GHIZZETTI - ROSATI Analisi Matematica 1 - MASSON 1992

(ove il minore è sostituito dal $\leq$ e il maggiore dal $\geq$ per tenere conto dei casi in cui i punti O, P_1, P_2' sono allineati):

Teorema 12.6.II – *Il modulo della somma di due numeri complessi è minore o uguale della somma dei moduli degli addendi e maggiore o uguale del valore assoluto della differenza dei moduli stessi*

$$\Big| |z_1| - |z_2| \Big| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| . \tag{12.6.2}$$

Osserviamo infine che da quanto precede si trae anche la costruzione geometrica della differenza $z = z_1 - z_2$ (fig. 12.6.4). Poiché $z_1 = z_2 + z$, è evidente che il vettore z è rappresentato dal segmento orientato $\overrightarrow{P_2P_1}$ che ha l'origine nell'immagine P_2 del sottraendo z_2 ed il termine nell'immagine P_1 del minuendo z_1.

Applicando tale vettore z in O si ottiene l'immagine P di $z_1 - z_2$. Risulta analogamente alla (12.6.2):

$$\Big| |z_1| - |z_2| \Big| \leq |z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2| .$$

12.7 Radici dei numeri complessi

Dato un numero complesso z ed un numero intero positivo n, chiameremo *radice n-esima* di z ogni numero complesso w tale da aversi

$$w^n = z . \tag{12.7.1}$$

Se $z = 0$ è chiaro che si ha necessariamente $w = 0$. Supposto invece $z \neq 0$, sarà $w \neq 0$; possiamo allora considerare le forme trigonometriche

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) , \qquad w = \sigma(\cos\theta + i\sin\theta) ,$$

ove ρ, φ sono numeri noti, mentre σ, θ sono incogniti. Per la formula di Moivre la (12.7.1) diventa

$$\sigma^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) .$$

Sappiamo che affinché si verifichi questa uguaglianza occorre e basta che i numeri complessi indicati nei due membri abbiano lo stesso modulo ed i loro argomenti differiscano per multipli di 2π, vale a dire $\sigma^n = \rho$, $n\theta = \varphi + 2k\pi$ (con k intero) e quindi

$$\sigma = \left| \sqrt[n]{\rho} \right| , \qquad \theta = \frac{\varphi + 2k\pi}{n} ,$$

ove abbiamo usato il simbolo $|\sqrt[n]{\rho}|$ per indicare la *radice n-esima aritmetica* del numero reale e positivo ρ.

Si conclude che le possibili radici n-esime w del numero complesso z, di modulo ρ e argomento φ, sono tutte comprese nella formula

$$w = \left| \sqrt[n]{\rho} \right| \left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) , \tag{12.7.2}$$

ove k è un arbitrario numero intero positivo, negativo o nullo.

A prima vista può apparire che la (12.7.2) fornisca infiniti valori per w, ma si deve tener conto del fatto che per due diversi valori di k può accadere di trovare per l'argomento $(\varphi + 2k\pi)/n$ due valori differenti per un multiplo di 2π, nel qual caso i predetti valori di k conducono ad un medesimo valore di w. Cerchiamo per quali coppie di valori di k ciò può accadere. È subito visto che affinché riesca

$$\frac{\varphi + 2k\pi}{n} - \frac{\varphi + 2k'\pi}{n} = 2h\pi ,$$

con h intero, occorre e basta che sia $k - k' = hn$, ossia che la differenza $k - k'$ sia multipla di n. Se nella (12.7.2) poniamo successivamente

$$k = 0, 1, 2, \dots, n-1 , \tag{12.7.3}$$

per due qualsiasi di questi valori non si verifica che la loro differenza sia multipla di n e perciò essi danno luogo a n valori distinti per w. Qualunque altro valore di k si consideri, esso differirà per un multiplo di n da uno (e da uno solo) dei valori (12.7.3) e quindi farà ritrovare per w uno degli n valori già considerati. Si può quindi concludere col teorema:

Teorema 12.7.I – *Ogni numero complesso non nullo $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ ammette n e solo n radici n-esime, le quali sono date dalla formula*

$$\sqrt[n]{z} = \left| \sqrt[n]{\rho} \right| \left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) \tag{12.7.4}$$

nella quale si ponga successivamente $k = 0, 1, \dots, n-1$[4].

Per esempio, le radici cubiche del numero i (per il quale $\rho = 1$, $\varphi = \pi/2$) sono date da

$$\sqrt[3]{i} = \left| \sqrt[3]{1} \right| \left(\cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} \right) , \qquad (k = 0, 1, 2) ,$$

e quindi sono:

$$\begin{aligned} \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} &= \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} , \\ \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6} &= -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} , \\ \cos\frac{9\pi}{6} + i\sin\frac{9\pi}{6} &= -i . \end{aligned}$$

Poiché gli n numeri forniti dalla (12.7.4) hanno tutti lo stesso modulo $|\sqrt[n]{\rho}|$, *le loro immagini stanno su una medesima circonferenza col centro nell'origine e raggio* $|\sqrt[n]{\rho}|$, e poiché i loro argomenti sono $\frac{\varphi}{n}$, $\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}$, $\frac{\varphi}{n} + 2\frac{2\pi}{n}$, $\dots$, $\frac{\varphi}{n} + (n-1)\frac{2\pi}{n}$, è evidente che, se $n > 2$, *dette immagini si dispongono secondo i vertici di un n-agono regolare* (inscritto in tale circonferenza).

[4] Si può anche porre $k = k^*$, $k^* + 1$, $k^* + 2, \dots, k^* + n - 1$ ove k^* è un intero arbitrario.