# SVOLGIMENTO PROVA SCRITTA di ANALISI 1 dell'8/2/2024 – COMPITO A



1)
$$z^3+4\sqrt{2}=2\sqrt{2}(1-1+2i)=4\sqrt{2}\,i$$

$$z^3=8\left[\frac{-1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

$$=8\left[\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right)+i\sin\left(\frac{3}{4}\pi\right)\right]$$

$$\Rightarrow\quad z_0=2\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]=2\left[\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

$$=\sqrt{2}(1+i)$$

$$z_1=2\left[\cos\left(\frac{\frac{3\pi}{4}+2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{3}{4}\pi+2\pi}{3}\right)\right]$$

$$=2\left[\cos\left(\frac{11}{12}\pi\right)+i\sin\left(\frac{11}{12}\pi\right)\right]$$

$$z_2=2\left[\cos\left(\frac{\frac{3\pi}{4}+4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{3}{4}\pi+4\pi}{3}\right)\right]$$

$$=2\left[\cos\left(\frac{19}{12}\pi\right)+i\sin\left(\frac{19}{12}\pi\right)\right]$$

L'espressione algebrica di $z_1$ e $z_2$ è possibile, ad esempio per mezzo delle formule di bisezione. Ma non è richiesto, in questo caso.

2) La serie è ovviamente a termini positivi. Applichiamo il criterio della radice: (2)

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{|\alpha-1|}{2\sqrt[n]{n^2}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{|\alpha-1|}{2} < 1$$

$$\iff |\alpha-1|<2 \iff -2<\alpha-1<2$$

$$\iff -1<\alpha<3$$

Quando $|\alpha-1|=2 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=1$

$\Rightarrow$ Sostituiamo questo valore nella serie:

Per $|\alpha-1|=2$, cioè $\alpha=-1$; $\alpha=3$ si ha

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n}{2^n n^2}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} \text{ convergente.}$$

Dunque la serie converge per $-1\le\alpha\le3$.

3) Dominio: $|x|-4\geq 0 \Rightarrow$

$$D=(-\infty,-4]\cup[4,+\infty).$$

La funzione è PARI: $f(-x)=(|-x|-4)^{1/2}$

$$=(|x|-4)^{1/2}=f(x).$$

Quindi studiamo $f$ per $x\geq0$ $(|x|=x)$ e prolunghiamo per parità.

Per $x \geq 4$ $\quad f(x) = (x-4)^{1/2} \geq 0 \quad \forall x \in D$

$f(x) = 0 \iff x = \pm 4$, che sono punti di MIN. ASS. (3)

$$f'(x) = \frac{1}{2}(x-4)^{-1/2} > 0 \quad \forall x > 4$$

$f$ crescente in $[4, +\infty)$ e quindi decrescente in $(-\infty, -4]$.

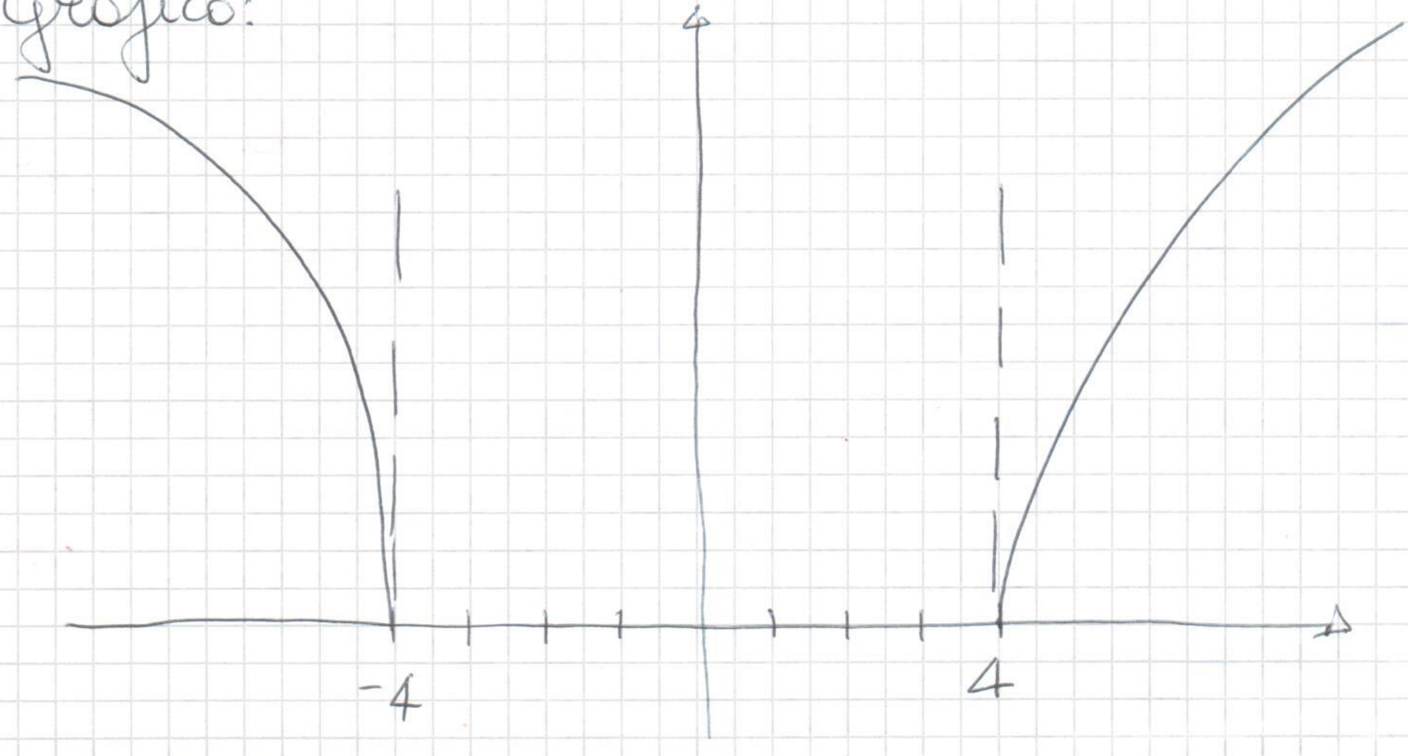
$\nexists f'(\pm 4)$: $\lim_{x \to 4^+} f'(x) = \frac{1}{2}(0^+)^{-1/2} = +\infty$

$f(x) \underset{x \to \pm\infty}{\sim} |x|^{1/2}$ Funzione sublineare, quindi $\nexists$ asintoti obliqui.

$$f''(x) = -\frac{1}{4}(x-4)^{-3/2} < 0 \quad \forall x > 4$$

Quindi $f$ è concava in $[4, +\infty)$ e, per parità, in $(-\infty, -4]$.

Grafico:



4) L'equazione è lineare a coefficienti continui. Riscritta in forma normale diventa

④

$$y'(x)+\frac{1}{x}\,y(x)=\frac{9\arcsin x}{x\sqrt{1-x^2}}$$

L'equazione è dunque definita per

$$\begin{cases} 1-x^2>0 \\ x\neq 0 \end{cases} \iff x\in(-1,0)\cup(0,1)$$

Poiché $x_0=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, studiamo l'equazione in $(-1,0)$.

$$\frac{1}{x}\in C^\infty(-1,0)\ ;\quad \frac{9\arcsin x}{x\sqrt{1-x^2}}\in C^\infty(-1,0)$$

$\Rightarrow\ \exists!$ sol. $y\in C^1(-1,0)$. Quindi soluzione GLOBALE.

L'equazione può essere risolta con la formula consueta; oppure, in alternativa, osservando che

$$xy'+y=(xy)',$$

si ha

$$xy=\int\frac{9\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=9\int\arcsin x\cdot\underbrace{\phantom{x}}_{d(\arcsin x)}$$

~~Ma~~ poiché $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\Rightarrow\ xy=\frac{9}{2}\left[\arcsin^2 x+C\right].$$

da cui

(5)

$$y(x) = \frac{9}{2x}\left[\arcsin^2 x + C\right]$$

imponendo la condizione iniziale,

$$y\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi^2}{\sqrt{3}} = \frac{-9\cdot 2}{2\sqrt{3}}\left[\arcsin^2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + C\right]$$

$$\Rightarrow \pi^2 = 9\left[\left(-\frac{\pi}{3}\right)^2 + C\right] \Rightarrow \pi^2 = 9\left(\frac{\pi^2}{9} + C\right)$$

$$\Rightarrow C = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{y(x) = \frac{9}{2x}\arcsin^2 x}.$$

5)

$$f(x) \underset{x\to 0^+}{=} \frac{\left[1 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^8}{4!} + o(x^8)\right] + \left[\frac{x^4}{2} - \frac{x^8}{8} + o(x^8)\right] - 1}{x^\alpha + o(x^\alpha)}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{24} - \frac{1}{8}\right)x^8 + o(x^8)}{x^\alpha + o(x^\alpha)} \underset{x\to 0^+}{\sim} -\frac{1}{12\,x^{\alpha-8}}$$

Pertanto $f$ è integrabile in $\left(0, +\frac{\pi}{4}\right)$ per $\alpha - 8 < 1$, cioè per $\alpha < 9$, e non è integrabile per $\alpha \geq 9$.