GHIZZETTI - ROSATI - Analisi Matematica 1 - MASSON

Il lettore può subito osservare che da (5.3.2) e (5.3.4) segue

$$(1+1/n)^n \sim \sum_{k=o}^{n} \frac{1}{k!} .$$

Parimenti il lettore può provare che $\forall\, h \in \mathbb{N}$ si ha

$$(1+h/n)^n \sim \left[(1+1/n)^n\right]^h \longrightarrow e^h , \tag{5.6.10}$$

osservando che la successione a primo membro è crescente e quindi regolare, e che pertanto il limite può essere calcolato utilizzando la sottosuccessione di indici nh, $n = 1, 2, 3 \ldots$.

5.7 Criterio di convergenza di Cauchy; massimo e minimo limite

In tutte le considerazioni fin qui svolte si è proceduto al calcolo di limiti a partire da alcuni limiti fondamentali, ricorrendo alle proprietà relative alle operazioni di addizione, moltiplicazione, divisione, esponenziale, ecc.

Rimane aperta la questione di giudicare *a priori* se una data successione sia o non sia convergente (senza conoscere l'eventuale limite che potrà essere poi calcolato anche operando con una opportuna sottosuccessione).

Risponde alla domanda il cosiddetto *criterio di convergenza di Cauchy*, che spesso (trattandosi di condizione necessaria e sufficiente) viene utilizzato per negare che una successione possa essere convergente.

Esso si enuncia come segue:

Teorema 5.7.I – *Condizione necessaria e sufficiente affinché la successione* $\{a_n\}$ *sia convergente è che, comunque si fissi un* $\varepsilon > 0$, *esista in corrispondenza un* $\nu_\varepsilon \in \mathbb{N}$ *tale che, per ogni coppia di indici* $m, n > \nu_\varepsilon$ *risulti*

$$|a_m - a_n| < \varepsilon , \tag{5.7.1}$$

o, ciò che è lo stesso,

$$|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon , \quad \forall\, n > \nu_\varepsilon , \quad e \quad \forall\, p \in \mathbb{N} . \tag{5.7.1'}$$

Dimostrazione – Osserviamo preliminarmente che l'equivalenza delle (5.7.1, 1′) deriva dal ritenere, senza scapito di generalità, $m > n$ e dal porre poi $m - n = p$, con $p = 1, 2, \ldots$, arbitrario, e viceversa. Passiamo ora alla dimostrazione.

Per la *necessità*: da $a_n \longrightarrow l$ segue che $\forall\, \varepsilon > 0$ esiste un ν_ε tale che $\forall\, n > \nu_\varepsilon$ risulti $|a_n - l| < \varepsilon/2$ e quindi $\forall\, m > \nu_\varepsilon$ anche $|a_m - l| < \varepsilon/2$; ne segue allora $\forall\, m, n > \nu_\varepsilon$

$$|a_m - a_n| = |(a_m - l) - (a_n - l)| \le |a_m - l| + |a_n - l| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

Per la *sufficienza*, si osserva che la (5.7.1′) implica che $\{a_n\}$ è *definitivamente limitata* e quindi *limitata* (vedi il ragionamento fatto nel teorema 5.2.II): esistono perciò due opportuni numeri $a < b$ tali che $a_n \in [a, b]$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.