

1 - Calcolare il limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \log \left(1 - \frac{3}{x}\right)$.

Tenendo presente il limite notevole

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log(1+t)}{t} = 1,$$

posto $t = -\frac{3}{x}$, si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \log \left(1 - \frac{3}{x}\right) = -3 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log(1+t)}{t} = -3.$$

2 - Studiare il comportamento della serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n-1}} \sin \frac{1}{n}$.

Grazie al limite notevole $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ si ha

$$\sin \frac{1}{n} = \frac{1}{n} (1 + o(1)), \quad n \rightarrow \infty,$$

e di conseguenza

$$\frac{1}{\sqrt{n-1}} \sin \frac{1}{n} = \frac{1}{n^{3/2}} (1 + o(1)), \quad n \rightarrow \infty.$$

Pertanto per il criterio del confronto asintotico la serie assegnata ha lo stesso carattere della serie armonica generalizzata

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$$

e quindi è convergente.

3 - Calcolare l'integrale $\int_0^1 x \sqrt{4-x^2} \, dx$.

L'integrale assegnato è immediato:

$$\int_0^1 x \sqrt{4-x^2} \, dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 (-2x) \sqrt{4-x^2} \, dx = -\frac{1}{3} (4-x^2)^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{8}{3} - \sqrt{3}.$$

4 - Determinare i valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali ogni soluzione $y(x)$ dell'equazione differenziale $y'' - 2y = 3x - 1$ verifica la condizione $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\alpha x} y(x) = 0$.

L'equazione caratteristica dell'equazione omogenea associata

$$\lambda^2 - 2 = 0,$$

ha soluzioni $\lambda_{1/2} = \pm\sqrt{2}$. Pertanto l'integrale generale dell'equazione assegnata è dato da

$$y(x) = C_1 e^{\sqrt{2}x} + C_2 e^{-\sqrt{2}x} + ax + b, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$

dove $a, b \in \mathbb{R}$ sono tali che la funzione $x \rightarrow ax + b$ è una soluzione particolare di $y'' - 2y = 3x - 1$. Si verifica facilmente che $a = -3/2$ e $b = 1/2$.

In realtà, per rispondere al quesito posto non è necessario determinare esplicitamente il valore delle costanti $a, b \in \mathbb{R}$. Infatti, essendo

$$e^{\alpha x} y(x) = C_1 e^{(\alpha+\sqrt{2})x} + C_2 e^{(\alpha-\sqrt{2})x} + e^{\alpha x} (ax + b), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$

si può ugualmente dedurre che se e solo se $\alpha > \sqrt{2}$ ogni soluzione $y(x)$ verifica

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\alpha x} y(x) = 0.$$

5 - Data la funzione $f(x) = x\sqrt{|x^2 - 4|}$ determinare l'insieme di definizione, eventuali simmetrie, i limiti agli estremi del dominio, eventuali punti di non derivabilità, gli intervalli di monotonia, eventuali punti di minimo e di massimo. Tracciare un grafico qualitativo della funzione. (Non è richiesto lo studio della convessità.)

La funzione è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ ed è dispari, in quanto $f(-x) = -f(x)$. Pertanto ci si può limitare a studiare la funzione per $x \geq 0$.

Per quanto riguarda i limiti agli estremi del dominio si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x\sqrt{x^2 - 4} = +\infty.$$

Per calcolare la derivata prima di f è opportuno notare che

$$f(x) = \begin{cases} x\sqrt{4 - x^2} & 0 \leq x \leq 2, \\ x\sqrt{x^2 - 4} & x > 2, \end{cases}$$

e quindi

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2(2 - x^2)}{\sqrt{4 - x^2}} & 0 \leq x < 2, \\ \frac{2(x^2 - 2)}{\sqrt{x^2 - 4}} & x > 2. \end{cases}$$

Poiché

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f'(x) = +\infty,$$

f non è derivabile in 2. Dallo studio del segno di f' segue che f è crescente in $(0, \sqrt{2})$ e in $(2, \infty)$, mentre è decrescente in $(\sqrt{2}, 2)$. Pertanto $f(\sqrt{2}) = 2$ è un massimo locale e $f(2) = 0$ è un minimo locale per f .

Anche se non richiesto dal testo, per completezza si procede a studiare la convessità. La derivata seconda di f è data da

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{2x(x^2 - 6)}{(4 - x^2)^{3/2}} & 0 \leq x < 2, \\ \frac{2x(x^2 - 6)}{(x^2 - 4)^{3/2}} & x > 2. \end{cases}$$

Pertanto la funzione è convessa in $(\sqrt{6}, \infty)$ ed è concava in $(0, 2)$ e in $(2, \sqrt{6})$, e di conseguenza $x = \sqrt{6}$ è un punto di flesso.

Tenendo conto che la funzione è simmetrica rispetto a $(0, 0)$, un grafico approssimativo di f è il seguente.

