DIARIO DELLE LEZIONI

20.09 - Introduzione al corso. Richiami di insiemistica. Notazioni. Inclusione. Operazioni insiemistiche: unione e intersezione. Complementare di un insieme e principali proprietà. Esempi.

21.09 - Principali proprietà delle operazioni insiemistiche. Leggi di De Morgan. Coppia ordinata e prodotto cartesiano di due insiemi. Rappresentazione geometrica di $\mathbb{N}$ e $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. n -pla ordinata e prodotto cartesiano di un numero finito di insiemi. Esempi.

22.09 - Insiemi numerici: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$. $\mathbb{Q}$ è un campo totalmente ordinato. Proprietà di densità e proprietà di Archimede in $\mathbb{Q}$. L'equazione $x^2 = 2$ non ha soluzioni razionali.

23.09 - $\mathbb{R}$ è un campo totalmente ordinato archimedeo. Proprietà di densità in $\mathbb{R}$. Intervalli. Definizione di valore assoluto. Proprietà del valore assoluto. Esempi.

24.09 - Maggiorante e minorante. Insiemi limitati superiormente, limitati inferiormente, limitati e illimitati. Massimo elemento e minimo elemento. Estremo superiore e estremo inferiore. Proprietà di completezza di $\mathbb{R}$.* La proprietà di completezza non è vera in $\mathbb{Q}$.* Esempi.

27.09 - Ogni insieme finito ha minimo e massimo. Proprietà caratteristiche dell'estremo superiore e dell'estremo inferiore. $\mathbb{N}$ non è limitato superiormente in $\mathbb{R}$. Teorema di esistenza della radice n -sima.* Determinazione di inf, sup, min e max di insiemi. Esempi.

28.09 - Elevamento a potenza. Proprietà delle potenze. Disuguaglianze con valore assoluto e radici. Disuguaglianza triangolare del valore assoluto. Esempi.

29.09 - Teorema di esistenza del logaritmo in base $a > 0$, $a \neq 1$.* Proprietà dei logaritmi. Esempi.

30.09 - Funzioni di insiemi arbitrari. Dominio, immagine e grafico di funzioni. Funzioni reali di una variabile reale. Dominio naturale. Polinomi. Funzioni razionali. Esempi.

01.10 - Funzione identità e funzione restrizione di insiemi. Funzioni monotone. Funzioni pari e dispari. Funzioni elementari. Funzioni potenza: grafici e principali proprietà. Esempi.

04.10 - Successioni. Gradino di Heaviside. Funzione segno. Funzione parte intera. Funzioni reali limitate superiormente, limitate inferiormente e limitate. Estremo superiore e estremo inferiore di funzioni. Massimo globale e minimo globale di funzioni. Esempi.

05.10 - Proprietà caratteristiche dell'estremo superiore e dell'estremo inferiore di funzioni. Esercizi su inf, sup, min e max di funzioni. Esempi.

06.10 - Funzioni esponenziali e funzioni logaritmiche. Funzioni iniettive, suriettive e biiettive. Insiemi numerabili. $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ sono insiemi numerabili. Esempi.

07.10 - $\mathbb{Q}$ è un insieme numerabile e $\mathbb{R}$ non è un insieme numerabile.* Funzioni composte. La composizione di funzioni non è commutativa. Funzioni periodiche. Funzioni trigonometriche: $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$. Esempi.

08.10 - Funzione invertibile. Funzione inversa. Una funzione strettamente monotona è invertibile e la funzione inversa è strettamente monotona. Funzioni inverse: $\arcsin x$ e $\arccos x$. Esempi.

11.10 - Funzione inversa: $\operatorname{arctg} x$. Distanza euclidea in $\mathbb{R}$. Intorni sferici. Proprietà degli intorni. Minimo locale e massimo locale. Esempi.

12.10 - Retta ampliata. Intorni di $+\infty$ e $-\infty$. Punti d'accumulazione. Definizione di limite di funzione. Esempi.

13.10 - Teorema di Bolzano-Weierstrass.* Unicità del limite. Le funzioni con limite finito sono localmente limitate. Le successioni con limite finito sono limitate. Permanenza del segno. Non esiste $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$. Esempi.

14.10 - Esempio di successione limitata che non ammette limite: $\{(-1)^n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Punti d'accumulazione destro e sinistro. Limite destro e limite sinistro. Algebra dei limiti finiti. Esempi.

15.10 - Teorema del confronto. Aritmetica parziale dei limiti in $\mathbb{R}^*$. Limite della successione $\{a^n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Limiti di funzioni razionali. Esempi.

18.10 - Forme indeterminate. Disuguaglianza di Bernoulli. Esempi.

19.10 - Teorema di esistenza del limite destro per funzioni monotone. Teorema di esistenza del limite sinistro per funzioni monotone. La disuguaglianza notevole $2^x > x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Esempi.

20.10 - Limiti di funzioni potenza, di funzioni esponenziali e di funzioni logaritmiche. Esempi.

21.10 - Limite della funzione composta. Cambiamento di variabile nei limiti. Limiti di funzioni trigonometriche. Esempi.

22.10 - Funzioni infinitesime e funzioni infinite. Il simbolo di Landau $o(1)$. Limiti delle funzioni inverse di funzioni trigonometriche. Limiti notevoli di funzioni trigonometriche e loro espressione in termini di $o(1)$. Infinitesimi e infiniti: confronto fra esponenziali, potenze e logaritmi.* Esempi.

25.10 - Infiniti e infinitesimi di ordine superiore, inferiore e dello stesso ordine. La successione $\{(1 + \frac{1}{n})^n\}_{n \geq 1}$ è strettamente crescente e limitata. Definizione del numero e di Nepero. Esempi.

26.10 - Logaritmo naturale. Limiti notevoli che seguono dalla definizione di e . Definizione del fattoriale $n!$. Gerarchie di infiniti per successioni. Approssimazioni elementari del valore di $n!$. Formula di Stirling.* Esempi.

27.10 - Definizione di serie numerica. Successione delle somme parziali. Serie convergenti, divergenti e irregolari. Condizione necessaria per la convergenza. Serie di Méngoli. Linearità. Aritmetica parziale in $\mathbb{R}^*$ per le serie. Esempi.

28.10 - Serie geometrica. Coda e errore delle serie. Serie a termini positivi. Serie armonica. Esempi.

29.10 - Criterio del confronto per serie a termini positivi. Serie armonica generalizzata. Esempi.

02.11 - Criterio del confronto asintotico. Criterio del rapporto. Esempi.

03.11 - Criterio della radice. Serie numeriche a termini di segno variabile: convergenza assoluta. Parte positiva e parte negativa dei numeri reali. Le serie assolutamente convergenti sono convergenti e $|\sum_{n=0}^{\infty} a_n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$. Esempi.

- 04.11** - Serie a termini di segno alterno. Criterio di Leibniz con stima dell'errore.* Stabilire il comportamento di serie numeriche: esempi.
- 05.11** - Limiti notevoli che seguono dalla definizione del numero e . Il simbolo di Landau $o(\cdot)$ "o piccolo". Esempi.
- 08.11** - Teorema ponte.* Non esistenza di limiti. Funzioni continue. Continuità delle funzioni elementari. Continuità da destra e da sinistra. Algebra delle funzioni continue. Le funzioni razionali sono continue. Permanenza del segno. Composizione di funzioni continue. Esempi.
- 09.11** - Punti di discontinuità: eliminabile, prima specie e seconda specie. Calcolo di limiti con $o(\cdot)$ "o piccolo". Esempi.
- 10.11** - Discontinuità delle funzioni monotone in intervalli. Teorema degli zeri.* Teorema dei valori intermedi. Esempi.
- 11.11** - Migliore approssimazione lineare. Retta tangente non verticale. Funzioni derivabili. Derivata di e^x . Derivabilità e continuità. Esempi.
- 12.11** - Funzioni di classe C^1 . Retta tangente verticale. Derivata destra e sinistra. Algebra delle derivate. Derivata di funzioni composte o regola della catena.* Derivata di x^α ($\alpha \in \mathbb{R}$), a^x ($a > 0$), $\sin x$, $\cos x$ e $\tan x$. Esempi.
- 15.11** - Funzioni continue e invertibili.* Continuità della funzione inversa. Derivata della funzione inversa. Derivata di $\log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$). Esempi.
- 16.11** - Teorema di Fermat. Punti critici o stazionari. Le funzioni iperboliche $\sinh x$, $\cosh x$ e le loro derivate. Una disuguaglianza notevole: $|\sin x| \leq |x|$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Esempi.
- 17.11** - Teorema di Weierstrass.* Ricerca del minimo assoluto e del massimo assoluto per funzioni continue in intervalli chiusi e limitati. Teorema di Rolle. Derivata di $\arcsin x$, $\arccos x$ e $\arctan x$. Esempi.
- 18.11** - Teorema di Lagrange. Criterio di monotonia tramite il segno della derivata. Funzioni con derivata nulla in un intervallo. Esempi.
- 19.11** - Conseguenza del teorema di Lagrange per la derivabilità in un punto. Derivate successive. Funzioni di classe C^n , $n \geq 1$, e di classe C^∞ . Esempi.
- 22.11** - Polinomio di Taylor. Polinomio di Maclaurin. Polinomi di Maclaurin delle funzioni e^x e $\log(1+x)$. Esempi.
- 23.11** - Teorema di de L'Hôpital.* La funzione inversa di $\sinh x$ e la sua derivata. Esempi.
- 24.11** - Teorema di Peano: formula di Taylor con valutazione del resto secondo Peano. Sviluppo di Maclaurin di e^x e $\log(1+x)$. Studio del segno della derivata nella ricerca dei punti di estremo. Esempi.
- 25.11** - Sviluppo di Maclaurin di $\sin x$ e $\cos x$. Lo sviluppo di Taylor per determinare l'ordine di infinitesimo: esempi.
- 26.11** - Formula del resto secondo Lagrange.* Applicazione del resto di Lagrange: $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ ($x \in \mathbb{R}$). Studio del segno della derivata nella ricerca dei punti di estremo. Esempi.
- 29.11** - Sviluppo di Maclaurin delle funzioni $\sinh x$ e $\cosh x$. Esercizi su limiti, continuità e derivabilità.
- 30.11** - Esercitazione su limiti, serie, continuità e derivabilità.
- 01.12** - Funzioni convesse (concave) e strettamente convesse (concave). Derivabilità da destra*, da sinistra* e continuità delle funzioni convesse e concave. Un punto critico di una funzione convessa (concava) è punto di minimo (massimo) assoluto. Formula del binomio di Newton.* Esempi.
- 02.12** - Criterio di convessità per funzioni derivabili.* Criterio di convessità per funzioni due volte derivabili. Le disuguaglianze notevoli $\forall x \in \mathbb{R} : e^x \geq 1+x$ e $\forall x > -1 : \log(1+x) \leq x$. Sviluppo di Maclaurin di $(1+x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Esempi: sviluppo di Maclaurin di $\frac{1}{1+x}$ ($\alpha = -1$); sviluppo di Maclaurin di $\sqrt{1+x}$ ($\alpha = \frac{1}{2}$). Esempi.
- 03.12** - Definizione di punto di flesso. Condizione necessaria per punti di flesso. Studio di funzioni. Asintoti verticali, orizzontali e obliqui. Esempi.
- 06.12** - Suddivisione di un intervallo chiuso e limitato. Somme inferiori e superiori per una funzione limitata in un intervallo chiuso e limitato. Funzioni integrabili e integrale di Riemann. La funzione di Dirichlet non è integrabile. Esempi.
- 07.12** - Le funzioni continue sono integrabili.* Le funzioni monotone sono integrabili.* Le funzioni limitate con un numero finito di discontinuità sono integrabili.* Proprietà dell'integrale. Significato geometrico dell'integrale. Integrale definito indipendentemente dall'ordine degli estremi. Funzioni integrali. Esempi.
- 09.12** - Teorema della media. Valor medio. Le funzioni integrali sono continue. Teorema fondamentale del calcolo integrale.* Derivate di funzioni integrali. Definizione di primitiva. Primitive di funzioni elementari. Esempi.
- 10.12** - Unicità delle primitive a meno di una costante. Formula fondamentale del calcolo integrale. Funzioni con primitive non esprimibili in termini di funzioni elementari. Integrale indefinito. Integrazione per parti. Esempi.
- 13.12** - Equazioni differenziali ordinarie lineari del primo ordine. Soluzione e problema di Cauchy. Integrale generale di equazioni differenziali lineari del primo ordine omogenee. Integrazione di funzioni razionali $\frac{P(x)}{Q(x)}$ con $Q(x)$ polinomio di secondo grado. Esempi.
- 14.12** - Integrale generale di equazioni differenziali lineari del primo ordine complete. Metodo di variazione della costante. Metodo *ad hoc* per polinomi. Esempi.
- 15.12** - Integrazione per sostituzione. Integrali di funzioni pari e di funzioni dispari su intervalli simmetrici. Equazioni differenziali lineari del primo ordine: metodo *ad hoc* per esponenziali, $\sin x$ e $\cos x$. Esempi.
- 16.12** - Equazioni differenziali lineari del secondo ordine. Soluzione e problema di Cauchy. Teorema di esistenza e unicità della soluzione del problema di Cauchy.* Equazioni omogenee. Soluzioni linearmente indipendenti. Integrale generale dell'equazione completa. Equazioni differenziali del secondo ordine a coefficienti costanti. Equazione caratteristica. Esempi.
- 17.12** - Equazioni differenziali lineari del secondo ordine a coefficienti costanti: metodo *ad hoc* per polinomi e esponenziali. Studio di una funzione integrale. Esempi.
- 20.12** - Equazioni differenziali lineari del secondo ordine a coefficienti costanti: metodo *ad hoc* per $\sin x$ e $\cos x$. Esercizi su equazioni differenziali, studio di funzioni e funzioni integrali.

*SENZA DIMOSTRAZIONE