

1 - Determinare il valore del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che il limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\pi x} - 1 - \sin(\pi x)}{x^\alpha}$ esista finito e diverso da 0.

Grazie agli sviluppi di MacLaurin di e^x e $\sin x$ si ha

$$e^{\pi x} = 1 + \pi x + \frac{\pi^2}{2}x^2 + o(x^2), \quad x \rightarrow 0,$$

$$\sin(\pi x) = \pi x + o(x^2), \quad x \rightarrow 0,$$

e quindi per $\alpha = 2$ si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\pi x} - 1 - \sin(\pi x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi x + \frac{\pi^2}{2}x^2 - \pi x + o(x^2)}{x^2} = \frac{\pi^2}{2}.$$

2 - Studiare il comportamento della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n-1)!}$.

Conviene applicare il criterio del rapporto:

$$\frac{(n+1)^{n+1}}{(2(n+1)-1)!} \frac{(2n-1)!}{n^n} = \frac{n+1}{2n(2n+1)} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \frac{n+1}{2n(2n+1)} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

grazie anche al limite notevole $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$. Poiché il limite del rapporto è strettamente minore di 1, la serie assegnata è convergente.

3 - Calcolare l'integrale $\int_0^1 \min\{1, \log(x+1)\} dx$.

In primo luogo si osservi che

$$\log(x+1) < 1 \quad \forall x \in [0, 1],$$

tenendo conto di $e > 2$. Pertanto

$$\int_0^1 \min\{1, \log(x+1)\} dx = \int_0^1 \log(x+1) dx,$$

e quindi, integrando per parti si ha

$$\int_0^1 \log(x+1) dx = [x \log(x+1)]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{x+1} dx = \log 2 - \int_0^1 \left[1 - \frac{1}{x+1}\right] dx = 2 \log 2 - 1.$$

4 - Determinare i valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali ogni soluzione $y(x)$ dell'equazione differenziale $y' = y + 5 \sin x$ verifica la condizione $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\alpha x} y(x) = 0$.

L'integrale generale dell'equazione omogenea associata è dato da

$$y(x) = Ce^x, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Pertanto l'integrale generale dell'equazione assegnata è dato da

$$y(x) = Ce^x + a \sin x + b \cos x, \quad C \in \mathbb{R},$$

dove $a, b \in \mathbb{R}$ sono tali che la funzione $x \rightarrow a \sin x + b \cos x$ è una soluzione particolare di $y' = y + 5 \sin x$. Si verifica facilmente che $a = b = -5/2$, e di conseguenza l'integrale generale è dato da

$$y(x) = Ce^x - \frac{5}{2}(\sin x + \cos x), \quad C \in \mathbb{R}.$$

Poiché

$$e^{\alpha x} y(x) = e^{(\alpha+1)x} \left(C - \frac{5}{2} e^{-x} (\sin x + \cos x) \right), \quad C \in \mathbb{R},$$

solo per $\alpha < -1$ ogni soluzione $y(x)$ verifica $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\alpha x} y(x) = 0$.

Si noti che, per rispondere al quesito posto, non è necessario determinare esplicitamente il valore delle costanti a e b , in quanto tali valori non alterano il risultato del limite.

5 - Data la funzione $f(x) = 2\sqrt{x} - \log x$ determinare l'insieme di definizione, i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti, gli intervalli di monotonia, eventuali punti di minimo e di massimo, gli intervalli di convessità ed eventuali punti di flesso. Tracciare un grafico qualitativo della funzione.

La funzione è definita per ogni $x > 0$. Per quanto riguarda i limiti agli estremi del dominio si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \left(2 - \frac{\log x}{\sqrt{x}} \right) = +\infty,$$

e di conseguenza $x = 0$ è asintoto verticale.

La derivata prima di f è data da

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{x} - 1}{x}, \quad x > 0.$$

Dallo studio del segno di f' segue che f è decrescente in $(0, 1)$, mentre è crescente in $(1, \infty)$. Pertanto, $f(1) = 2$ è il minimo assoluto per f .

La derivata seconda di f è data da

$$f''(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}} + \frac{1}{x^2} = \frac{2 - \sqrt{x}}{2x^2}, \quad x > 0.$$

Pertanto la funzione è convessa in $(0, 4)$ ed è concava in $(4, \infty)$, e di conseguenza $x = 4$ è punto di flesso. Un grafico approssimativo di f è il seguente.

