C.D. Pagani S. Salsa

ANALISI MATEMATICA

Volume 1

MASSON
1998

1.5 Differenziale

Riprendiamo la formula (1.7). Se $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ è derivabile in x, allora si può scrivere

$$f(x+h) - f(x) = f'(x)h + h\varepsilon(h) \tag{1.12}$$

dove $\varepsilon(h) \to 0$ con h.

Nella (1.12) l'incremento $\Delta f = f(x+h) - f(x)$ è scritto come somma di due termini:

$$f'(x)\,h \quad \text{lineare in } h$$

e

$$h\,\varepsilon(h) = o(h), \text{ infinitesimo di ordine superiore ad } h \text{ se } h \to 0 \,.$$

Cambiando punto di vista, introduciamo la seguente

Definizione 1.2 - *Supponiamo che, dati $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ ed un punto $x \in (a,b)$, esista un numero reale A tale che, per ogni h per cui $x + h \in (a,b)$, si abbia*

$$\Delta f = A\,h + o(h) \quad per \quad h \to 0 \,. \tag{1.13}$$

Diciamo allora che f è differenziabile in x; la parte lineare Ah dell'incremento Δf si chiama **differenziale** *di f in x e si indica con il simbolo $df(x)$.*

Se nella (1.13) dividiamo per h entrambi i membri e passiamo al limite per $h \to 0$ otteniamo subito che f è derivabile in x e che $f'(x) = A$. Dunque

$$df(x) = f'(x)h \,.$$

Riassumendo, siano dati $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ ed $x \in (a,b)$:

i) f derivabile in x significa che $\lim_{h\to 0} \Delta f/h$ esiste finito

ii) f differenziabile in x significa che Δf può essere approssimato da una parte lineare in h a meno di infinitesimi di ordine superiore rispetto ad h.

Dalla discussione precedente segue che *f è derivabile in x se e solo se è differenziabile in x*; inoltre il differenziale di f in x è dato dalla formula

$$df(x) = f'(x)h \,. \tag{1.14}$$

Vedremo nel cap. 7 che tale equivalenza è falsa per funzioni di più variabili.

Se calcoliamo il differenziale di $f(x) = x$ otteniamo

$$df(x) = dx = f'(x)h = h \,.$$

L'espressione (1.14) per il differenziale diventa dunque

$$df(x) = f'(x)dx \text{ (*)}$$

(*) Leibniz concepiva f' come rapporto delle quantità infinitesime df e dx!

L'algebra delle derivate si estende subito ai differenziali; se f e g sono differenziabili, valgono le formule seguenti:

$$d(f+g) = df + dg$$
$$d(fg) = gdf + fdg$$
$$d(f/g) = \frac{1}{g^2}(gdf - fdg) \,.$$

Riguardo alla composizione, il differenziale soddisfa una proprietà che si chiama *invarianza di forma* che lo rende più *flessibile* della derivata in alcune situazioni.

Siano $w = g(y)$ e $y = f(x)$ con g definita sull'immagine di f. La funzione w può allora essere riguardata come funzione della variabile y oppure come funzione della variabile x, attraverso la composizione $g \circ f$.

Nel 1° caso si ha:

$$dw = g'(y)dy \,; \tag{1.15}$$

nel 2° caso si ha, utilizzando la regola di derivazione delle funzioni composte,

$$dw = g'(f(x)) \cdot f'(x)dx \,,$$

che si può ancora scrivere

$$dw = g'(y)dy$$

essendo $y = f(x)$ e $dy = f'(x)dx$.

È sostanzialmente per l'invarianza di forma, che, nelle scienze applicate, si "differenzia" una data equazione anziché derivarla, quando non siano precisate le dipendenze delle variabili.

Ad esempio, in termodinamica, si può "differenziare" l'equazione

$$pV = RT \quad \text{(equazione di stato dei gas perfetti)}$$

ottenendo

$$pdV + Vdp = RdT \,,$$

equazione valida qualunque sia la dipendenza da altre variabili di p, V, T.

Anche il differenziale può essere rappresentato geometricamente come viene mostrato in figura 6.10.

Come si vede, df è l'incremento in altezza valutato lungo la tangente invece che lungo la curva.

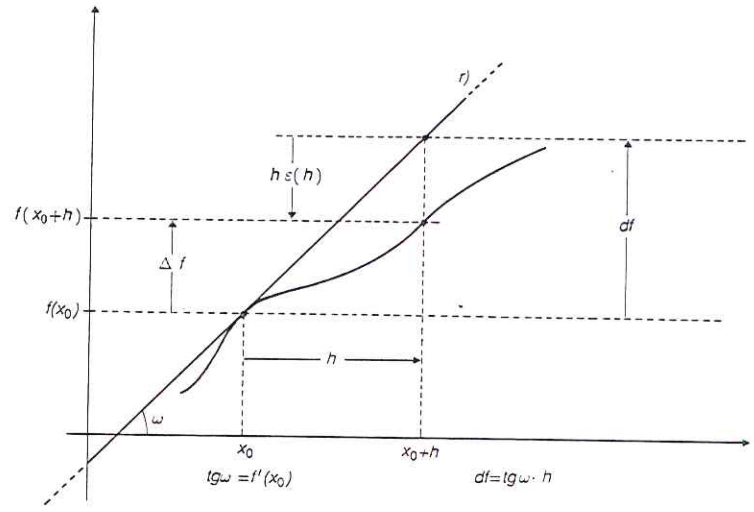

Fig. 6.10

Come si è fatto per le derivate, si possono introdurre anche i differenziali di ordine superiore; precisiamo subito che l'invarianza di forma vale *solo* per il differenziale primo, come il lettore potrà facilmente verificare.

Per una funzione derivabile n-volte in x, definiamo i differenziali secondo, terzo, ... n-esimo come segue:

$$d^2 f(x) := f''(x)dx^2 \ , \ d^3 f(x) := f'''(x)dx^3 \ , \ \dots \ ,$$
$$d^n f(x) := f^{(n)}(x)dx^n \ .$$

Esercizi

23. Calcolare l'espressione del differenziale secondo di $f(x)$ quando si pensi x variabile indipendente oppure quando $x = x(t)$. Verificare che non vale l'invarianza di forma.

24. Estendere la formula di Leibniz (1.5) ai differenziali.

2. I TEOREMI FONDAMENTALI DEL CALCOLO DIFFERENZIALE

2.1 Teorema di Fermat. Estremi locali

I teoremi presentati in questa sezione forniscono gli strumenti principali ed indispensabili per lo studio delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$.

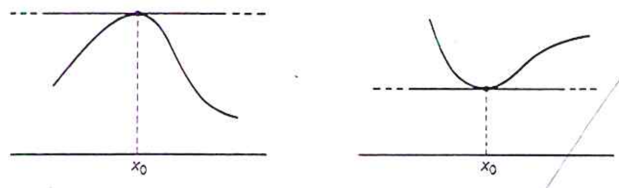

Fig. 6.11

Il primo di questi, sostanzialmente dovuto al matematico francese Pierre de Fermat (fine del 17° secolo), esprime un fatto geometricamente intuitivo: se esiste la tangente in un punto $(x_0, f(x_0))$ del grafico di una funzione e $f(x_0)$ è un estremo locale (massimo o minimo) allora essa è parallela all'asse delle ascisse.

■ **Teorema 2.1** - (di Fermat). *Sia* $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ *ed* $x_0 \in (a,b)$. *Se in* x_0 f *è derivabile ed* f *ha un estremo locale in* x_0 *allora* $f'(x_0) = 0$.

Dimostrazione - Sia x_0 punto di massimo locale. Per ipotesi esiste un intorno I di x_0, $I \subset (a,b)$, tale che $f(x_0) \geq f(x)$, $\forall x \in I$.

Consideriamo il rapporto incrementale

$$\Phi(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ , \ x \neq x_0 \ .$$

Per $x \in I$, si ha:

$$x > x_0 \Rightarrow \Phi(x) \leq 0$$
$$x < x_0 \Rightarrow \Phi(x) \geq 0 \ .$$

Per il teorema della permanenza del segno si deduce che:

$$\lim_{x \to x_0+} \Phi(x) = f'_+(x_0) \leq 0 \ \text{ e } \ \lim_{x \to x_0-} \Phi(x) = f'_-(x_0) \geq 0 \ .$$

Essendo f derivabile in x_0, si conclude che $f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = 0$. Analogamente si procede quando x_0 è punto di minimo locale. □

Definizione 2.1 - *I punti* x *in cui una funzione* f *ha derivata nulla si dicono* **punti stazionari** *o* **critici** (*).

Il teorema 2.1 afferma che *se* x_0 *è punto di estremo per* f, *interno al dominio di* f, *ed* f *è ivi derivabile, allora* x_0 *è stazionario*.

Naturalmente non tutti i punti stazionari per una funzione sono di estremo.

Ad esempio $f(x) = x^3$ ha in 0 un punto stazionario che *non* è estremo.

Punti come l'origine per la funzione x^3 si chiamano punti di flesso o di inflessione; ne parleremo in dettaglio nel paragrafo 3.1.

(*) Osserviamo che alcuni autori definiscono punti critici le immagini dei punti stazionari.