SVOLGIMENTI ESONERO di ANALISI 1 del 19/11/2024 - COMPITO D

1) Poichè $f_1(x) = a + \text{arctg}\left(\frac{3}{x^2}\right)$ e $f_2(x) = |x^2+3x+2| - 1$ sono continue nel loro insieme di definizione, ~~si~~ $f(x)$ è continua $\forall x \neq 0$. Rimane da verificare la continuità in $x=0$.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f_1(x) = a + \text{arctg}\left(\frac{3}{0^+}\right)$$
$$= a + \text{arctg}(+\infty) = a + \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = f_2(0) = |2| - 1 = 1$$

Pertanto $f \in C^0(\mathbb{R}) \iff a + \frac{\pi}{2} = 1$

cioè $a = 1 - \frac{\pi}{2}$.

2) Convergenza assoluta:

Studiamo il segno di $\dfrac{n+1}{n^2+10n+1}$.

Studiamo $x^2+10x+1 \geq 0$

$$x_{1,2} = -5 \pm \sqrt{25-1} = -5 \pm \sqrt{24} < 0$$

Pertanto $x^2+10x+1 \geq 0$ $\forall x \leq -5 - \sqrt{24}$

e $\forall x \geq -5 + \sqrt{24} < 0$. Segue che $n^2+10n+1 \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Segue che $\dfrac{n+1}{n^2+10n+1} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ D_2

$$\Rightarrow |a_n| = \frac{n+1}{n^2+10n+1} \sim \frac{1}{n}$$

$\sum |a_n| \approx \sum \frac{1}{n}$ divergente.

La serie diverge assolutamente.

Convergenza semplice:

$$|a_n| = \frac{n+1}{n^2+10n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

$$|a_n| \geq |a_{n+1}| \Rightarrow \frac{n+1}{n^2+10n+1} \geq \frac{n+2}{(n+1)^2+10(n+1)+1}$$

$$\Leftrightarrow (n+1)\left[n^2+2n+1+10n+10+1\right] \geq (n+2)(n^2+10n+1)$$

$$\Leftrightarrow (n+1)(n^2+12n+12) \geq n^3+10n^2+21n+2$$

$$\Leftrightarrow \cancel{n^3}+13n^2+24n+12-\cancel{n^3}-10n^2-21n-2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 3n^2+3n+10 \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

perché $\Delta < 0$.

Pertanto $|a_n| \geq |a_{n+1}|$.

Quindi la serie converge semplicemente per il criterio di Leibniz.

3) Primo metodo:

$$e^{-iz}\left(1+e^{-iz}\right)=0$$

$$\Rightarrow \quad e^{-iz}=0 \quad \vee \quad e^{-iz}=-1$$

L'esponenziale anche nel campo complesso, non si annulla mai. Infatti

$$e^{-iz}=e^{y-ix}=\underbrace{e^{y}}_{\text{quantità sempre} > 0}\cdot\underbrace{e^{-ix}}_{\text{quantità tale che } |e^{-ix}|=1}$$

Abbiamo solo $e^{-iz}=-1$

$$\Leftrightarrow e^{y}\cdot e^{-ix}=e^{i\pi} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{y}=1 \\ -x=\pi+2k\pi \end{cases} ;\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=-\pi+2k\pi \end{cases} ;\ k\in\mathbb{Z}.$$

Secondo metodo:

$$e^{-iz}=-e^{-2iz}$$

$$\Leftrightarrow e^{y}\cdot e^{-ix}=e^{+2y-2ix}\cdot e^{i\pi}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=2y \\ -x=-2x+\pi+2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=\pi+2k\pi \end{cases} ;\ k\in\mathbb{Z}$$

Si osservi che l'insieme dei punti $\{x=-\pi+2k\pi;\ k\in\mathbb{Z}\}$ coincide con $\{x=\pi+2k\pi;\ k\in\mathbb{Z}\}$.