19. Sì. Infatti, poiché $a_n \to 1$, esiste ν tale che per ogni $n > \nu$ risulta $a_n > \frac{1}{2}$. Sia $\lambda = \min\left\{\frac{1}{2}, a_1, a_2, \ldots, a_\nu\right\}$. Dato che tutti i termini a_n sono positivi, anche λ sarà positivo, e si avrà $a_n \ge \lambda$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Se ora K è tale che $K\lambda > 1$, risulterà $Ka_n + b_n > 1 + b_n > 0$.

20. No. Ad esempio, sia $a_n = 1$, e sia b_n la successione che assume il valore 0 per n pari, e $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{1/n}$ per n dispari. La successione $a_n + |b_n|^n$ varrà allora 1 per n pari, e $2 - \frac{1}{n}$ per n dispari, e quindi non avrà limite.

21. -1	**22.** 0	**23.** 1	**24.** 1
25. 0	**26.** 0	**27.** 0	**28.** $-\infty$
29. 0	**30.** 2	**31.** 3	**32.** 6
33. $+\infty$	**34.** 1	**35.** $\max\{a^2, 1\}$	**36.** $+\infty$
37. 0	**38.** -1	**39.** 0	**40.** 0
41. 0	**42.** 0	**43.** $\frac{1}{e}$	**44.** $\frac{1}{2}$
45. 1	**46.** $\frac{4}{e}$	**47.** 1	**48.** $+\infty$
49. $\frac{2}{3}$	**50.** 1	**51.** $+\infty$	**52.** $+\infty$
53. 1	**54.** 1	**55.** 1	**56.** 0
57. $-\infty$	**58.** 0	**59.** $-\infty$	**60.** 0
61. Non esiste	**62.** $-\infty$	**63.** 0	**64.** 0
65. $-\infty$	**66.** $-\infty$	**67.** e^{14}	**68.** $+\infty$
69. 8	**70.** 0	**71.** $\frac{1}{3}$	**72.** $+\infty$
73. $+\infty$	**74.** $+\infty$	**75.** 1	**76.** 0
77. 1	**78.** 0	**79.** $+\infty$	**80.** 0
81. $\frac{27}{4}$	**82.** $\frac{27}{4}$	**83.** $\frac{h^h}{k^k(h-k)^{h-k}}$	

84. Se $\beta > 0$, il limite è 0 se $0 \le A < 1$, $+\infty$ se $A \ge 1$. Se $\beta = 0$, il limite è $+\infty$ se $\alpha > 0$, 0 se $\alpha < 0$, A se $\alpha = 0$. Se $\beta < 0$, il limite è $+\infty$ se $\alpha > 0$, 1 se $\alpha = 0$, 0 se $\alpha < 0$.

85. 0 **86.** -1 **87.** 0 **88.** $a \ge 3$ **89.** $-1 < a \le 0$

90. Supponiamo che $L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \ge \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n} = l$. Per ogni $\epsilon > 0$ esiste un ν tale che per $n > \nu$ si ha $L - \epsilon < \sqrt[n]{a_n} < L + \epsilon$ e $\sqrt[n]{b_n} < l + \epsilon$. Per tali valori di n si ha allora $L - \epsilon < \sqrt[n]{a_n} \le \sqrt[n]{a_n + b_n} < \sqrt[n]{(L+\epsilon)^n + (l+\epsilon)^n} \le (L+\epsilon)\sqrt[n]{2}$. Se ora si prende ν così grande che sia anche $\sqrt[n]{2} < 1 + \epsilon$, si ottiene $L - \epsilon < \sqrt[n]{a_n + b_n} < L + \epsilon(L+1) + \epsilon^2$ per ogni $n > \nu$, e dunque la tesi. Si osservi che lo stesso risultato si ottiene supponendo solamente che $\max\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n} \le \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$.

91. Per $\epsilon > 0$, sia ν tale che per ogni $n > \nu$ risulti $L - \epsilon < a_n < L + \epsilon$. Per tali n si ha $q_n = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_\nu}{n} + \frac{a_{\nu+1} + \ldots + a_n}{n}$. Posto allora $M = a_1 + \ldots + a_\nu$, si ha $\frac{M}{n} + \frac{(n-\nu)(L-\epsilon)}{n} < q_n < \frac{M}{n} + \frac{(n-\nu)(L+\epsilon)}{n}$. Sia ora $\nu_1 > \nu$ un numero tale che per $n > \nu_1$ risulti $\frac{|M|}{n} < \epsilon$ e $\frac{\nu}{n} < \epsilon$. Se $n > \nu_1$, si ha $L - \epsilon(L+2) < q_n < L + 2\epsilon$, cosicché $\lim_{n\to\infty} q_n = L$.

92. Si ponga $b_n = a_n - a_{n-1}$; risulterà allora $a_n - a_0 = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$, e dunque $\frac{a_n}{n} = \frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{n} + \frac{a_0}{n}$. Se $b = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}(a_n - a_{n-1})$, il secondo membro dell'ultima relazione tende a b grazie al risultato dell'esercizio precedente, e dunque anche $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = b$.

93. Tutti i termini della successione a_n sono maggiori di 1, e dunque risulta $a_{n+1} \le \sqrt{a_n} \le a_n$, cosicché la successione è decrescente, e di conseguenza ha limite L. Dalla relazione data segue, passando al limite, che $1 \le L \le \sqrt{L}$, e dunque L non può essere che 1.

94. Sia $P(x) = x^7 + x - \frac{1}{n}$. Si ha $P(0) < 0$, e $P(1/n) > 0$, cosicché $P(x)$ ha uno zero compreso tra 0 e $\frac{1}{n}$ (*Lezioni*, cap. 1, Teorema 4.1). D'altra parte, se si ha $x^7 + x = y^7 + y = \frac{1}{n}$, ragionando come nella dimostrazione del teorema 4.2 del capitolo 1 delle *Lezioni* si dimostra che $x = y$; di conseguenza la radice x_n trovata è unica. Poiché $0 < x_n < \frac{1}{n}$, per il teorema dei carabinieri si conclude che $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

95. Basta osservare che se $r < 0$ si ha $n\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^r - 1\right\} = \dfrac{n\left\{1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-r}\right\}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-r}}$, e utilizzare l'esempio precedente.

96. $1, 0$	**97.** $\frac{1}{5}$	**98.** $2, 0$	**99.** 0
100. $+\infty, 0$	**101.** $1, 0$	**102.** 1	**103.** $+\infty$
104. $+\infty$	**105.** 0	**106.** $\frac{1}{2}$	**107.** $+\infty, -\infty$
108. $\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}$	**109.** $1, -1$	**110.** $1, -1$	**111.** $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{2}{3}$
112. $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$			