1 - Determinare i valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ tali che la funzione $f(x) = \begin{cases} a\cos x & x \geq \pi \\ e^{2x^2-\pi x} & x < \pi \end{cases}$ è continua in tutto $\mathbb{R}$.

....

Per ogni $a \in \mathbb{R}$ la funzione è continua in $\mathbb{R} - \{\pi\}$. Si osservi che

$$\lim_{x\to\pi^-} f(x) = e^{\pi^2}\,, \qquad \lim_{x\to\pi^+} f(x) = -a = f(\pi),\ ,$$

e quindi f è continua anche in π solo per $a = -e^{\pi^2}$.

---

2 - Studiare il comportamento della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2-1}{n^4+\pi}$.

....

La serie è definitivamente a termini positivi. In forza di

$$\frac{n^2-1}{n^4+\pi} = \frac{1}{n^2}(1+o(1))\,, \qquad n \to +\infty\,,$$

e del criterio del confronto asintotico, la serie assegnata ha lo stesso carattere della serie armonica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, e quindi converge.
Anche con il criterio del confronto, in quanto

$$\frac{n^2-1}{n^4+\pi} \leq \frac{n^2}{n^4} = \frac{1}{n^2}\,, \qquad \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

---

3 - Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_0^2 \frac{|x-1|}{x-3}\,dx$.

....

In primo luogo si osservi che

$$\int_0^2 \frac{|x-1|}{x-3}\,dx = -\int_0^1 \frac{x-1}{x-3}\,dx + \int_1^2 \frac{x-1}{x-3}\,dx\,.$$

In forza di

$$\int \frac{x-1}{x-3}\,dx = \int \left(1 + \frac{2}{x-3}\right)dx = x + 2\log|x-3|\,,$$

si ha

$$\int_0^2 \frac{|x-1|}{x-3}\,dx = -\big[x+2\log(3-x)\big]_0^1 + \big[x+2\log(3-x)\big]_1^2 = 2\log 3 - 4\log 2 = -\log\frac{16}{9}\,.$$

---

4 - Determinare i valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali ogni soluzione $y(x)$ dell'equazione differenziale $y''-y'+y = e^{2x}$ verifica la condizione $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} e^{\alpha x}y(x) = 0$.

....

L'equazione caratteristica dell'equazione omogenea associata

$$\lambda^2 - \lambda + 1 = 0,$$

ha soluzioni $\lambda_{1/2} = \dfrac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. Pertanto l'integrale generale dell'equazione assegnata è dato da

$$y(x) = e^{\frac{x}{2}}\left(C_1\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C_2\,\mathrm{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right) + ae^{2x}, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$

dove $a \in \mathbb{R}$ è tale che la funzione $x \to ae^{2x}$ è una soluzione particolare di $y''-y'+y = e^{2x}$. Si verifica facilmente che $a = 1/3$.
In ogni caso, per rispondere al quesito posto non è necessario determinare esplicitamente il valore della costante $a \in \mathbb{R}$. Infatti, poiché

$$e^{\alpha x}y(x) = e^{(\alpha+\frac{1}{2})x}\left(C_1\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C_2\,\mathrm{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right) + ae^{(\alpha+2)x}, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$

solo per $\alpha > -1/2$ ogni soluzione $y(x)$ verifica

$$\lim_{x\to-\infty} e^{\alpha x} y(x) = 0\,.$$

5 - Data la funzione $f(x) = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x + 1}$ nell'intervallo $[0, 2\pi]$, determinare l'insieme di definizione, i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti, gli intervalli di monotonia, eventuali punti di minimo e di massimo, gli intervalli di convessità ed eventuali punti di flesso. Tracciare un grafico qualitativo della funzione.

....

La funzione è definita e positiva per ogni $x \in [0, 2\pi]$, $x \neq \frac{3}{2}\pi$. Per quanto riguarda i limiti agli estremi del dominio si ha

$$f(0) = f(2\pi) = 1 \qquad \lim_{x\to\frac{3}{2}\pi^-} f(x) = \lim_{x\to\frac{3}{2}\pi^+} f(x) = +\infty\,,$$

e di conseguenza $x = \frac{3}{2}\pi$ è asintoto verticale.
La derivata prima di f è data da

$$f'(x) = -\frac{\cos x}{(\operatorname{sen} x + 1)^2}\,, \qquad\qquad x \neq \frac{3}{2}\pi\,.$$

Dallo studio del segno di f' segue che f è crescente in $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right)$, mentre è decrescente in $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ e in $\left(\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right)$. Pertanto, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$ è il minimo assoluto per f, mentre $f(0) = 1$ è un massimo relativo e $f(2\pi) = 1$ è un minimo relativo per f.
La derivata seconda di f è data da

$$f''(x) = \frac{2\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x}{(\operatorname{sen} x + 1)^3} = \frac{2 - \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x}{(\operatorname{sen} x + 1)^3}\,, \qquad\qquad x \neq \frac{3}{2}\pi\,.$$

Si osservi che $2 - \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x > 0$, in quanto posto $t = \operatorname{sen} x$, si ha $2 - t^2 + t > 0$ per $-1 < t < 2$, cioè $-1 < \operatorname{sen} x < 2$.
Pertanto la funzione è convessa in $\left[0, \frac{3}{2}\pi\right[$ e in $\left]\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right]$.
Un grafico approssimativo di f è il seguente.