SVOLGIMENTO PROVA SCRITTA di ANALISI 1
del 8/2/2024 — COMPITO B. 1

1) Riscriviamo l'equazione in forma normale:

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{9 \arccos x}{x\sqrt{1-x^2}}$$

Essa è definita in $(-1,0) \cup (0,1)$. Poiché $x_0 = -\frac{1}{2} \Rightarrow$ cerchiamo la soluzione in $(-1,0)$.

$\frac{1}{x} \in C^\infty(-1,0)$; $\frac{9\arccos x}{x\sqrt{1-x^2}} \in C^\infty(-1,0)$, quindi

$\exists!$ sol $y \in C^1(-1,0)$ (quindi di tipo GLOBALE).

Possiamo risolvere l'equazione nella forma standard. Però qui conviene risolvere più velocemente, osservando che $(xy'+y) = (xy)'$

$$\Rightarrow \quad xy = 9\int \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -9\int \arccos x \, d(\arccos x)$$

perché $(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1+x^2}}$

$$\Rightarrow \quad y(x) = \frac{-9}{2x}\left[\frac{\arccos^2 x}{\cancel{2}} + C\right]$$

$$y\left(-\frac{1}{2}\right) = \underline{4\pi^2} = \frac{-9}{2}(-2)\left[\frac{\arccos^2\left(-\frac{1}{2}\right)}{\cancel{2}} + C\right] =$$

$$9\left[\left(\frac{2\pi}{3}\right)^2 + C\right] = \underline{4\pi^2 + 9C} \quad \Rightarrow C = 0.$$

$$\Rightarrow y(x) = -\frac{9}{2x}\arccos^2 x.$$ ②

2)
$$f(x) = \frac{x\left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right] + \frac{x^3}{2} - \left[x^2 - \frac{x^6}{6} + o(x^6)\right]}{x^\alpha + o(x^\alpha)}$$

$$= \frac{\frac{x^4}{4} + o(x^4)}{x^\alpha + o(x^\alpha)} \underset{x \to 0^+}{\sim} \frac{1}{4x^{\alpha-4}}$$

Pertanto f è integrabile in $\left(0, +\frac{\pi}{4}\right]$ per $\alpha - 4 < 1$ cioè per $\alpha < 5$, mentre non è integrabile per $\alpha \geq 5$.

3) $z^3 - 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2}(1 - 1 - 2i) = -4\sqrt{2}i$

$$\Rightarrow z^3 = 8\left[\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right] = 8\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$\Rightarrow z_0 = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right]$$

$$z_1 = 2\left[\cos\left(\frac{-\frac{\pi}{4} + 2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{-\frac{\pi}{4} + 2\pi}{3}\right)\right]$$

$$= 2\left[\cos\left(\frac{7}{12}\pi\right) + i\sin\left(\frac{7}{12}\pi\right)\right]$$

$$z_2 = 2\left[\cos\left(\frac{-\frac{\pi}{4} + 4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{-\frac{\pi}{4} + 4\pi}{3}\right)\right]$$

$$= 2\left[\cos\left(\frac{15}{12}\pi\right) + i\sin\left(\frac{15\pi}{12}\right)\right] = 2\left[\cos\left(\frac{5}{4}\pi\right) + i\sin\left(\frac{5}{4}\pi\right)\right]$$

$$\cancel{= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = -\sqrt{2}(1+i).$$

Potremmo riportare in forma algebrica anche z_0 e z_1, ad esempio per mezzo delle formule di bisezione. Ma non è richiesto in questo esercizio.

4) La serie è, ovviamente, a termini positivi.

Applichiamo il criterio della radice:

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{|\alpha-2|}{3\sqrt[n]{n^4}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{|\alpha-2|}{3} < 1 \iff |\alpha-2|<3$$

$$\iff -3<\alpha-2<3 \iff -1<\alpha<5$$

Quando $|\alpha-2|=3$ (cioè per $\alpha=-1$; $\alpha=5$), ~~il~~ $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1$. Studiamo allora la serie inserendo il valore $|\alpha-2|=3$ nella serie:

Per $\alpha=-1$; $\alpha=5$ si ha $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{3^n n^4}=\sum\frac{1}{n^4}$

che converge.

Pertanto la serie converge per $-1\le\alpha\le5$.

5) Dominio: $|x|-1\geq0 \Rightarrow$

$$D=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty).$$

$$f(x)\geq0 \quad \forall x\in D.$$

$$f(x)=0 \iff |x|=1 \iff x=\pm1.$$

I punti $x=\pm 1$ sono quindi di MIN. ASS.

f è PARI: $f(-x)=(|-x|-1)^{1/2}=(|x|-1)^{1/2}=f(x)$.

Basterà studiare f per $x\geq 0$, per poi prolungarla per parità.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=+\infty$. Poiché $f(x)\underset{x\to\pm\infty}{\sim}|x|^{1/2}$,

la funzione ha andamento sublineare per $x\to\pm\infty$, quindi non abbiamo asintoti obliqui.

$\cancel{f'(x)=}$ Per $x>0$: $f'(x)=\frac{1}{2}(x-1)^{-1/2}>0$

$\forall x\in(1,+\infty)$.

Quindi f è crescente in $[1,+\infty)$ e, per simmetria, è decrescente in $(-\infty,-1]$.

$\nexists f'(\pm 1)$: $\lim\limits_{x\to 1^+} f'(x)=\frac{1}{2}(0^+)^{-1/2}=+\infty$.

$f''(x)=-\frac{1}{4}(x-1)^{-3/2}<0 \quad \forall x>1$

Quindi f è CONCAVA $\forall x\in[1,+\infty)$ e, per simmetria, è CONCAVA $\forall x\in(-\infty,-1]$.

Grafico: