

**DIARIO DELLE LEZIONI DEL CORSO DI
MECCANICA RAZIONALE A.A. 2013/2014
CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA**

DANIELE ANDREUCCI
DIP. SCIENZE DI BASE E APPLICATE PER L'INGEGNERIA
UNIVERSITÀ LA SAPIENZA
VIA A.SCARPA 16, 00161 ROMA, ITALY

Le dimostrazioni fanno parte del programma, salvo che quando viene esplicitamente indicato il contrario con il simbolo (s.d.).

La numerazione n/m relativa agli esercizi si riferisce all'esercizio n del gruppo m , nella raccolta pubblicata sul sito del corso.

1. LUNEDÌ 30/9/2013

Presentazione del corso.

Equazioni alle derivate ordinarie del primo ordine.

Esempio 1.1. Soluzioni di

$$\dot{x} = -\omega^2 x, \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1. \end{cases}$$

□

Problema di Cauchy.

Funzioni lipschitziane.

Teorema di esistenza e unicità ed esistenza globale di soluzioni massimali al problema di Cauchy.

Esempio 1.2. Caso di non esistenza globale:

$$\dot{y} = y^2, \quad y(0) = u_0.$$

□

Passaggio da un problema di Cauchy per un sistema del secondo ordine di dimensione N a uno del primo ordine di dimensione $2N$.

Paragrafi di riferimento sul testo: 1.1.

2. MARTEDÌ 1/10/2013

Sistemi autonomi di e.d.o..

Le funzioni traslate nel tempo di soluzioni di una e.d.o. autonoma sono ancora soluzioni.

Se la soluzione di una e.d.o. autonoma assume lo stesso valore in due istanti diversi, allora è periodica.

Definizione di punto di equilibrio $\mathbf{y}_{\text{eq}}$, e di punto di equilibrio stabile.

Esempio 2.1. Studio della stabilità dei punti di equilibrio di

$$\dot{x} = x, \quad \dot{x} = -x, \quad \dot{x} = x(1 - x).$$

□

Per casa 2.2. Trovare tutte le soluzioni di

$$\dot{x} = |x|, \quad \dot{x} = x(1 - x).$$

□

Definizione di dipendenza continua dai dati iniziali per soluzioni di problemi di Cauchy per e.d.o..

Teorema 2.3. *La soluzione del problema di Cauchy dipende con continuità dai dati iniziali, sotto le ipotesi usuali di regolarità.*

Importanza della limitatezza dell'intervallo di definizione considerato.
Differenza tra stabilità e dipendenza continua.

Esempio 2.4. I casi $\dot{x} = x$, $\dot{x} = -x$.

□

Lemma 2.5. *Se per $t \rightarrow \beta -$ si ha $\varphi(t) \rightarrow \mathbf{y}_{\text{eq}}$, ove φ risolve una e.d.o. autonoma, allora $\beta = +\infty$,*

Paragrafi di riferimento sul testo: 1.1, 1.2.

3. LUNEDÌ 7/10/2013

Definizione di funzione di Liapunov per un sistema del primo ordine in un punto di equilibrio.

Teorema 3.1. *Se un sistema del primo ordine ammette una funzione di Liapunov in un punto di equilibrio, questo è di equilibrio stabile.*

Definizione di punti di equilibrio e di equilibrio stabile per sistemi del secondo ordine.

Definizione di potenziale U per un campo vettoriale $\mathbf{F}$.

Teorema 3.2. (DIRICHLET) *Si assuma che $\mathbf{F}$ abbia un potenziale U , con un massimo isolato in $\mathbf{z}_{\text{eq}}$. Allora il sistema $\ddot{\mathbf{z}} = \mathbf{F}(\mathbf{z})$ ha un punto di equilibrio stabile in $\mathbf{z}_{\text{eq}}$.*

Esempi di campi vettoriali che ammettono o no un potenziale; forze elastiche e gravitazionali (coulombiane).

Il caso di dimensione 1: tutte le funzioni continue ammettono un potenziale (primitiva).

Definizione di energia meccanica $\mathcal{E}$ nel caso monodimensionale.

Teorema 3.3. *Se φ è una soluzione di*

$$m\ddot{x} = f(x),$$

la funzione del tempo $\mathcal{E}(\varphi(t))$ si mantiene costante.

Paragrafi di riferimento sul testo: 1.3, 1.4, 1.5.

4. MARTEDÌ 8/10/2013

Esempi con punti di massimo non isolato per il potenziale, sia di equilibrio stabile che instabile.

Definizione di orbita di un sistema differenziale autonomo.

Teorema 4.1. 1) *Se una soluzione assume lo stesso valore in due istanti diversi, è periodica.*

2) *Se due orbite hanno un punto in comune, allora coincidono.*

Esempi di orbite in dimensione 1:

$$\dot{x} = x, \quad \dot{x} = x(x-1).$$

Esempi di orbite in dimensione 2:

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{y}, \quad \dot{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{y}.$$

Il caso delle equazioni scalari del I ordine. Conservazione dell'energia.

Orbite nel piano delle fasi (x, p) .

Rappresentazione delle orbite nella forma

$$p = \pm \sqrt{\frac{2}{m}[E + U(x)]}, \quad E + U(x) \geq 0.$$

Verso di percorrenza delle orbite; orbite degeneri corrispondenti a punti di equilibrio.

Esempi del pendolo matematico e del pendolo fisico:

$$m\ddot{x} = -kx, \quad m\ddot{x} = -k \sin x.$$

Punti di equilibrio stabile e instabile riconosciuti dal ritratto di fase.

Paragrafi di riferimento sul testo: 1.4, 1.5.

5. MERCOLEDÌ 9/10/2013

Definizione di punto di equilibrio asintoticamente stabile (o asintotico).
Esempi in $\mathbb{R}^2$ di punti di equilibrio stabile asintotico e non asintotico.

Teorema 5.1. *Se un sistema ammette una funzione di Liapunov in un punto di equilibrio, che sia strettamente decrescente su tutte le soluzioni che non siano quella di equilibrio, il punto è di equilibrio asintotico.*
(s.d.)

Teorema 5.2. *Il sistema*

$$m\ddot{\mathbf{z}} = \nabla U(\mathbf{z}) + \mathbf{a}(\dot{\mathbf{z}}),$$

con $\mathbf{a}(\mathbf{y}_2) \cdot \mathbf{y}_2 < 0$, $\mathbf{y}_2 \neq 0$, se $\mathbf{z}_{\text{eq}}$ è l'unico punto critico di U , ed è un massimo isolato per U , ha in $\mathbf{z}_{\text{eq}}$ un punto di equilibrio asintotico.

Osservazione 5.3. In dimensione 1 tutti i punti di equilibrio stabile isolato sono asintoticamente stabili. $\square$

Studio del piano delle fasi: esercizio 6/150.

Per casa 5.4. 1/150. $\square$

Paragrafi di riferimento sul testo: 1.3, 1.4, 1.5.

6. LUNEDÌ 14/10/2013

Definizione di moto, velocità e accelerazione.

Esempio 6.1. Moto stazionario, rettilineo, circolare. $\square$

Ricostruzione del moto a partire da velocità o accelerazione, e dalle condizioni iniziali.

Moto armonico. Il moto armonico è piano.

Per casa 6.2. A) Generalizzare l'argomento che dimostra che il moto armonico è piano ad altri moti.

B) Considerare il caso in cui velocità e vettore posizione iniziale sono paralleli. $\square$

Terne ortonormali mobili $\mathcal{M} = (\mathbf{u}_h)$.

Derivata di una funzione vettoriale relativa alla terna mobile.

Lemma 6.3. *Esiste una unica funzione $\boldsymbol{\omega}$ tale che*

$$\frac{d\mathbf{u}_h}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}_h, \quad h = 1, 2, 3.$$

Teorema 6.4. *Esiste una unica funzione $\boldsymbol{\omega}$ tale che per ogni funzione vettoriale $\mathbf{f}$ valga*

$$\frac{d\mathbf{f}}{dt} = \left[\frac{d\mathbf{f}}{dt} \right]_{\mathcal{M}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{f}.$$

Paragrafi di riferimento sul testo: 2.1, 2.2.

7. MARTEDÌ 15/10/2013

Definizione di velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ di una terna mobile $\mathcal{M}$.
Vettori costanti in $\mathcal{M}$.

Teorema 7.1. $\mathbf{f}$ è costante in $\mathcal{M}$ se e solo se

$$\frac{d\mathbf{f}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{f}.$$

Teorema 7.2. Il vettore $\boldsymbol{\omega}$ è costante, o ha direzione costante, se e solo se questo è vero in $\mathcal{M}$.

Esempio 7.3. Vari casi di moti di $\mathcal{M}$:

- 1) quiete;
- 2) rotazione;
- 3) $\boldsymbol{\omega}$ ha direzione costante in $\mathcal{M}$ (è una rotazione);
- 4) $\boldsymbol{\omega}$ ha direzione costante (è una rotazione). □

Per casa 7.4. Scrivere una rotazione intorno a un generico vettore fisso $\alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 + \alpha_3 \mathbf{e}_3$. □

Definizione di sistema di riferimento mobile $\mathcal{S}$ e di velocità ad esso relativa $\mathbf{v}_S$.

Teorema 7.5. Per un qualunque moto vale

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_S + \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times [\mathbf{X} - \mathbf{X}_O].$$

Esercizio 7.6. 2, 18/340. □

Paragrafi di riferimento sul testo: 2.2, 2.3.

8. MERCOLEDÌ 16/10/2013

Formula della velocità relativa per moti solidali.

Campo di velocità di trascinamento.

Teorema di Coriolis sulla relazione tra accelerazione assoluta e relativa.

Accelerazioni relativa, di trascinamento e di Coriolis.

Calcolo di velocità e accelerazione di trascinamento nel caso della rotazione.

Esercizio 8.1. 1/120, 9/340. □

Paragrafi di riferimento sul testo: 2.3.

9. LUNEDÌ 21/10/2013

Definizione di moto polare, rotazione, rotazione costante, traslazione.
Passaggi da una base mobile all'altra. La velocità angolare relativa.
Composizione di velocità angolari:

Teorema 9.1. *Se $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$, $\mathcal{P}$ sono basi mobili, allora*

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{PN}} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{PM}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{MN}}.$$

Esempio 9.2. La composizione di due rotazioni costanti può non essere una rotazione. $\square$

Definizione di precessione regolare.
Ricostruzione di una terna mobile a partire dalla velocità angolare (relativa).

Esercizio 9.3. 6, 7/340 $\square$

Paragrafi di riferimento sul testo: 2.4, 2.5.

10. MARTEDÌ 22/10/2013

Asse istantaneo di moto.
Rigate fissa, solidale e mobile.

Esempio 10.1. Rigate (coni) nel caso della precessione regolare. $\square$

Moti rigidi piani. Centro di istantanea rotazione.

Esempio 10.2. Compasso ellittico. $\square$

Paragrafi di riferimento sul testo: 2.6, 2.7.

11. MERCOLEDÌ 23/10/2013

Curve regolari, ascissa curvilinea.

La terna intrinseca $(\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B})$.

Le formule di Frenet-Serret. Curvatura e torsione.

Teorema 11.1. *Se una curva ha curvatura nulla nell'intervallo I , per $s \in I$ è una parte di retta, e viceversa.*

Teorema 11.2. *Se una curva ha torsione nulla nell'intervallo I , per $s \in I$ giace su un piano.*

Scomposizione di velocità e accelerazione nella terna intrinseca.
Accelerazione tangente e normale.

Esempio 11.3. Moto circolare □

Esercizio 11.4. 7/560.
L'elica circolare ha curvatura costante. □

Paragrafi di riferimento sul testo: 3.1, 3.2, 3.3.

12. LUNEDÌ 28/10/2013

Velocità angolare della terna intrinseca.

Sistemi vincolati. Vincoli olonomi. Significato dell'ipotesi sul rango massimo della matrice iacobiana.

Esempio 12.1. Punto vincolato da:

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = R^2, \quad \xi_3 = L.$$

□

Coordinate indipendenti e gradi di libertà.

Definizione di vincoli fissi e mobili.

Esercizio 12.2. 1, 3/350. □

Paragrafi di riferimento sul testo: 3.3, 4.1, 4.2, 5.1.

13. MARTEDÌ 29/10/2013

Atti di moto e condizioni su di essi.

Coordinate lagrangiane.

Esempio 13.1. 1) Scelta di coordinate indipendenti e lagrangiane sulla circonferenza.

2) Scelta di coordinate indipendenti e lagrangiane sulla sfera. $\square$

Coordinate locali canoniche per sistemi rigidi non degeneri.

Paragrafi di riferimento sul testo: 4.3, 4.4, 4.6.

14. GIOVEDÌ 31/10/2013

Coordinate locali canoniche per rigidi degeneri: punto e asta.

Esempio 14.1. 1) Sfera con centro vincolato a un piano e un diametro (solidale) ortogonale a esso.

2) Sfera con centro fisso e un punto solidale mobile con legge assegnata di moto circolare uniforme. $\square$

Forze conservative. Definizione di potenziale. Definizione di energia cinetica, potenziale, totale.

Definizione di lavoro.

Teorema 14.2. *Il lavoro di una forza conservativa nell'intervallo (t_1, t_2) è pari a*

$$U(\mathbf{X}(t_2)) - U(\mathbf{X}(t_1)).$$

Teorema 14.3. *Se il punto è soggetto a una forza $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$, con $\mathbf{F}_1 = \nabla U$, e $\mathbf{F}_2$ con lavoro nullo, allora l'energia totale*

$$\frac{1}{2}m|\dot{\mathbf{X}}(t)|^2 - U(\mathbf{X}(t))$$

si conserva durante il moto.

Caso dei sistemi: potenziale della forza elastica tra due punti materiali.

Esercizio 14.4. 15/560. $\square$

Paragrafi di riferimento sul testo: 4.7, 4.8, 5.2, 5.4.

15. LUNEDÌ 4/11/2013

Definizione di corpo rigido non degenerare e degenerare.

Definizione di massa, centro di massa, quantità di moto, momento delle quantità di moto, energia cinetica del corpo rigido.

Esempio 15.1. Circonferenza materiale vincolata a un piano. ☐

Esercizio 15.2. 31/330, 11/340. ☐

Paragrafi di riferimento sul testo: 6.1, 6.2.

16. MARTEDÌ 5/11/2013

Tensore d'inerzia σ .

Momento delle quantità di moto ed energia cinetica espressi in funzione di σ e ω .

Momento d'inerzia rispetto a una retta. Momento deviatore.

Relazione tra momenti d'inerzia e deviatori e il tensore d'inerzia.

Esercizio 16.1. 21/330. ☐

Paragrafi di riferimento sul testo: 6.3, 6.4.

17. MERCOLEDÌ 6/11/2013

Elementi della matrice d'inerzia.

Diagonalizzazione della matrice d'inerzia.

Versori e assi principali d'inerzia. Proprietà di estremo degli assi principali.

Esempio 17.1. Caso della lamina piana. ☐

Esercizio 17.2. 25/330. ☐

Per casa 17.3. 1) Dimostrare che se due assi principali hanno lo stesso momento d'inerzia, tutti i versori del loro piano sono principali.

2) 24/330. ☐

Paragrafi di riferimento sul testo: 6.4, 6.5.

18. LUNEDÌ 11/11/2013

Ricerca di assi principali: piani di simmetria materiale ortogonale, lamine piane, terne principali centrali e loro traslazioni (s.d.).
Teorema di Huygens (s.d.).

Esercizio 18.1. 1, 3/330. □

Forze e distribuzioni di forze.

Esempio 18.2. Calcolo di momenti di forze concentrate sulla faccia di un cubo o su un suo punto. □

Paragrafi di riferimento sul testo: 6.6, 7.1, 7.2.

19. MARTEDÌ 12/11/2013

Esempio 19.1. Punto vincolato a una superficie liscia; proiezione dell'equazione di moto sul piano tangente. □

L'ipotesi dei lavori virtuali (ILV); discussione.

Caso del punto materiale libero: l'ILV implica $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$.

Caso del rigido libero: l'ILV implica la prima equazione globale della dinamica.

Paragrafi di riferimento sul testo: 8.1, 8.2, 8.3.

20. MERCOLEDÌ 13/11/2013

Caso del rigido con un punto fisso: l'ILV implica la seconda equazione globale della dinamica.

Le equazioni di Eulero.

Esercizio 20.1. 4, 35/450. □

Paragrafi di riferimento sul testo: 8.4, 11.1.

21. LUNEDÌ 18/11/2013

Moti polari per inerzia.

Teorema 21.1. *In un moto polare per inerzia valgono gli integrali primi*

$$\mathbf{L}_O(t) = \mathbf{L}_O(0), \quad T(t) = T(0), \quad t \in I.$$

L'ellissoide d'inerzia (solidale e mobile). L'equazione dell'ellissoide in coordinate del sistema fisso.

Lemma 21.2. *In ciascun punto $\mathbf{x}$ dell'ellissoide la normale all'ellissoide è data da $\sigma \mathbf{x}$.*

Esercizio 21.3. 37/450. □

Paragrafi di riferimento sul testo: 11.2.

22. MARTEDÌ 19/11/2013

Moto alla Poincaré nei moti polari per inerzia.

Definizione di polodia ed erpolodia.

Diagramma delle polodie in ellissoidi d'inerzia non di rotazione e di rotazione. Analisi della stabilità delle rotazioni per inerzia.

Esercizio 22.1. 11/450 □

Paragrafi di riferimento sul testo: 11.2.

23. MERCOLEDÌ 20/11/2013

Il caso dell'ellissoide sferico.

Teorema 23.1. *Le rotazioni per inerzia sono costanti e avvengono lungo un asse principale.*

Esercizio 23.2. 31, 38/450. □

Paragrafi di riferimento sul testo: 11.2.

24. LUNEDÌ 25/11/2013

Teorema 24.1. *Se il moto soddisfa l'ipotesi dei lavori virtuali, valgono le equazioni di Lagrange*

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T^L}{\partial \dot{q}_h} \right] - \frac{\partial T^L}{\partial q_h} = Q_h, \quad h = 1, \dots, \ell.$$

Teorema 24.2. *L'energia cinetica è data dalla somma di una forma quadratica T_2^L nelle $\dot{q}_h$, e di una parte lineare T_1^L nelle $\dot{q}_h$ che è nulla se i vincoli sono fissi.*

Teorema 24.3. *La forma T_2^L è simmetrica e definita positiva.*

Corollario 24.4. *Il sistema delle equazioni di Lagrange si può mettere in forma normale nelle $\dot{q}_h$.*

Esercizio 24.5. 16/620. □

Paragrafi di riferimento sul testo: 9.1, 9.2.

25. MARTEDÌ 26/11/2013

Esercizio 25.1. 1/620. □

Le equazioni di Lagrange nel caso conservativo: il potenziale lagrangiano e la funzione lagrangiana.

Esercizio 25.2. 1/630. □

Le equazioni di Lagrange in un sistema di riferimento mobile; componenti lagrangiane delle forze fittizie.

La forza di trascinamento come forza conservativa nel caso del sistema mobile con $\omega = \text{costante}$.

La forza di Coriolis ha componenti lagrangiane nulle nel caso di rigidi vincolati a un piano ruotante intorno a un suo asse.

Paragrafi di riferimento sul testo: 7.4, 9.4.

26. LUNEDÌ 2/12/2013

Distribuzioni di forze conservative.

Componenti lagrangiane delle forze conservative. Connessione tra potenziale delle forze e potenziale lagrangiano.

Definizione di hamiltoniana.

Lemma 26.1. *Lungo i moti*

$$\frac{d}{dt}\mathcal{H} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}.$$

Proposizione 26.2. *Se i vincoli sono fissi*

$$\mathcal{H} = T^L - U^L.$$

Teorema 26.3. *Se i vincoli sono fissi e le forze conservative $\mathcal{H}$ è costante lungo ciascun moto.*

Esercizio 26.4. 19/620. □

Paragrafi di riferimento sul testo: 7.4, 10.1.

27. MARTEDÌ 3/12/2013

Teorema 27.1. *Se le forze sono conservative, $\mathbf{q}_{\text{eq}}$ è un massimo isolato per il potenziale lagrangiano e i vincoli sono fissi, allora $\mathbf{q}_{\text{eq}}$ è di equilibrio stabile.*

Piccole oscillazioni nei punti critici del potenziale, in cui l'hessiana del potenziale è definita negativa: lagrangiana ridotta $\mathcal{L}^*$.

Teorema 27.2. *Esiste un cambiamento di coordinate lagrangiane che dà*

$$\mathcal{L}^*(\boldsymbol{\lambda}, \dot{\boldsymbol{\lambda}}) = \frac{1}{2} \sum_{h=1}^{\ell} [\dot{\lambda}_h^2 - \omega_h^2 \lambda_h^2].$$

Metodo di calcolo delle frequenze come soluzioni di

$$\det(\omega^2 \mathbf{A} + \mathbf{U}) = 0.$$

Esercizio 27.3. 11/680. □

Paragrafi di riferimento sul testo: 10.1, 10.2.

28. MERCOLEDÌ 4/12/2013

Esercizio 28.1. 8/630; 21/660; 6/680. □

29. LUNEDÌ 9/12/2013

Definizione di campo di forze centrale.

Moti in campi centrali.

Teorema 29.1. *Un moto in un campo centrale è piano; è rettilineo se*

$$\overrightarrow{OP} \times \mathbf{v}(0) = 0.$$

La velocità areolare.

Teorema 29.2. *In un moto in campo centrale la velocità areolare è costante.*

Esercizio 29.3. 3/220

□

Paragrafi di riferimento sul testo: 12.1.

30. MARTEDÌ 10/12/2013

La formula di Binet.

Teorema 30.1. *Il campo*

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}, \quad \mathbf{x} \neq 0,$$

è conservativo se e solo se $\mathbf{f}$ dipende solo da $|\mathbf{x}|$.

Il vincolo anolomo del rotolamento puro. Esempio delle due circonferenze che rotolano l'una internamente all'altra.

Esercizio 30.2. 1, 5/220, 26/450

□

Paragrafi di riferimento sul testo: 4.9, 12.1.

31. MERCOLEDÌ 11/12/2013

Spostamenti virtuali, lavori virtuali e ipotesi dei lavori virtuali.

Velocità virtuali; caso dei vincoli mobili.

Esercizio 31.1. 1/580, 22/630.

□

Paragrafi di riferimento sul testo: 8.5.

32. LUNEDÌ 16/12/2013

Moti polari con attrito.

Esercizio 32.1. 3/580, 36/630.



Paragrafi di riferimento sul testo: 11.3.

33. MARTEDÌ 17/12/2013

Esercizio 33.1. 39/630, 6, 22/660.



34. MERCOLEDÌ 18/12/2013

Esercizio 34.1. 3, 19/560.



FINE DEL CORSO