.

12. MERCOLEDÌ 22/10/2014

Sistemi di punti vincolati allo stesso piano coordinato; semplificazione dei vincoli rimuovendo le coordinate corrispondenti.

Velocità e accelerazione in coordinate polari; versori radiale e trasversale. Componenti radiale e trasversale di velocità e accelerazione.

Coordinate locali canoniche per sistemi rigidi non degeneri.

Moti solidali espressi mediante le coordinate locali canoniche.

Esercizio 12.1. 3/350; 9/560.

Per casa 12.2. 1, 7, 11/560; 4/580.

Paragrafi di riferimento sul testo: 4.5, 4.6.

13. LUNEDÌ 27/10/2014

Coordinate locali canoniche per rigidi degeneri: punto e asta.
Velocità angolare dell'asta.

Esercizio 13.1. Un'asta rigida si muove con il centro vincolato a una curva, mantenendosi tangente alla medesima; determinarne la velocità angolare. $\square$

Velocità angolare della terna intrinseca a una curva.
Cenno ai vincoli anolonomi. Caso del rotolamento puro.

Esempio 13.2. Moto di un cilindro che rotola senza strisciare su un piano mantenendo l'asse parallelo a sé stesso. Caso delle velocità uniformi. $\square$

Per casa 13.3. Moto di un cilindro che rotola senza strisciare su un piano mantenendo l'asse parallelo a sé stesso. Caso delle velocità generali. $\square$

Forze conservative. Definizione di potenziale.
Definizione di energia cinetica, potenziale, totale.
Definizione di lavoro.

Teorema 13.4. *Il lavoro di una forza conservativa nell'intervallo (t_1, t_2) è pari a*

$$U(\mathbf{X}(t_2)) - U(\mathbf{X}(t_1)).$$

Teorema 13.5. *Se il punto è soggetto a una forza $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$, con $\mathbf{F}_1 = \nabla U$, e $\mathbf{F}_2$ con lavoro nullo, allora l'energia totale*

$$\frac{1}{2}m|\dot{\mathbf{X}}(t)|^2 - U(\mathbf{X}(t))$$

si conserva durante il moto.

Esercizio 13.6. 2/120. $\square$

Per casa 13.7. 13, 15/560. $\square$

Paragrafi di riferimento sul testo: 3.3, 4.7, 4.8, 4.9, 5.2.

14. MARTEDÌ 28/10/2014

Atti di moto e condizioni poste dai vincoli su di essi.

Esercizio 14.1. 15/560.

Definizione di corpo rigido non degenerare.

Definizione di corpo rigido degenerare rettilineo e di elemento materiale.

Esempio 14.2. 1) Parametrizzazione lagrangiana di un cilindro con il centro vincolato a una circonferenza e l'asse ortogonale al piano della circonferenza.

2) Parametrizzazione lagrangiana di una lamina quadrata vincolata a giacere su un piano ruotante con un lato su un asse solidale con il piano ruotante.

Esercizio 14.3. 4/580.

Paragrafi di riferimento sul testo: 4.3, 6.1.

15. MERCOLEDÌ 29/10/2014

Definizione di massa, quantità di moto, momento delle quantità di moto, energia cinetica, centro di massa di un corpo rigido.

Additività per sistemi di rigidi.

Esercizio 15.1. 1, 3/330.

Paragrafi di riferimento sul testo: 6.1, 6.2.

16. LUNEDÌ 3/11/2014

Tensore d'inerzia σ .

Momento delle quantità di moto ed energia cinetica espressi in funzione di σ e ω .

Esercizio 16.1. Calcolo del momento della quantità di moto e dell'energia cinetica mediante σ nei casi: 1) disco con diametro fisso; 2) disco con diametro solidale libero di scorrere su un asse fisso. $\square$

Per casa 16.2. Calcolo del momento della quantità di moto e dell'energia cinetica mediante σ nel caso di disco con centro fissato nell'origine e vincolato a giacere sul piano mobile

$$-x_1 \sin(\alpha t) + x_2 \cos(\alpha t) = 0.$$

$\square$

Paragrafi di riferimento sul testo: 6.3.

17. LUNEDÌ 10/11/2014

Momenti d'inerzia e deviatori e loro collegamento con la matrice d'inerzia.

Elementi della matrice d'inerzia.

Diagonalizzazione della matrice d'inerzia.

Esercizio 17.1. 39/330. $\square$

Paragrafi di riferimento sul testo: 6.4.

18. MARTEDÌ 11/11/2014

Assi principali e autovettori della matrice d'inerzia.

Proprietà di estremo dei momenti principali.

Casi di due o tre momenti uguali.

Ricerca di assi principali: piani di simmetria materiale ortogonale, lamine piane, terne principali centrali e loro traslazioni (s.d.).

Teorema di Huygens (s.d.).

Esercizio 18.1. 35, 37/330. $\square$

Paragrafi di riferimento sul testo: 6.4, 6.5, 6.6.

19. MERCOLEDÌ 12/11/2014

Moto lagrangiano, moti solidali con un corpo rigido in coordinate lagrangiane.

Velocità in coordinate lagrangiane.

Distribuzioni di forze e forze conservative.

Esercizio 19.1. Calcolo di risultanti e momenti risultanti di distribuzioni di forze. $\square$

Paragrafi di riferimento sul testo: 7.1, 7.2, 7.3, 7.4.

20. LUNEDÌ 17/11/2014

Esempio 20.1. Punto vincolato a una superficie liscia; proiezione dell'equazione di moto sul piano tangente.

Punto vincolato a una curva liscia; proiezione dell'equazione di moto sulla retta tangente. $\square$

L'ipotesi dei lavori virtuali (ILV); discussione.

Deduzione delle equazioni di moto nei due esempi precedenti dalla ILV.

Esempio 20.2. Deduzione delle equazioni di moto dalla ILV nei due casi:

- Due punti vincolati alla stessa quota.
- Due punti vincolati alla stessa quota e alla stessa sfera.

$\square$

Paragrafi di riferimento sul testo: 8.1.

21. MARTEDÌ 18/11/2014

Caso del punto materiale libero: l'ILV implica $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$.

Caso del rigido libero: l'ILV implica la prima equazione globale della dinamica.

Teorema 21.1. *Se il moto soddisfa l'ipotesi dei lavori virtuali, valgono le equazioni di Lagrange*

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T^L}{\partial \dot{q}_h} \right] - \frac{\partial T^L}{\partial q_h} = Q_h, \quad h = 1, \dots, \ell.$$

Esercizio 21.2. 7, 16/620. $\square$

Paragrafi di riferimento sul testo: 8.2, 8.3, 9.1.

22. MERCOLEDÌ 19/11/2014

Componenti lagrangiane delle forze, conservative; potenziale lagrangiano.

I sistemi con un solo grado di libertà hanno sempre componenti lagrangiane delle forze conservative.

Esempio 22.1. Punto vincolato al cilindro

$$x_1^2 + x_2^2 = R^2,$$

e soggetto alla forza non conservativa

$$\mathbf{F} = \alpha x_1 \mathbf{e}_1 + \beta x_2 \mathbf{e}_2.$$

Le componenti lagrangiane delle forze sono conservative. □

Le equazioni di Lagrange nel caso conservativo: la funzione lagrangiana.

Esercizio 22.2. 20/620.

Punto vincolato a una circonferenza ruotante intorno al diametro verticale fisso: equazioni di Lagrange nel sistema fisso e in quello mobile solidale alla circonferenza. □

Per casa 22.3. 1/630. □

Paragrafi di riferimento sul testo: 7.4, 10.1.

23. LUNEDÌ 24/11/2014

Teorema 23.1. *L'energia cinetica è data dalla somma di una forma quadratica T_2^L nelle $\dot{q}_h$, e di una parte lineare T_1^L nelle $\dot{q}_h$ che è nulla se i vincoli sono fissi.*

Teorema 23.2. *La forma T_2^L è simmetrica e definita positiva.*

Corollario 23.3. *Il sistema delle equazioni di Lagrange si può mettere in forma normale nelle $\dot{q}_h$.*

Atti di moto; atti di moto lagrangiano.

Esercizio 23.4. 11, 24/620. □

Paragrafi di riferimento sul testo: 4.3, 9.2, 9.3.

24. MARTEDÌ 25/11/2014

Definizione di hamiltoniana.

Lemma 24.1. *Lungo i moti*

$$\frac{d}{dt}\mathcal{H} = -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t}.$$

Proposizione 24.2. *Se i vincoli sono fissi*

$$\mathcal{H} = T^L - U^L.$$

Teorema 24.3. *Se i vincoli sono fissi e le forze conservative (in senso tradizionale) $\mathcal{H}$ è costante lungo ciascun moto.*

Teorema 24.4. *Se le forze sono conservative, $\mathbf{q}_{\text{eq}}$ è un massimo isolato per il potenziale lagrangiano e i vincoli sono fissi, allora $\mathbf{q}_{\text{eq}}$ è di equilibrio stabile.*

Esercizio 24.5. 35, 42/630. □

Per casa 24.6. 36/630; caso dell'ellisse ruotante intorno a un suo asse. □

Paragrafi di riferimento sul testo: 10.1.

25. MERCOLEDÌ 26/11/2014

Le equazioni di Lagrange in un sistema di riferimento mobile; componenti lagrangiane delle forze fittizie.

La forza di trascinamento come forza conservativa nel caso del sistema mobile con $\boldsymbol{\omega} = \text{costante}$.

La forza di Coriolis ha componenti lagrangiane nulle nel caso di rigidi vincolati a un piano ruotante intorno a un suo asse e di sistemi con un solo grado di libertà.

Caso del rigido con un punto fisso: l'ILV implica la seconda equazione globale della dinamica.

Esercizio 25.1. 41/630, 2/660. □

Paragrafi di riferimento sul testo: 8.4, 9.4.

26. LUNEDÌ 1/12/2014

Moti polari.

Le equazioni di Eulero.

Casi in cui le equazioni di Eulero costituiscono un sistema del I ordine nelle ω_h .

Teorema di esistenza e unicità di una base mobile assegnata la dipendenza di $\boldsymbol{\omega}$ dalla base stessa e la posizione iniziale.

Esercizio 26.1. 1, 3, 4/450.

Paragrafi di riferimento sul testo: 2.5, 11.1.

27. MARTEDÌ 2/12/2014

Moti polari per inerzia.

Teorema 27.1. *In un moto polare per inerzia valgono gli integrali primi*

$$\mathbf{L}_O(t) = \mathbf{L}_O(0), \quad T(t) = T(0), \quad t \in I.$$

L'ellissoide d'inerzia (solidale e mobile). L'equazione dell'ellissoide in coordinate del sistema fisso.

Lemma 27.2. *In ciascun punto $\mathbf{x}$ dell'ellissoide la normale all'ellissoide è data da $\boldsymbol{\sigma}\mathbf{x}$.*

Moto alla Poinsot nei moti polari per inerzia.

Esercizio 27.3. 28/450.

Per casa 27.4. 17/450.

Paragrafi di riferimento sul testo: 11.2.

28. MERCOLEDÌ 3/12/2013

Definizione di polodia e di erpolodia.

Equazioni delle polodie.

Diagramma delle polodie in ellipsoidi d'inerzia non di rotazione e di rotazione. Analisi della stabilità delle rotazioni per inerzia.

Esercizio 28.1. 31, 40, 49/450.

Paragrafi di riferimento sul testo: 11.2.

29. MARTEDÌ 9/12/2014

Piccole oscillazioni nei punti critici del potenziale, in cui l'hessiana del potenziale è definita negativa: lagrangiana ridotta $\mathcal{L}^*$.

Teorema 29.1. *Esiste un cambiamento di coordinate lagrangiane che dà*

$$\mathcal{L}^*(\boldsymbol{\lambda}, \dot{\boldsymbol{\lambda}}) = \frac{1}{2} \sum_{h=1}^{\ell} [\dot{\lambda}_h^2 - \omega_h^2 \lambda_h^2].$$

Metodo di calcolo delle frequenze come soluzioni di

$$\det(\omega^2 \mathbf{A} + \mathbf{U}) = 0.$$

Esercizio 29.2. 1, 6/680. □

Paragrafi di riferimento sul testo: 10.2.

30. MERCOLEDÌ 10/12/2014

Definizione di campo di forze centrale.

Moti in campi centrali.

Integrale primo.

Coordinate cicliche.

Teorema 30.1. *Un moto in un campo centrale è piano; è rettilineo se*

$$\overrightarrow{OP} \times \mathbf{v}(0) = 0.$$

Teorema 30.2. *Il campo*

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}, \quad \mathbf{x} \neq 0,$$

è conservativo se e solo se f dipende solo da $|\mathbf{x}|$.

Esercizio 30.3. 7/220; 16, 27/660. □

Paragrafi di riferimento sul testo: 10.1, 12.1.

31. LUNEDÌ 15/12/2014

La velocità areolare.

Teorema 31.1. *In un moto in campo centrale la velocità areolare è costante.*

La formula di Binet (s.d.).

Spostamenti virtuali e ipotesi dei lavori virtuali.

Velocità virtuali; caso dei vincoli mobili.

Esercizio 31.2. 23/630. □

Paragrafi di riferimento sul testo: 8.5, 12.1.

32. MARTEDÌ 16/12/2014

Lagrangiane equivalenti.

Rigate fisse e mobili. Moti piani; base e rulletta.

Esercizio 32.1. 13/630, 29/660. □

Paragrafi di riferimento sul testo: 2.6, 2.7, 10.3.

FINE DEL CORSO