Circonferenze del piano

12 novembre

1 Circonferenze del piano

1.1 Definizione

Una circonferenza è il luogo dei punti equidistanti da un punto fisso, detto *centro.* La distanza di un qualunque punto della circonferenza dal centro è detto il *raggio.*

Per stabilire l'equazione di una circonferenza, supponiamo che il centro abbia coordinate $C = (\alpha, \beta)$ e che il raggio sia uguale a r. Allora il punto $P = (x, y)$ appartiene alla circonferenza se e solo se

$$d(P, C) = r.$$

Uguagliando i quadrati di tali espressioni otteniamo:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2, \tag{1}$$

e sviluppando:

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 + \beta^2 - r^2 = 0,$$

e ponendo $a = -2\alpha, b = -2\beta, c = \alpha^2 + \beta^2 - r^2$, tale equazione diventa:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0,$$

detta *equazione cartesiana* della circonferenza.

Esempio Scrivere l'equazione cartesiana della circonferenza di centro $C = (2, -1)$ e raggio 2.

Soluzione. Si ha:

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 4,$$

ovvero

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0.$$

□

Notiamo che l'equazione di una circonferenza ha le seguenti caratteristiche:

- È di secondo grado.
- I coefficienti di x^2 e y^2 sono uguali.
- Non è presente il termine misto xy.

Ci chiediamo ora se un'equazione del tipo $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ rappresenta sempre una circonferenza. A tale scopo, cerchiamo, se possibile di riscriverla nella forma (1):

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2.$$

Uguagliando:

$$\alpha = -\frac{a}{2}, \quad \beta = -\frac{b}{2}, \quad r^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c.$$

Poichè il raggio è un numero positivo, si dovrà avere $\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c > 0$, e questa è l'unica condizione. Dunque

Proposizione *Un'equazione del tipo $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ rappresenta una circonferenza se e solo se:*

$$a^2 + b^2 - 4c > 0.$$

Se tale condizione è verificata, il centro ha coordinate $C = (-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$ e il raggio vale:

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}.$$

Esempio L'equazione $x^2 + y^2 + x - y + 6 = 0$ non rappresenta una circonferenza poiché:

$$a^2 + b^2 - 4c = -26 < 0.$$

Esempio L'equazione $x^2 + y^2 + x - 2y - 1 = 0$ è una circonferenza:

$$a^2 + b^2 - 4c = 9 > 0.$$

Il centro è $C = (-\frac{1}{2}, 1)$ e il raggio vale $r = \frac{3}{2}$.

- Notiamo che, se $c \leq 0$, si ha sempre una circonferenza; inoltre se $c = 0$ tale circonferenza passa per l'origine.

1.2 Circonferenza per tre punti

Se fissiamo due punti distinti del piano, diciamo A e B, vediamo che ci sono infinite circonferenze che passano per i due punti: i centri di tali circonferenze saranno sull'asse del segmento AB. Vogliamo ora dimostrare la seguente

Proposizione *Per tre punti non allineati passa una e una sola circonferenza.*

Dimostrazione. La dimostrazione è puramente geometrica. Chiamiamo P_1, P_2, P_3 i tre punti e consideriamo l'asse del segmento P_1P_2, diciamo r_1, e quello del segmento P_2, P_3, diciamo r_2. Poichè i tre punti non sono allineati, i due assi risulteranno non paralleli. Sia dunque $C = r_1 \cap r_2$. Allora C è equidistante da P_1, P_2 e P_3. Sia r la distanza comune:

$$r = d(C, P_1) = d(C, P_2) = d(C, P_3).$$

Allora è evidente che P_1, P_2 e P_3 appartengono tutti alla circonferenza di centro C e raggio r. Inoltre, è anche chiaro che la circonferenza per P_1, P_2 e P_3 è unica. □

Esempio Determinare il centro e il raggio della circonferenza per i tre punti non allineati $O = (0, 0), A = (3, 1), B = (2, -1)$.

Soluzione. Possiamo trovare il centro determinando l' intersezione degli assi. Possiamo pero' procedere anche nel seguente modo. Dall'equazione della circonferenza generica:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0,$$

imponiamo il passaggio per i tre punti, ottenendo le equazioni:

$$\begin{cases} c = 0 \\ 3a + b + 10 = 0 \\ 2a - b + 5 = 0 \end{cases}$$

Osserviamo che il sistema ammette un'unica soluzione: $a = -3, b = -1, c = 0$ dunque l'equazione è

$$x^2 + y^2 - 3x - y = 0,$$

da cui il centro: $C = (\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$ e il raggio $r = \frac{1}{2}\sqrt{10}$. □

Esempio a) Scrivere l'equazione della circonferenza γ di centro $C = (1, 3)$ passante per il punto $A = (-1, -1)$.

b) Stabilire se il punto $B = (4, 0)$ è interno alla circonferenza.

Soluzione. a) Il raggio uguaglia la distanza di C da A, che vale $r = \sqrt{20}$. Dunque l'equazione è

$$(x-1)^2 + (y-3)^2 = 20,$$

ovvero $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 10 = 0$.

b) I punti interni alla circonferenza hanno distanza da C minore del raggio, che vale $\sqrt{20}$. Ora $d(C, B) = \sqrt{18}$ dunque B è interno a γ. $\square$

1.3 Retta tangente a una circonferenza

L'intersezione di una circonferenza γ con una retta r puo' risultare di tre tipi:

- L'insieme vuoto (la retta è *esterna* alla circonferenza): in tal caso la distanza di r dal centro è maggiore del raggio.
- Un insieme di due punti: cio' avviene se la distanza di r dal centro è minore del raggio.
- Un punto: in tal caso la retta si dice *tangente* alla circonferenza.

Quindi la retta r è tangente a γ se e solo se la distanza di r dal centro è uguale al raggio.

Esempio Determinare la circonferenza di centro $C = (2, 0)$ tangente alla retta $x - y = 0$.

Soluzione. Il raggio è uguale a $d(C, r) = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$. Dunque γ ha equazione $(x-2)^2 + y^2 = 2$ ovvero:

$$x^2 + y^2 - 4x + 2 = 0.$$

1.4 Alcuni esercizi

Esempio Data la circonferenza $\gamma : x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$ determinare:

a) L'equazione della retta tangente a γ nell'origine.

b) Le equazioni delle rette tangenti a γ e parallele alla retta $x + 2y = 0$.

Soluzione. In effetti γ è una circonferenza poiche' $c = 0$, inoltre passa per l'origine. Il suo centro è $C = (1, -2)$. Dunque il raggio vale $d(C, O) = \sqrt{5}$.

a) La tangente nell'origine è la retta passante per l'origine perpendicolare al vettore $\overrightarrow{OC}$. Dunque tale tangente ha equazione

$$x - 2y = 0.$$

b) La retta generica parallela a $x + y = 0$ ha equazione $r : x + 2y + k = 0$. Imponiamo la condizione di tangenza, cioè $d(C, r) = \sqrt{5}$, dunque

$$\frac{|k-3|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5},$$

e otteniamo le due soluzioni $k = 8$ e $k = -2$, dunque le due rette:

$$x + 2y + 8 = 0, \quad x + 2y - 2 = 0.$$

□

Esempio Sono dati i punti $A = (2, 0), B = (4, 4)$. Determinare, se esistono:
a) Le circonferenze di raggio 5 passanti per A e B.
b) Le circonferenze di raggio 1 passanti per A e B.

Soluzione. a) Il centro deve stare sull'asse del segmento AB. Il punto medio è $M = (3, 2)$ dunque l'asse è

$$\alpha : x + 2y - 7 = 0.$$

Il centro ha coordinate $C = (-2t+7, t)$. Affinche' il raggio sia uguale a 5 imponiamo $d(C, A)^2 = 25$ e otteniamo l'equazione: $(-2t + 5)^2 + t^2 = 25$ ovvero

$$5t^2 - 20t = 0,$$

che ha soluzioni $t = 0, t = 4$. Dunque otteniamo due circonferenze, con centri $C_1 = (7, 0), C_2 = (-1, 4)$ ed equazioni:

$$(x - 7)^2 + y^2 = 25, \quad (x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 25.$$

b) Non ci sono. Infatti il raggio minimo si ottiene quando AB è un diametro, dunque vale $\sqrt{5}$, che è maggiore di 1.