1 - Determinare i valori dei parametri reali α e β in modo che si abbia

$$\operatorname{sen}(\sqrt{2x}) + \alpha \log(1+\sqrt{x}) + \beta x = -\frac{2\sqrt{2}}{3} x^{3/2} + o(x^{3/2}) \quad \text{per} \quad x \to 0^+ .$$

....

Per gli sviluppi di Maclaurin di $\sin t$ e $\log(1+t)$ si ha

$$\operatorname{sen}(\sqrt{2x}) = \sqrt{2x} - \frac{1}{3!}(2x)^{3/2} + o(x^{3/2}) \quad \text{per} \quad x \to 0^+ ,$$

$$\log(1+\sqrt{x}) = \sqrt{x} - \frac{x}{2} + \frac{1}{3} x^{3/2} + o(x^{3/2}) \quad \text{per} \quad x \to 0^+ ,$$

e di conseguenza

$$\operatorname{sen}(\sqrt{2x}) + \alpha \log(1+\sqrt{x}) + \beta x = (\sqrt{2}+\alpha)\sqrt{x} + \big(\beta - \frac{\alpha}{2}\big)x + \frac{\alpha - \sqrt{2}}{3} x^{3/2} + o(x^{3/2}) \quad \text{per} \quad x \to 0^+ .$$

In conclusione, $\alpha = -\sqrt{2}$ e $\beta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

---

2 - Studiare al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ il comportamento della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{(2\alpha+1)n}}{n^2+\sqrt{n}}$.

....

La serie è a termini positivi, e grazie all'espressione del termine n-esimo della serie è conveniente applicare il criterio del rapporto. Infatti

$$\frac{e^{(2\alpha+1)(n+1)}}{(n+1)^2+\sqrt{n+1}} \frac{n^2+\sqrt{n}}{e^{(2\alpha+1)n}} = e^{2\alpha+1} \frac{n^2+\sqrt{n}}{(n+1)^2+\sqrt{n+1}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{2\alpha+1} ,$$

e di conseguenza la serie converge se $e^{2\alpha+1} < 1$, cioè $\alpha < -\frac{1}{2}$, mentre diverge positivamente se $\alpha > -\frac{1}{2}$. Se $\alpha = -\frac{1}{2}$ la serie è data da

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+\sqrt{n}} ,$$

e quindi converge.

In conclusione, la serie assegnata converge per $\alpha \le -\frac{1}{2}$, mentre diverge positivamente per $\alpha > -\frac{1}{2}$.

---

3 - Determinare la primitiva $F(x)$ della funzione $f(x) = \dfrac{e^x}{7+e^{2x}}$ che soddisfa la condizione $F(\log\sqrt{7}) = \dfrac{\pi}{2\sqrt{7}}$.

....

L'integrale indefinito di $f(x)$ è dato da

$$\int f(x)\, dx = \frac{1}{7} \int \frac{e^x}{1+e^{2x}/7}\, dx = \frac{1}{\sqrt{7}} \arctan\Big(\frac{e^x}{\sqrt{7}}\Big) + C \qquad C \in \mathbb{R} .$$

La condizione assegnata è verificata se

$$\frac{\pi}{4\sqrt{7}} + C = \frac{\pi}{2\sqrt{7}} ,$$

cioè $C = \frac{\pi}{4\sqrt{7}}$. Pertanto la primitiva è

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{7}} \arctan\Big(\frac{e^x}{\sqrt{7}}\Big) + \frac{\pi}{4\sqrt{7}} .$$

---

4 - Determinare la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = -x^3 y + \pi x^3 \\ y(0) = 2\pi . \end{cases}$

....

L'integrale generale dell'equazione omogenea associata è dato

$$y(x) = Ce^{-\frac{x^4}{4}}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Per determinare una soluzione particolare della completa, occorre calcolare

$$\int x^3 e^{\frac{x^4}{4}}\, dx = e^{\frac{x^4}{4}}\,.$$

Pertanto l'integrale generale dell'equazione assegnata è dato da

$$y(x) = Ce^{-\frac{x^4}{4}} + \pi, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Imponendo la condizione iniziale $y(0) = 2\pi$ si ha $C + \pi = 2\pi$, da cui $C = \pi$, e quindi la soluzione del problema di Cauchy assegnato è

$$y(x) = \pi\big(e^{-\frac{x^4}{4}} + 1\big).$$

---

5 - Data la funzione $f(x) = (x-4)e^{\frac{1}{2-x}}$ determinare l'insieme di definizione, i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti, gli intervalli di monotonia ed eventuali punti di minimo e di massimo. (Non è richiesto lo studio della convessità). Tracciare un grafico qualitativo della funzione.

. . . .

La funzione è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 2$. Per quanto riguarda i limiti agli estremi del dominio si ha

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty\,, \quad \lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty\,, \quad \lim_{x\to 2^+} f(x) = 0\,, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\,,$$

e di conseguenza $x = 2$ è asintoto verticale da sinistra, mentre se si pone $f(2) = 0$ la funzione f risulta continua a destra nel punto 2. Inoltre

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to-\infty} (f(x) - x) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x}{2-x}\, \frac{e^{\frac{1}{2-x}} - 1}{\frac{1}{2-x}} - 4e^{\frac{1}{2-x}} \right) = -5\,,$$

e di conseguenza la retta di equazione $y = x - 5$ è un asintoto obliquo a sinistra per f. Analogamente, si riconosce che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to+\infty} (f(x) - x) = -5\,,$$

e di conseguenza la retta di equazione $y = x - 5$ è anche asintoto obliquo a destra per f.
La derivata prima di f è data da

$$f'(x) = \frac{x(x-3)}{(2-x)^2} e^{\frac{1}{2-x}}\,, \qquad x \neq 2\,.$$

Si noti che $\lim_{x\to 2^+} f'(x) = 0$, e quindi $f'_+(2) = 0$.
Dallo studio del segno di f' segue che f è crescente in $(-\infty, 0)$ e in $(3, \infty)$, mentre è decrescente in $(0, 2)$ e in $(2, 3)$.
Pertanto, $f(0) = -4\sqrt{e}$ è un massimo locale per f, mentre $f(3) = -\dfrac{1}{e}$ è un minimo locale per f.
In conclusione, un grafico approssimativo di f è il seguente.