1 - Calcolare il limite $\lim_{x\to\pi}(1-2\sin x)^{\frac{1}{\operatorname{tg} x}}$.

. . . .

Si osservi che

$$(1-2\sin x)^{\frac{1}{\operatorname{tg} x}} = e^{\frac{1}{\operatorname{tg} x}\log(1-2\sin x)} = e^{-2\cos x\frac{\log(1-2\sin x)}{-2\sin x}} \underset{x\to\pi}{\longrightarrow} e^2 .$$

---

2 - Studiare al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}\left(1-\cos\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}\right) .$$

. . . .

La serie è a termini positivi, in quanto $\cos\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} \le 1$, per ogni $n \ge 1$. In forza di

$$1-\cos t = \frac{t^2}{2}(1+o(1)) , \qquad t \to 0 ,$$

si ha

$$1-\cos\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} = \frac{1}{2n^{4/3}}(1+o(1)) , \qquad n \to +\infty ,$$

e quindi

$$\frac{1}{n^\alpha}\left(1-\cos\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}\right) = \frac{1}{2n^{\frac{4}{3}+\alpha}}(1+o(1)) , \qquad n \to +\infty .$$

Pertanto, per il criterio del confronto asintotico la serie assegnata ha lo stesso carattere della serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{4}{3}+\alpha}}$, e di conseguenza la serie converge se $\frac{4}{3}+\alpha > 1$, cioè $\alpha > -1/3$, mentre diverge positivamente se $\frac{4}{3}+\alpha \le 1$, cioè $\alpha \le -1/3$.

---

3 - Studiare la derivabilità della funzione $F(x) = \int_1^{|x-2|}\cos(t^2+3)\,dt$.

. . . .

Grazie al fatto che la funzione integranda $t \to \cos(t^2+3)$ è continua in tutto $\mathbb{R}$, la funzione integrale è definita e continua in tutto $\mathbb{R}$, e si ha

$$F(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_1^{x-2}\cos(t^2+3)\,dt & \text{se } x \ge 2 \\[2ex] \displaystyle\int_1^{2-x}\cos(t^2+3)\,dt & \text{se } x < 2 . \end{cases}$$

Per il teorema fondamentale del calcolo integrale F è derivabile per ogni $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 2$ e si ha

$$F'(x) = \begin{cases} \cos((x-2)^2+3) & \text{se } x > 2 \\[2ex] -\cos((2-x)^2+3) & \text{se } x < 2 . \end{cases}$$

Per quanto riguarda il punto $x = 2$ si noti che $F'_+(2) = \cos 3$, mentre $F'_-(2) = -\cos 3$, e quindi F non è derivabile in 2.

---

4 - Data la funzione $f(x) = \frac{\log^2(x+3)}{x+3}$ determinare l'insieme di definizione, i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti, gli intervalli di monotonia ed eventuali punti di minimo e di massimo. (Non è richiesto lo studio della convessità). Tracciare un grafico qualitativo della funzione.

. . . .

La funzione è definita e positiva per ogni $x > -3$. Per quanto riguarda i limiti agli estremi del dominio si ha

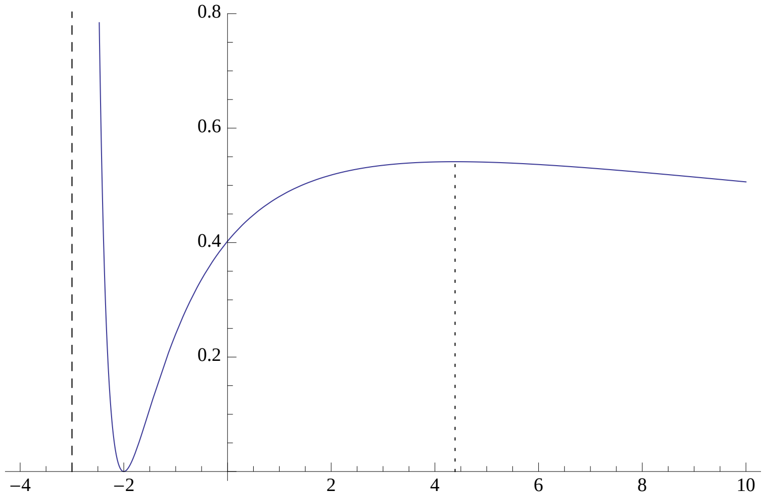
$$\lim_{x\to-3^+} f(x) = +\infty , \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 ,$$

e di conseguenza $x = -3$ è asintoto verticale e $y = 0$ è asintoto orizzontale.

La derivata prima di f è data da

$$f'(x) = \frac{2\log(x+3) - \log^2(x+3)}{(x+3)^2}, \qquad x > -3\,.$$

Dallo studio del segno di f' segue che f è crescente in $(-2, e^2-3)$, mentre è decrescente in $(-3,-2)$ e in $(e^2-3,+\infty)$. Pertanto, $f(-2) = 0$ è il minimo assoluto per f, mentre $f(e^2-3) = \dfrac{4}{e^2}$ è un massimo relativo per f.
Un grafico approssimativo di f è il seguente.



---

5 - Determinare i valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali ogni soluzione $y(x)$ dell'equazione differenziale $y''-3\alpha y' = 5x$ verifica la condizione $\lim_{x\to+\infty} e^{-8x}y(x) = 0$.

. . . .

L'equazione caratteristica dell'equazione omogenea associata è

$$\lambda^2 - 3\alpha\lambda = 0,$$

e di conseguenza per $\alpha \neq 0$ l'integrale generale dell'equazione assegnata è dato da

$$y(x) = C_1 e^{3\alpha x} + C_2 + ax^2 + bx, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$

dove $a, b \in \mathbb{R}$ sono tali che la funzione $x \to ax^2 + bx$ è una soluzione particolare di $y'' - 3\alpha y' = 5x$. Per rispondere al quesito posto nell'esercizio non è necessario determinare esplicitamente i valori delle costanti $a, b \in \mathbb{R}$. Infatti, in forza di

$$e^{-8x}y(x) = C_1 e^{(3\alpha-8)x} + e^{-8x}\Big(C_2 + ax^2 + bx\Big), \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$

solo per $\alpha < 8/3$, $\alpha \neq 0$, ogni soluzione $y(x)$ verifica

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-8x}y(x) = 0\,.$$

Nel caso $\alpha = 0$ l'integrale generale è dato da $y(x) = \dfrac{5}{6}x^3 + C_1x + C_2$ e si ha $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-8x}\Big(\dfrac{5}{6}x^3 + C_1x + C_2\Big) = 0$ per ogni $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.
In conclusione, se e solo se $\alpha < 8/3$ ogni soluzione $y(x)$ dell'equazione differenziale verifica la condizione assegnata.
Si osservi che nel caso $\alpha \neq 0$ l'integrale generale può anche essere determinato nel modo seguente. Posto $w = y'$ l'equazione differenziale è del primo ordine in w:

$$w' - 3\alpha w = 5x\,. \tag{1}$$

L'integrale generale dell'omogenea associata è dato da

$$w(x) = C_1 e^{3\alpha x}, \qquad C_1 \in \mathbb{R}.$$

Per determinare un integrale particolare dell'equazione differenziale (1), si può utilizzare il metodo *ad hoc*. Pertanto, si cerca una soluzione particolare nella forma $\tilde{y}(x) = ax + b$, con $a, b \in \mathbb{R}$ da determinare. Imponendo che $\tilde{y}(x)$ sia soluzione dell'equazione differenziale si ha

$$a - 3\alpha(ax + b) = 5x\,,$$

e di conseguenza per ogni $\alpha \neq 0$ si ha

$$a = -\frac{5}{3\alpha} \qquad b = -\frac{5}{9\alpha^2}\,.$$

Ne segue che l'integrale generale dell'equazione differenziale (1) è

$$w(x) = C_1 e^{3\alpha x} - \frac{5}{3\alpha}x - \frac{5}{9\alpha^2}, \qquad C_1 \in \mathbb{R},$$

e di conseguenza l'integrale generale dell'equazione differenziale assegnata è

$$y(x) = C_1 e^{3\alpha x} - \frac{5}{6\alpha}x^2 - \frac{5}{9\alpha^2}x + C_2, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$