1 - Risolvere l'equazione
$$z^4 = -i\,.$$

. . . .

Le soluzioni sono
$$z_k = e^{i\left(\frac{4k\pi-\pi}{8}\right)}, \quad k = 0,1,2,3\,.$$

---

2 - Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $x < 1/2$ si ha
$$D^n \log\Big(\frac{1}{1-2x}\Big) = \frac{2^n(n-1)!}{(1-2x)^n}\,.$$

. . . .

Per la regola della catena si ha
$$D\log\Big(\frac{1}{1-2x}\Big) = -D\log(1-2x) = \frac{2}{1-2x}\,, \qquad x<1/2$$
e quindi la tesi è vera per $n=1$. Supponendo la tesi vera per $n \in \mathbb{N}$, si passa a riconoscere la stessa per $n+1$. Infatti, per l'ipotesi induttiva si ha
$$D^{n+1}\log\Big(\frac{1}{1-2x}\Big) = DD^n\log\Big(\frac{1}{1-2x}\Big) = D\Big(\frac{2^n(n-1)!}{(1-2x)^n}\Big) = \frac{2^{n+1}n!}{(1-2x)^{n+1}}, \qquad x<1/2\,.$$
In conclusione, grazie al principio di induzione la tesi è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

---

3 - Studiare il comportamento della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{n^{1/6}}}\,.$$

. . . .

La serie è a termini positivi. In forza di
$$\mathrm{sen}\,\frac{1}{n^{1/6}} = \frac{1}{n^{1/6}}(1+o(1))\,, \qquad n \to +\infty\,,$$
si ha
$$\frac{1}{n^{3/2}\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{n^{1/6}}} = \frac{1}{n^{4/3}}(1+o(1))\,, \qquad n\to+\infty\,.$$
Pertanto, per il criterio del confronto asintotico la serie assegnata ha lo stesso carattere della serie armonica generalizzata $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{4/3}}$, ed essendo $4/3>1$ la serie converge.

---

4 - Tracciare un grafico qualitativo della funzione
$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+\pi t^3}}\,dt\,, \quad x \geq 0.$$
In particolare, provare che f ha un asintoto orizzontale di equazione $y = L$ con $0 < L \leq 1 + \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}$.

. . . .

La funzione è positiva per ogni $x>0$ e $f(0)=0$. Per quanto riguarda il limite a $+\infty$, si noti che per ogni $x \geq 1$ si ha
$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+\pi t^3}}\,dt = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+\pi t^3}}\,dt + \int_1^x \frac{1}{\sqrt{1+\pi t^3}}\,dt \leq \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+\pi t^3}}\,dt + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_1^x \frac{1}{t^{3/2}}\,dt, \tag{1}$$
e l'integrale $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{1}{t^{3/2}}\,dt$ è convergente. Pertanto esiste finito $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+\pi t^3}}\,dt = \sup_{x\geq 0} f(x) = L > 0$ e $y = L$ è un asintoto orizzontale per f. Inoltre, da (1) e da $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{1}{t^{3/2}}\,dt = 2$ segue
$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+\pi t^3}}\,dt \leq \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+\pi t^3}}\,dt + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \leq 1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,, \qquad \forall\, x \geq 1,$$

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+\pi t^3}}\,dt \le \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+\pi t^3}}\,dt \le 1\,, \qquad \forall\ 0 \le x \le 1,$$

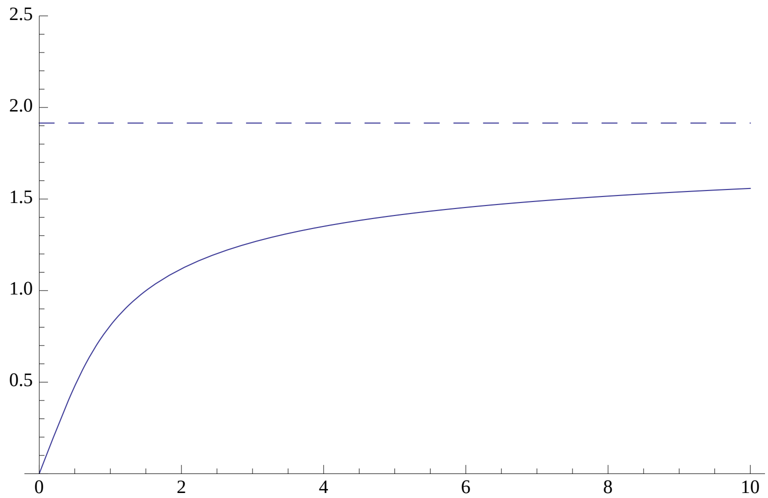
e quindi, essendo $L = \sup\limits_{x\ge 0} f(x)$, si ha $0 < L \le 1 + \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}$.
Per il teorema fondamentale del calcolo integrale f è derivabile e si ha

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+\pi x^3}} \qquad x \ge 0,$$

di conseguenza f è strettamente crescente in $[0,+\infty[$. Inoltre

$$f''(x) = -\frac{3\pi}{2}x^2(1+\pi x^3)^{-3/2} \qquad x \ge 0,$$

e quindi f è concava in $[0,+\infty[$.
Un grafico qualitativo della funzione $f(x)$ è il seguente.



---

5 - (i) Determinare la soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + 2y = 5xe^{3x} \\ y(0) = -\dfrac{1}{5}\,. \end{cases}$$

(ii) Determinare i valori del parametro α per i quali l'integrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} y(x)e^{\alpha x}\,dx$ è convergente.

. . . .

(i) La soluzione è

$$y(x) = e^{3x}\big(x - \frac{1}{5}\big) \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

(ii) L'integrale è convergente per ogni $\alpha + 3 < 0$, cioè $\alpha < -3$.