SVOLGIMENTI ESONERO di ANALISI 1

DEL 19/11/2024 - COMPITO B

B1

1) $1-\cos\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$

Pertanto $\sum a_n \approx \sum n^\alpha \left(\frac{1}{2n^2}\right)^3 = \frac{1}{8} \sum \frac{1}{n^{6-\alpha}}$

che converge per $6-\alpha>1$, cioè $\alpha<5$

e diverge per $6-\alpha \leq 1$, cioè $\alpha \geq 5$.

2) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = C + \ln 1 = C$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{(x\sqrt{\pi})^2}{\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)} = \frac{\pi}{\left(\frac{\pi}{2}\right)} = 2$

perché $\operatorname{arctg}(\varepsilon(x)) \sim \varepsilon(x)$ e $\operatorname{sen}(\varepsilon(x)) \sim \varepsilon(x)$ se $\varepsilon(x) \longrightarrow 0$.

Pertanto $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) \iff C=2$

La prolungata per continuità è

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x\neq 0 \\ 2 & \text{se } x=0. \end{cases}$$

3) $z \neq 0$

$$\left|\frac{1+\bar{z}}{\bar{z}}\right| \leq 1 \iff |1+\bar{z}| \leq |\bar{z}|$$

$$\iff |1+x-iy| \leq |x-iy|$$

Trattandosi di quantità reali non negative, elevo ambo i membri al quadrato.

$$|1+x-iy|^2 \leq |x-iy|^2$$

B_2

$$\iff (1+x)^2+y^2 \leq x^2+y^2$$

$$\iff \cancel{x^2}+2x+1+\cancel{y^2} \leq \cancel{x^2}+\cancel{y^2}$$

$$\iff x \leq -\frac{1}{2}$$

Nel piano di Gauss, l'insieme delle soluzioni è il semipiano sinistro $x \leq -\frac{1}{2}$: