Nome: .... Cognome: ....

Matricola: .... **FIRMA**: ....

Giustificare le risposte; consegnare soltanto la bella copia.

Lasciare uno spazio di alcuni cm all'inizio, con nome e cognome.

Allegare il presente foglio; non occorre poi piegare il foglio di bella copia.

Punteggio totale: **31**

1. [3 punti] Stabilire se esistono numeri reali k tali che la dimensione del sottospazio $\langle(2,0,3,0),(k,k,2,1),(3,1,5,k)\rangle$ sia 2.

Sol. Consideriamo la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ k & k & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & k \end{pmatrix} .$$

Studiamo i due minori orlati rispetto alla sottomatrice intercettata dalle righe 1, 3 e dalle prime due colonne. Esiste una radice comune, $k=1$, per le equazioni $4k-4=0$ e $2(k^2-1)=0$.

2. [3 punti] Data l'applicazione lineare $f:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ definita da $f(x,y,z)=(x-2y,2x-4y,z)$, determinarne una base di autovettori.
[2.5 punti] Trovare tre vettori che abbiano la stessa immagine secondo f.

Sol.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 0 \\ 2 & -4-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2+3\lambda) .$$

I tre autovalori 1, 0, -3 possono essere associati (dopo aver risolto i relativi sistemi) ai rispettivi autovettori $(0,0,1)$, $(2,1,0)$, $(1,2,0)$.

Ad esempio tre vettori arbitrari nel nucleo sono idonei — hanno la stessa immagine. Il nucleo è l'autospazio $\langle(2,1,0)\rangle$, quindi occorre scegliere tre multipli del generatore.

3. [2.5 punti] Data una matrice invertibile M, dimostrare che il determinante della matrice inversa è l'inverso del determinante di M.

Sol. Col supporto del teorema di Binet abbiamo: $1=|I_n|=|M\cdot M^{-1}|=|M|\cdot|M^{-1}|$.

4. [3 punti] Eseguire una rotazione del riferimento per portare in forma canonica l'iperbole di equazione $2xy-13=0$.
[2 punti] Calcolare le coordinate dei fuochi (nel riferimento iniziale).

Sol. Autovettori della matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$: $(1,1)$ per $\lambda=1$, $(-1,1)$ per $\lambda=-1$. Sostituendo le vecchie variabili mediante la legge $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ otteniamo l'equazione $X^2-Y^2-13=0$ e la conseguente forma canonica

$$\frac{X^2}{13}-\frac{Y^2}{13}=1 .$$

Per trovare i fuochi inseriamo le nuove coordinate nella legge del cambiamento di coordinate:

$$\begin{pmatrix} x_F \\ y_F \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \pm\sqrt{26} \\ 0 \end{pmatrix} = \pm\begin{pmatrix} \sqrt{13} \\ \sqrt{13} \end{pmatrix} .$$

5. [2.5 punti] Calcolare la proiezione ortogonale di $(1,2,3,4,5)$ sul sottospazio $T = \langle(1,2,3,4,5), (1,2,3,4,5),(1,1,1,1,-2),\ (0,-1,-2,-3,-7)\rangle$.
[2 punti] Calcolare la dimensione massima di un sottospazio che intersechi T soltanto nello zero.

Sol. Un modo sintetico per trovare la proiezione consiste nel notare che il vettore da proiettare appartiene al sottospazio T, quindi la proiezione è il vettore stesso. Altrimenti procediamo col metodo generale, come segue. La dimensione di T vale 2; possiamo restringere i calcoli al secondo e terzo vettore. Essi sono già ortogonali. Il calcolo della proiezione dà quindi

$$\frac{(1,2,3,4,5)\times(1,2,3,4,5)}{(1,2,3,4,5)\times(1,2,3,4,5)}(1,2,3,4,5)+\frac{(1,2,3,4,5)\times(1,1,1,1,-2)}{(1,1,1,1,-2)\times(1,1,1,1,-2)}(1,1,1,1,-2)=(1,2,3,4,5)\ .$$

In virtù della formula di Grassmann, la dimensione di un sottospazio con la proprietà richiesta non può superare $5+0-2=3$.

6. [$2+3.5$ punti] Dopo aver dimostrato che le rette $r: x+y=z=0$ e $s: x-y-z=x-2=0$ sono sghembe, calcolare la loro minima distanza.

Sol. Calcoliamo intanto due vettori direttori col metodo della giacitura, semplice in questo esercizio:

$$\overrightarrow{v}_r=(1,-1,0)\quad,\quad \overrightarrow{v}_s=(0,1,-1)\ .$$

Scegliamo poi due punti, uno per ciascuna retta, ad esempio $A=(0,0,0)$ e $B=(2,2,0)$. Le rette risultano sghembe perché $\overrightarrow{AB}$ non è generato dai vettori direttori; infatti

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 4 \neq 0\ .$$

Calcoliamo la distanza come la proiezione ortogonale scalare di $\overrightarrow{AB}$ sul prodotto vettoriale $\overrightarrow{v}_r\wedge\overrightarrow{v}_s$ che risulta uguale a

$$\left(\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\ ,\ -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}\ ,\ \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\right)=(1,1,1)\ .$$

Abbiamo quindi:

$$distanza=\frac{|(2,2,0)\times(1,1,1)|}{\sqrt{3}}=\frac{4}{\sqrt{3}}\ .$$

7. [2.5 punti] Determinare a in modo che il vettore $(1,2,a)$ sia perpendicolare alla retta definita dalle equazioni $x-y=y-z-5=0$.

Sol. Il vettore deve essere ortogonale a $(1,1,1)$, vettore direttore della retta data. Abbiamo quindi $(1,2,a)\times(1,1,1)=0$ da cui troviamo $a=-3$.

8. [2.5 punti] Dimostrare che le matrici $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sono linearmente indipendenti.

Sol. Provando a ottenere la matrice nulla $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ come combinazione lineare delle tre matrici date, siamo costretti a porre tutti i coefficienti uguali a zero. Infatti

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=r\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}+s\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases} r+s=0 \\ 2r=0 \\ 3r+t=0 \\ 4r+2s=0 \end{cases}\Rightarrow r=s=t=0\ .$$