SVOLGIMENTI PROVA SCRITTA di ANALISI 1 del 16/1/2024 – COMPITO B

B1

1) Omogenea associata:

$$y'' + 6y' + 9y = 0$$

Equazione caratteristica: $\alpha^2 + 6\alpha + 9 = (\alpha+3)^2 = 0$

$$\Rightarrow \quad y_0(x) = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x}$$

Sol. particolare: $y_p(x) = C_1(x) e^{-3x} + C_2(x) x e^{-3x}$

$$|W(y_1, y_2)| = \begin{vmatrix} e^{-3x} & x e^{-3x} \\ -3e^{-3x} & (1-3x) e^{-3x} \end{vmatrix} = e^{-6x}$$

$$\Rightarrow \quad C_1(x) = -\int \frac{x \cancel{e^{-3x}} \cdot 2 \cancel{e^{-3x}}}{(x^2+9)\cancel{e^{-6x}}}\, dx$$

$$= -\ln(x^2+9)$$

$$C_2(x) = \int \frac{\cancel{e^{-3x}} \cdot 2 \cancel{e^{-3x}}}{(x^2+9)\cancel{e^{-6x}}}\, dx = \frac{2}{3} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{3}\right).$$

$$\Rightarrow \quad y_{NO}(x) = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x} - e^{-3x} \ln(x^2+9)$$

$$+ \frac{2}{3} x e^{-3x} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{3}\right).$$

a) $\lim_{x \to +\infty} y_{NO}(x) = 0 \quad \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ (B2)

per gli ordini di infinito.

b) $\lim_{x \to -\infty} \left[-e^{-3x} \ln(x^2+9) + \frac{2}{3} x e^{-3x} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{3}\right) \right]$

$= \lim_{x \to -\infty} e^{-3x} \left[\frac{2}{3} x \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{3}\right) - \ln(x^2+9) \right]$

$= \lim_{x \to -\infty} e^{-3x} \frac{2}{3} x \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{3}\right)$

(per gli ordini di infinito)

$= +\infty \quad \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \nexists$ soluzioni.

2) $f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} x^{\alpha} \left[2\left[\cancel{\frac{1}{x}} - \frac{1}{6x^3} \right] - \cancel{\frac{2}{x}} + \frac{8}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) \right]$

$\underset{x \to +\infty}{\sim} x^{\alpha} \left(-\frac{1}{3} + \frac{8}{3} \right) \frac{1}{x^3} = \frac{7}{3x^{3-\alpha}}$

Quindi la funzione è integrabile

se $3-\alpha > 1$, cioè se $\alpha < 2$

e non è integrabile se $\alpha \geq 2$

3) $-ie^{i\frac{\pi}{2}} z\cdot z\cdot \bar{z} + e^{-i\frac{\pi}{2}} x - e^{i\pi}|z|^2 y = 0$

$-i\cdot i\,|z|^2 z - ix + |z|^2 y = 0$ $\quad$ B3

$|z|^2(x+iy+y) - ix = 0$

$$\begin{cases} |z|^2(x+y)=0 \\ (x^2+y^2)y - x = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \{z=0\} \cup \begin{cases} y=-x \\ (2x^2)(-x)-x=0 \end{cases}$$

$$\{z=0\} \cup \begin{cases} y=-x \\ -x\underbrace{(2x^2+1)}_{\neq 0\ \forall x\in\mathbb{R}}=0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ unica soluzione $z=0$.

4) $\sum \sqrt{e^{1/n^2}-1} \approx \sum \sqrt{\frac{1}{n^2}} = \sum \frac{1}{n}$

Quindi la serie diverge.

5) $I_{def} = \mathbb{R}$ $\qquad$ $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

f è dispari, perché somma di funzioni dispari.

$f(0)=0$.

Intersezioni con asse x non determinabili.

B4

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$

Poiché per $x>0$ $\quad \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)$

$$\Rightarrow \quad f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x - \pi + o(1)$$

$\Rightarrow$ $y = x - \pi$ asintoto obliquo a $+\infty$.

Infatti: $m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left[1 - \frac{2\operatorname{arctg} x}{x}\right] = 1$

$$q = \lim_{x\to+\infty} \left[x - 2\operatorname{arctg} x - x\right] = \lim_{x\to+\infty} \left[-2\operatorname{arctg} x\right]$$

$$= -2\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\pi.$$

Analogamente, $y = x + \pi$ asintoto obliquo a $-\infty$.

MONOTONIA: $f'(x) = 1 - \frac{2}{1+x^2} = \frac{x^2-1}{1+x^2}$

$$f'(x) = 0 \iff x = \pm 1$$

$$f'(x) > 0 \iff x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$$

f cresce in $(-\infty, -1)$, decresce in $(-1, 1)$, cresce in $(1, +\infty)$.

$\Rightarrow$ $x = -1$ punto di MAX. REL.

$$f(-1) = -1 - 2\operatorname{arctg}(-1) = -1 + \frac{\pi}{2} > 0$$

B_5

$x=1$ punto di MIN. REL.

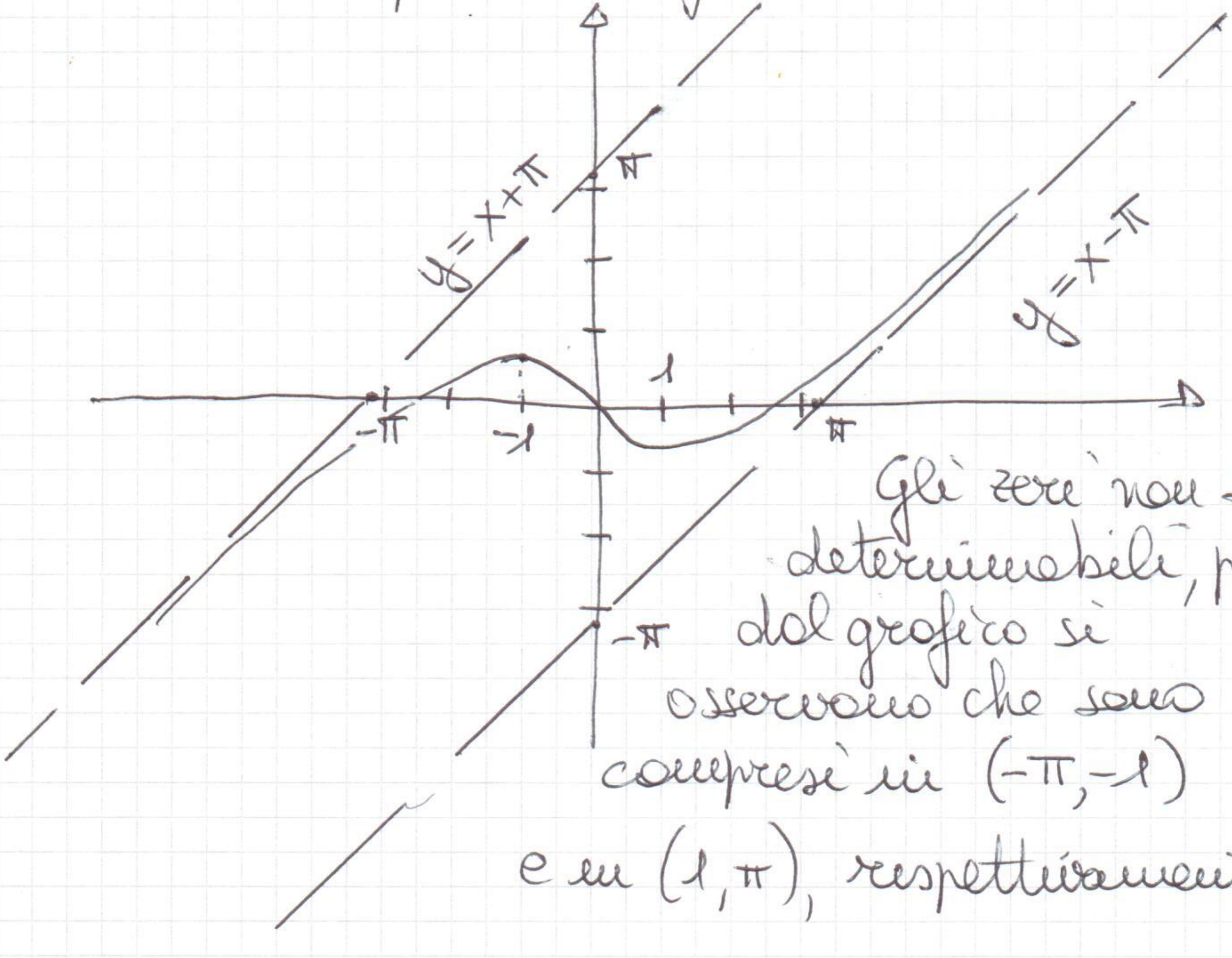
$$f(1) = 1 - \frac{\pi}{2} < 0.$$

$\nexists$ MAX. e MIN. ASSOLUTI. f ILLIMITATA

<u>CONVESSITÀ</u>: $f''(x) = \dfrac{2}{(1+x^2)^2}\,2x = \dfrac{4x}{(1+x^2)^2}$

f CONCAVA in $(-\infty, 0)$ e CONVESSA in $(0, +\infty)$.

$x=0$ punto di flesso ASCENDENTE



Gli zeri non sono determinabili, però dal grafico si osservano che sono compresi in $(-\pi, -1)$ e in $(1, \pi)$, rispettivamente.