

## DIARIO DELLE LEZIONI

- 21.09** - Richiami di insiemistica. Notazioni. Inclusione. Operazioni insiemistiche: unione, intersezione, complementare e prodotto cartesiano. Proprietà delle operazioni insiemistiche. Leggi di De Morgan. Esempi.
- 22.09** - Insiemi numerici:  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$ . L'equazione  $x^2 = 2$  non ha soluzioni razionali. Proprietà dei numeri reali:  $\mathbb{R}$  è un campo ordinato. Proprietà di Archimede. Proprietà di densità. Esempi.
- 23.09** - Intervalli. Valore assoluto: definizione e proprietà. Disuguaglianza triangolare. Esempi.
- 24.09** - Maggiorante, minorante, massimo, minimo, estremo superiore e estremo inferiore. Insiemi limitati superiormente, limitati inferiormente, limitati e illimitati. Disuguaglianze con il valore assoluto. Esempi.
- 25.09** - Proprietà caratteristiche dell'estremo superiore e dell'estremo inferiore. La proprietà di completezza non è vera in  $\mathbb{Q}$ . Proprietà di completezza di  $\mathbb{R}^*$ . Disuguaglianze con il valore assoluto. Esempi.
- 28.09** - Teorema di esistenza della radice  $n$ -sima\*. Proprietà delle potenze. Esempi.
- 29.09** - Teorema di esistenza del logaritmo in base  $a > 0$  con  $a \neq 1$ \*. Proprietà dei logaritmi. Esempi.
- 30.09** - Funzioni tra insiemi arbitrari. Dominio, immagine, grafico e dominio naturale di funzioni. Funzioni reali di una variabile reale. Funzioni razionali. Principio di induzione. Disuguaglianza di Bernoulli. Esempi.
- 01.10** - Funzione identità. Funzione restrizione. Successioni. Funzioni monotone. Funzione parte intera. Gradino di Heaviside. Funzione segno. Funzioni pari, dispari e periodiche. Funzione mantissa. Esempi.
- 02.10** - Funzioni elementari. Funzioni potenza: grafici e proprietà. Esercizi su estremo superiore ed estremo inferiore di insiemi di numeri reali. Esempi.
- 05.10** - Funzioni esponenziali e funzioni logaritmiche. Funzioni limitate superiormente, limitate inferiormente e limitate. Estremo superiore, estremo inferiore, massimo globale e minimo globale di funzioni. Esempi.
- 06.10** - Funzioni trigonometriche. Funzioni iniettive, suriettive e biiettive. Insiemi numerabili. Esempi.
- 07.10** - Funzioni composte. La composizione non è commutativa. Proprietà associativa della composizione. Composizione di funzioni monotone e di funzioni iniettive. Fattoriale e coefficiente binomiale. Esempi.
- 08.10** - Funzione invertibile. Funzione inversa. Funzioni inverse di funzioni strettamente monotone. Proprietà dei coefficienti binomiali. Esempi.
- 09.10** - Funzioni inverse delle funzioni trigonometriche: arcoseno, arcocoseno e arcotangente. Formula del binomio di Newton: dimostrazione per induzione. Esempi.
- 12.10** - Distanza euclidea in  $\mathbb{R}$ . Intorni sferici. Proprietà degli intorni. Minimo locale e massimo locale. Retta ampliata. Intorni di  $+\infty$  e  $-\infty$ . Punti d'accumulazione. Esempi.
- 13.10** - Teorema di Bolzano-Weierstrass\*. Definizione di limite di funzione. Il triangolo di Tartaglia. Esempi.
- 14.10** - Unicità del limite. Le funzioni con limite finito sono definitivamente limitate. Le successioni con limite finito sono limitate. Permanenza del segno. Non esistono i limiti:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n$ . Esempi.
- 15.10** - Punti d'accumulazione destro e sinistro. Limite destro e limite sinistro. Algebra dei limiti finiti. Il teorema di Bolzano-Weierstrass non vale in  $\mathbb{Q}$ . Esempi.
- 19.10** - Teorema del confronto. Aritmetica parziale dei limiti in  $\mathbb{R}^*$  per somma e prodotto di funzioni. Limite della successione  $\{a_n\}$ ,  $a > 1$ . Esempi.
- 20.10** - Ancora aritmetica parziale dei limiti in  $\mathbb{R}^*$ . Forme indeterminate. Limiti di polinomi e di funzioni razionali a  $+\infty$  e a  $-\infty$ . Introduzione al teorema di esistenza del limite per funzioni monotone. Esempi.
- 21.10** - Teorema di esistenza del limite per funzioni monotone. Limiti di funzioni potenza. Limiti di funzioni esponenziali e di funzioni logaritmiche. Esempi.
- 22.10** - Limite della funzione composta. Cambiamento di variabile nei limiti. Limiti di funzioni trigonometriche. Funzioni infinitesime. Il simbolo di Landau  $o(1)$ . Limiti notevoli di funzioni trigonometriche e loro espressione in termini di  $o(1)$ . Esempi.
- 23.10** - Funzioni divergenti o infinite.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{4^x} = 0$ . Infiniti e infinitesimi: confronto fra esponenziali, potenze e logaritmi. Infiniti (infinitesimi) di ordine superiore, inferiore e dello stesso ordine. Esempi.
- 26.10** - Limiti di successioni a valori in  $\mathbb{R}$ . Gerarchie di infiniti. Ancora limiti notevoli di funzioni trigonometriche e loro espressione in termini di  $o(1)$ . Confronto fra infinitesimi. Esempi.
- 27.10** - La successione  $n \mapsto (1 + \frac{1}{n})^n$  è strettamente crescente e limitata. Definizione del numero  $e$  di Nepero. Logaritmo naturale. Uso dei limiti notevoli nel calcolo di limiti. Esempi.
- 28.10** - Approssimazioni del valore di  $n!$ . Formula di Stirling\*. Limiti notevoli con il numero  $e$ . Esempi.
- 29.10** - Definizione di serie numerica. Successione delle somme parziali. Serie convergenti, divergenti e irregolari. Condizione necessaria per la convergenza. Linearità. Serie di Mengoli. Serie geometrica. Esempi.
- 30.10** - Coda e errore delle serie. Serie a termini positivi. Serie armonica. Serie a termini definitivamente positivi. Criterio del confronto per serie a termini positivi. Esempi.
- 02.11** - Serie armonica generalizzata. Criterio del confronto asintotico. Esempi.
- 03.11** - Criterio del rapporto. Criterio della radice. Esempi.
- 04.11** - Serie numeriche a termini di segno variabile. Convergenza assoluta. Parte positiva e parte negativa di un numero reale. Una serie assolutamente convergente è (semplicemente) convergente. Esempi.

- 05.11** - Serie a termini di segno alterno. Criterio di Leibniz con stima dell'errore. Esempi.
- 06.11** - Teorema ponte\*. Non esistenza di limiti. Funzioni continue. Continuità delle funzioni elementari. Continuità da destra e da sinistra. Permanenza del segno. Composizione di funzioni continue. Esempi.
- 09.11** - Punti di discontinuità: eliminabile, prima specie e seconda specie. Discontinuità delle funzioni monotone. Ulteriori limiti notevoli che seguono dalla definizione del numero  $e$ . Esempi.
- 10.11** - Teorema degli zeri\*. Teorema dei valori intermedi. Funzioni continue e invertibili\*. Continuità della funzione inversa. Il simbolo di Landau  $o(\cdot)$ . Esempi.
- 11.11** - Il simbolo di Landau  $O(\cdot)$ . Teorema di Weierstrass\*. Esercizi sulle funzioni continue. Esempi.
- 12.11** - Calcolo differenziale per funzioni da  $\mathbb{R}$  in  $\mathbb{R}$ . Migliore approssimazione lineare. Retta tangente non verticale. Funzioni derivabili. Derivata di  $x^n$  e  $e^x$ . Derivabilità e continuità. Lo spazio  $C^1(X)$ . Esempi.
- 13.11** - Retta tangente verticale. Una funzione derivabile e pari (dispari) ha derivata dispari (pari). Derivata destra e derivata sinistra. Punto angoloso e cuspidi. Algebra delle derivate. Esempi.
- 16.11** - Derivata di una funzione composta o regola della catena. Derivata della funzione inversa. Derivata di  $x^\alpha$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ),  $a^x$  ( $a > 0$ ),  $\log_a x$  ( $a > 0, a \neq 1$ ),  $\sin x$ ,  $\cos x$  e  $\tan x$ . Esempi.
- 17.11** - Teorema di Fermat. Controesempi. Punti critici. Ricerca del minimo assoluto e del massimo assoluto per funzioni continue in intervalli chiusi e limitati. Derivata di  $\arcsin x$ ,  $\arccos x$  e  $\arctan x$ . Esempi.
- 18.11** - Teorema di Rolle. Controesempi. Teorema di Lagrange. Criteri di monotonia tramite il segno della derivata. Funzioni con derivata nulla in un intervallo. Studio del segno della derivata nella ricerca dei punti di estremo. Esempi.
- 19.11** - Conseguenza del teorema di Lagrange per studiare la derivabilità in un punto. Teorema di de l'Hôpital\*. Esempi.
- 20.11** - Derivate successive. Funzioni di classe  $C^n$  ( $n \geq 1$ ) e  $C^\infty$ . Polinomio di Taylor. Polinomi di Maclaurin delle funzioni  $x \mapsto e^x$  e  $x \mapsto \log(1+x)$ . Esempi.
- 23.11** - Teorema di Peano: formula di Taylor con valutazione del resto secondo Peano. Sviluppo di Maclaurin delle funzioni:  $e^x$ ,  $\log(1+x)$  e  $\sin x$ . Utilizzo dello sviluppo di Taylor nel calcolo dei limiti. Esempi.
- 24.11** - Formula del resto di Lagrange\*. Applicazioni: il numero  $e$  è somma della serie esponenziale; irrazionalità di  $e$ . Sviluppo di Maclaurin di  $x \mapsto \cos x$ . Utilizzo dello sviluppo di Taylor per determinare l'ordine di infinitesimo. Esempi.
- 25.11** - Funzioni convesse (concave) e strettamente convesse (concave). Derivabilità a destra, a sinistra e continuità delle funzioni convesse. Criterio di convessità per funzioni derivabili\*. Criterio di convessità per funzioni due volte derivabili. La disuguaglianza notevole:  $e^x \geq 1+x$ . Un punto critico di una funzione convessa è punto di minimo assoluto. Esempi.
- 26.11** - Le funzioni iperboliche  $\sinh x$  e  $\cosh x$ . Le funzioni inverse di  $\sinh x$  e  $\cosh x$ . Sviluppo di Maclaurin delle funzioni:  $\sinh x$ ,  $\cosh x$  e  $(1+x)^\alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Esempi.
- 27.11** - Definizione di punto di flesso. Condizione necessaria per punti di flesso. Asintoti verticali, orizzontali e obliqui. Studio di funzioni. Esempi.
- 30.11** - Definizione di integrale di Riemann. Suddivisione di un intervallo chiuso e limitato. Suddivisione più fine. Somme inferiori e superiori. Funzioni integrabili e integrale. La funzione di Dirichlet non è integrabile. Esempi.
- 01.12** - Criterio di integrabilità. Le funzioni continue sono integrabili\*. Le funzioni monotone sono integrabili. Le funzioni limitate con un numero finito di discontinuità sono integrabili\*. Proprietà dell'integrale. Significato geometrico dell'integrale. Esempi.
- 02.12** - Teorema della media. Valor medio. Integrale definito indipendentemente dall'ordine degli estremi. Funzioni integrali. Continuità della funzione integrale. Enunciato del teorema fondamentale del calcolo integrale. Esempi.
- 03.12** - Dimostrazione del teorema fondamentale del calcolo integrale. Primitive. Unicità delle primitive a meno di una costante. Formula fondamentale del calcolo integrale. Calcolo di derivate di funzioni integrali. Esempi.
- 04.12** - Integrale indefinito. Primitive di funzioni elementari. Funzioni con primitive non esprimibili in termini di funzioni elementari. Integrazione per parti. Formule ricorsive. Esempi.
- 07.12** - Integrazione per sostituzione. Integrali di funzioni pari e di funzioni dispari su intervalli simmetrici. Integrazione di funzioni razionali  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  con  $Q$  polinomio di secondo grado. Esempi.
- 09.12** - Equazioni differenziali ordinarie. Equazioni lineari del primo ordine. Definizione di soluzione. Problema di Cauchy. Equazioni omogenee. Integrale generale di equazioni differenziali lineari del primo ordine omogenee. Equazione omogenea associata ad una equazione completa. Soluzione particolare. Esempi.
- 10.12** - Integrale generale di equazioni lineari del primo ordine. Metodo di variazione della costante. Metodo *ad hoc* per polinomi, esponenziali,  $\sin x$  e  $\cos x$ . Esempi.
- 11.12** - Integrabilità in senso improprio. Integrali impropri di funzioni positive. Criterio del confronto. Grafici della funzione di Gauss e della funzione di errore. Esempi.
- 14.12** - Equazioni differenziali lineari del secondo ordine. Significato di soluzione. Problema di Cauchy. Teorema di esistenza e unicità della soluzione del problema di Cauchy\*. Equazioni omogenee. Soluzioni linearmente indipendenti. Equazioni del secondo ordine a coefficienti costanti. Equazione caratteristica. Integrale generale. Soluzione particolare. Metodo *ad hoc* per polinomi. Studio di funzioni integrali non esprimibili in termini di funzioni elementari. Esempi.
- 15.12** - Criterio integrale per serie numeriche a termini positivi. Metodo di variazione delle costanti per equazioni differenziali lineari del secondo ordine a coefficienti costanti. Metodo *ad hoc* per esponenziali,  $\sin x$  e  $\cos x$ . Studio di integrali impropri. Disuguaglianze notevoli:  $\log(1+x) \leq x$ ,  $|\sin x| \leq |x|$ . Esempi.

## 16.12 - ESERCITAZIONE