

1 - Verificare la definizione di limite nel seguente caso: $\lim_{x \rightarrow 2} |5 - 3x| = 1$.

In primo luogo, si scelga $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in \mathbb{R}$, con $|x - 2| < \delta$, si abbia $5 - 3x < 0$, e di conseguenza

$$||5 - 3x| - 1| = |3x - 5 - 1| = 3|x - 2| < 3\delta.$$

Pertanto, per ogni $\varepsilon > 0$ risulterà

$$||5 - 3x| - 1| < \varepsilon \quad \forall x \in \mathbb{R}, |x - 2| < \delta,$$

se δ verifica anche la condizione $3\delta \leq \varepsilon$, cioè $0 < \delta \leq \frac{\varepsilon}{3}$.

2 - Determinare l'ordine di infinitesimo per $x \rightarrow 0^+$ della funzione $F(x) = \int_0^{\sqrt{x}} t^4 e^{-3t^2} dt$.

Si deve determinare $\beta > 0$ tale che il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F(x)}{x^\beta}$$

esiste, è finito ed è diverso da zero. Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$, e quindi si può applicare il teorema di de l'Hôpital. Il rapporto delle derivate è dato da

$$\frac{F'(x)}{\beta x^{\beta-1}} = \frac{x^2 e^{-3x}}{2\sqrt{x}} \frac{1}{\beta x^{\beta-1}} = \frac{e^{-3x}}{2\beta} x^{5/2-\beta} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \begin{cases} 0 & \text{se } \beta < 5/2 \\ \frac{1}{5} & \text{se } \beta = 5/2 \\ +\infty & \text{se } \beta > 5/2. \end{cases}$$

In conclusione $\beta = 5/2$.

3 - Studiare al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha \left(\frac{1}{\sqrt[4]{n}} - \sin \frac{1}{\sqrt[4]{n}} \right).$$

La serie è a termini positivi grazie alla disuguaglianza $\sin x \leq x$ per ogni $x \geq 0$. In forza di

$$\sin t = t - \frac{1}{3!} t^3 + o(t^4), \quad t \rightarrow 0,$$

si ha

$$\frac{1}{\sqrt[4]{n}} - \sin \frac{1}{\sqrt[4]{n}} = \frac{1}{6n^{3/4}} + o\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \rightarrow +\infty,$$

e quindi

$$n^\alpha \left(\frac{1}{\sqrt[4]{n}} - \sin \frac{1}{\sqrt[4]{n}} \right) = \frac{1}{6n^{\frac{3}{4}-\alpha}} (1 + o(1)). \quad n \rightarrow +\infty,$$

Pertanto, per il criterio del confronto asintotico la serie assegnata ha lo stesso carattere della serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{4}-\alpha}}$, e di conseguenza la serie converge se e solo se $\frac{3}{4} - \alpha > 1$, cioè $\alpha < -1/4$.

4 - Data la funzione $f(x) = |x \log |x| + x|$ determinare l'insieme di definizione, i limiti agli estremi del dominio, eventuali punti di non derivabilità, gli intervalli di monotonia, eventuali punti di minimo e di massimo, gli intervalli di convessità, eventuali punti di flesso. Tracciare un grafico qualitativo della funzione.

La funzione è definita per ogni $x \neq 0$. Inoltre, la funzione è pari, e quindi basta studiarla per $x > 0$. Si osservi che

$$f(x) = x |\log x + 1| = \begin{cases} -x(\log x + 1) & \text{se } 0 < x \leq 1/e \\ x(\log x + 1) & \text{se } x > 1/e, \end{cases}$$

e quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} -x(\log x + 1) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\log x + 1) = +\infty.$$

Pertanto f si può estendere per continuità in 0, ponendo $f(0) = 0$. Per quanto riguarda la derivata prima di f , si ha

$$f'(x) = \begin{cases} -(\log x + 2) & \text{se } 0 < x < 1/e \\ \log x + 2 & \text{se } x > 1/e, \end{cases}$$

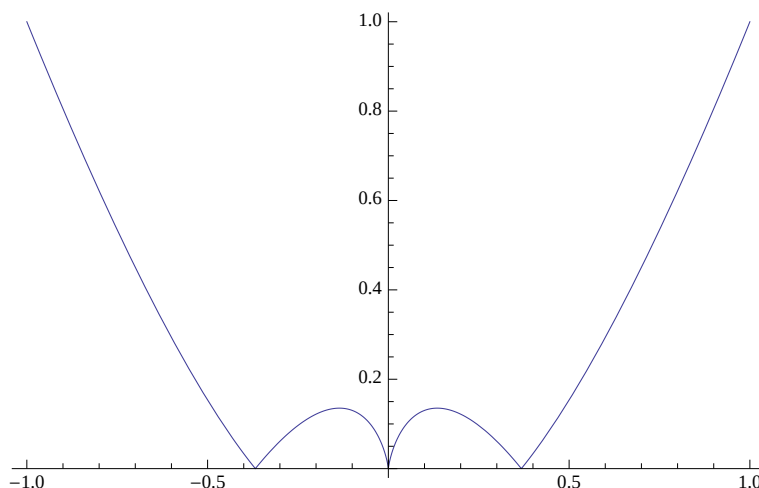
e quindi $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} -(\log x + 2) = +\infty$ e f non è derivabile in $1/e$, in quanto $f'_+(1/e) = 1 \neq -1 = f'_-(1/e)$.

Dallo studio del segno di f' segue che f è crescente in $[0, 1/e^2]$ e in $[1/e, +\infty[$, mentre è decrescente in $[1/e^2, 1/e]$. Pertanto, $f(1/e^2) = 1/e^2$ è un massimo relativo per f , mentre $f(0) = f(1/e) = 0$ è il minimo assoluto per f . Infine, per quanto riguarda la convessità di f , si osservi che

$$f''(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} & \text{se } 0 < x < 1/e \\ \frac{1}{x} & \text{se } x > 1/e, \end{cases}$$

e di conseguenza f è convessa in $[1/e, +\infty[$ ed è concava in $[0, 1/e]$. Si noti che $1/e$ non è un punto di flesso, in quanto non esiste $f'(1/e)$.

Grazie alla parità della funzione, un grafico approssimativo di f è il seguente.



5 - (i) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{x}{x^2+1}y + x^3 \\ y(0) = -\frac{2}{3}. \end{cases} \quad (1)$$

(ii) Determinare i valori del parametro α per i quali ogni soluzione $y(x)$ dell'equazione $y' = \frac{x}{x^2+1}y + x^3$ verifica la condizione

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y(x)}{(x^2+1)^\alpha} = 0.$$

.....
(i) L'integrale generale dell'omogenea associata è dato da

$$y(x) = C e^{\frac{1}{2} \log(x^2+1)} = C \sqrt{x^2+1}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Per determinare un integrale particolare dell'equazione differenziale in (1), si deve utilizzare il metodo di variazione della costante. Pertanto, basta risolvere

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}} dx = \int x \frac{x^2+1-1}{\sqrt{x^2+1}} dx = \int \left[x \sqrt{x^2+1} - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \right] dx = \frac{1}{3}(x^2+1)^{3/2} - \sqrt{x^2+1}.$$

A questo risultato si arriva anche con la sostituzione $t = \sqrt{x^2+1}$. Infatti si ha

$$\int (t^2-1)^{3/2} t^{-1} t (t^2-1)^{-1/2} dt = \int (t^2-1) dt = \frac{t^3}{3} - t.$$

Poichè $t = \sqrt{x^2 + 1}$, si ha

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \frac{1}{3}(x^2 + 1)^{3/2} - \sqrt{x^2 + 1}.$$

Ne segue che l'integrale generale dell'equazione differenziale in (1) è

$$y(x) = C\sqrt{x^2 + 1} + \frac{1}{3}(x^2 + 1)^2 - (x^2 + 1), \quad C \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Imponendo la condizione iniziale $y(0) = -2/3$, si ottiene $C = 0$, e quindi la soluzione di (1) è

$$y(x) = \frac{1}{3}(x^2 + 1)^2 - (x^2 + 1) = \frac{1}{3}(x^4 - x^2 - 2).$$

(ii) Dalla (2) segue

$$\frac{y(x)}{(x^2 + 1)^\alpha} = \frac{1}{(x^2 + 1)^{\alpha-2}} \left(\frac{C}{(x^2 + 1)^{3/2}} + \frac{1}{3} - \frac{1}{x^2 + 1} \right), \quad C \in \mathbb{R},$$

e di conseguenza per $\alpha > 2$ ogni soluzione $y(x)$ verifica

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y(x)}{(x^2 + 1)^\alpha} = 0.$$