

**CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA EDILE - UNIVERSITÀ "LA SAPIENZA", ROMA**  
**CORSO DI ANALISI MATEMATICA 2 (LETTERE M - Z) - a. a. 2007/'08**  
**FORMULARIO SINTETICO DI ANALISI MATEMATICA 2**

**Coordinate polari**

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\theta) \end{cases}, \quad \rho \in [0, +\infty), \quad \theta \in [0, 2\pi)$$

**Coordinate polari centrate in  $P_0 \equiv (x_0, y_0)$**

$$\begin{cases} x = x_0 + \rho \cos(\theta) \\ y = y_0 + \rho \sin(\theta) \end{cases}, \quad \rho \in [0, +\infty), \quad \theta \in [0, 2\pi)$$

**Coordinate ellittiche**

$$\begin{cases} x = a\rho \cos(\theta) \\ y = b\rho \sin(\theta) \end{cases}, \quad \rho \in [0, +\infty), \quad \theta \in [0, 2\pi), \quad a, b > 0$$

**Coordinate ellittiche centrate in  $P_0 \equiv (x_0, y_0)$**

$$\begin{cases} x = x_0 + a\rho \cos(\theta) \\ y = y_0 + b\rho \sin(\theta) \end{cases}, \quad \rho \in [0, +\infty), \quad \theta \in [0, 2\pi), \quad a, b > 0$$

**Differenziale totale e differenziabilità**

Sia  $f$  derivabile nel punto interno  $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ .

$$df(P_0) := f_x(P_0)(x - x_0) + f_y(P_0)(y - y_0) = f_x(P_0)dx + f_y(P_0)dy = \vec{\nabla} f(P_0) \cdot \vec{dP}$$

$f$  è differenziabile in  $P_0 \equiv (x_0, y_0)$  se

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\Delta f - df(P_0)}{\rho} = 0$$

dove  $\rho = |\vec{\Delta P}| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ .

**Formule di riduzione per gli integrali doppi**

Se  $T$  è un dominio normale rispetto all'asse  $x$  (o  $y$ -semplice):

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b; \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}, \quad \alpha, \beta \in C^0([a, b])$$

$$\iint_T f(x, y) \, dx dy = \int_a^b dx \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy.$$

Se  $T$  è un dominio normale rispetto all'asse  $y$  (o  $x$ -semplice):

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d; \gamma(y) \leq x \leq \delta(y)\}, \quad \gamma, \delta \in C^0([c, d])$$

$$\iint_T f(x, y) \, dx dy = \int_c^d dy \int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x, y) dx .$$

### Area di un dominio normale

Se  $T$  è un dominio normale rispetto all'asse  $x$  (o  $y$ -semplice):

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b ; \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\} \quad , \quad \alpha, \beta \in C^0([a, b])$$

$$Area(T) = \int_a^b [\beta(x) - \alpha(x)] dx .$$

Se  $T$  è un dominio normale rispetto all'asse  $y$  (o  $x$ -semplice):

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d ; \gamma(y) \leq x \leq \delta(y)\} \quad , \quad \gamma, \delta \in C^0([c, d])$$

$$Area(T) = \int_c^d [\delta(y) - \gamma(y)] dy .$$

### Formule di trasformazione di coordinate nel piano

Data la trasformazione invertibile di coordinate

$$\Phi : \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases} \quad , \quad \Phi \in C^1(A) \quad , \quad A \subseteq \mathbb{R}^2 \quad , \quad J(u, v) = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{in } A \quad ,$$

$$A = \Phi(T) \quad , \quad T = \Phi^{-1}(A) \quad ,$$

cioè tale che

$$\Phi^{-1} : \begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases} \quad , \quad J(x, y) = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} \neq 0 \quad , \quad J(x, y) = \frac{1}{J(u, v)} \quad ,$$

$$\iint_T f(x, y) \, dx dy = \iint_A f(x(u, v), y(u, v)) |J(u, v)| \, du dv .$$

Coordinate polari:  $\begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\theta) \end{cases} \quad , \quad \rho \in (0, +\infty) \quad , \quad \theta \in [0, 2\pi) \quad , \quad J(\rho, \theta) = \rho :$

$$\iint_{T(x, y)} f(x, y) \, dx dy = \iint_{A(\rho, \theta)} f(x(\rho, \theta), y(\rho, \theta)) \rho \, d\rho d\theta .$$

**N.B.:** in base a noti teoremi, la validità della formula di trasformazione in coordinate polari può essere estesa a  $(\rho, \theta) \in [0, +\infty) \times [0, 2\pi]$ .

### Volume di un dominio normale rispetto al piano $(x, y)$

Dato il dominio

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in A \subseteq \mathbb{R}^2 \quad , \quad \alpha(x, y) \leq z \leq \beta(x, y) \quad , \quad \alpha, \beta \in C^0(A)\}$$

$$Vol(T) = \iint_A [\beta(x, y) - \alpha(x, y)] \, dx dy .$$

### Volume di un solido di rotazione

Dato il solido  $T$  ottenuto ruotando attorno all'asse  $z$  il rettangoloide

$$R = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 \mid z \in [c, d], 0 \leq x \leq f(z)\} ,$$

detta  $x_B$  l'ascissa del baricentro di  $R$ ,

$$Vol(T) = 2\pi \int_c^d dz \int_0^{f(z)} x \, dx = \pi \int_c^d [f(z)]^2 dz = 2\pi \cdot x_B \cdot Area(R)$$

### Formule di Dirichlet

Data  $f \in C^0(D)$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ,

**Caso I.** Funzione pari nella variabile  $x$  ( $f(x, y) = f(-x, y)$ ) e dominio  $D$  simmetrico rispetto all'asse  $y$ :  
detto  $D_1 = D \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\}$

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy = 2 \iint_{D_1} f(x, y) \, dx dy .$$

**Caso II.** Funzione dispari nella variabile  $x$  ( $f(x, y) = -f(-x, y)$ ) e dominio  $D$  simmetrico rispetto all'asse  $y$ :

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy = 0 .$$

**Caso III.** Funzione pari nella variabile  $y$  ( $f(x, y) = f(x, -y)$ ) e dominio  $D$  simmetrico rispetto all'asse  $x$ :  
detto  $D_2 = D \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy = 2 \iint_{D_2} f(x, y) \, dx dy .$$

**Caso IV.** Funzione dispari nella variabile  $y$  ( $f(x, y) = -f(x, -y)$ ) e dominio  $D$  simmetrico rispetto all'asse  $x$ :

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy = 0 .$$

### Forme differenziali lineari

$$\omega(x, y) = X(x, y)dx + Y(x, y)dy \quad \text{forma differenziale}$$

$$\vec{F} = (X(x, y), Y(x, y)) \quad \text{campo vettoriale associato alla forma}$$

### Integrale curvilineo di forma differenziale

Se  $X, Y \in C^0(A)$ ,  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  connesso, data la curva regolare del piano

$$\gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} , \quad t \in [t_1, t_2] , \quad P(t_1) = P_1 , P(t_2) = P_2$$

allora

$$\int_{\gamma(P_1, P_2)} \omega := \int_{t_1}^{t_2} [X(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + Y(x(t), y(t)) \cdot y'(t)] dt .$$

**Metodi per il calcolo delle primitive  $V(x, y)$  di una forma differenziale esatta**

Primo metodo: dato  $P_0 \equiv (x_0, y_0)$  e il generico punto  $P \equiv (x, y)$ ,  $P_0, P \in A$ ,

$$V(x, y) = \int_{x_0}^x X(t, y_0) dt + \int_{y_0}^y Y(x, t) dt + C$$

oppure

$$V(x, y) = \int_{y_0}^y Y(x_0, t) dt + \int_{x_0}^x X(t, y) dt + C .$$

Secondo metodo:

$$\int X(x, y) dx = V(x, y) + \phi(y)$$

$$\frac{d\phi}{dy} = -\frac{\partial V}{\partial y} + Y(x, y)$$

oppure

$$\int Y(x, y) dy = V(x, y) + \psi(x)$$

$$\frac{d\psi}{dx} = -\frac{\partial V}{\partial x} + X(x, y)$$

**Equazione della retta tangente a una curva regolare del piano nel punto di coordinate  $(x(t), y(t))$**

$$\frac{y - y(t)}{y'(t)} = \frac{x - x(t)}{x'(t)}$$

**Componenti del versore tangente a una curva regolare del piano nel punto di coordinate  $(x(t), y(t))$**

$$\text{vers}(\vec{\tau}) = \left( \frac{x'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}, \frac{y'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}} \right) .$$

**Componenti del versore della normale interna a una curva regolare del piano nel punto di coordinate  $(x(t), y(t))$**

$$\text{vers}(\vec{n}_i) = \left( -\frac{y'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}, \frac{x'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}} \right) .$$

**Lunghezza di una curva regolare**

Data la curva regolare del piano

$$\gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} , \quad t \in [t_1, t_2] , \quad P(t_1) = P_1 , P(t_2) = P_2$$

allora

$$l(\gamma) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt .$$

Se la curva  $\gamma$  è grafico della funzione  $y = f(x)$ ,  $f \in C^1([a, b])$ , allora

$$l(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx .$$

**Equazione del piano tangente  $\Pi_{P_0}$  a una superficie regolare nel punto  $P_0 \equiv (x_0, y_0, z_0)$**

Data la superficie  $S$  grafico della funzione  $z = f(x, y)$ ,  $f \in C^1(A)$ ,  $A \subseteq \mathbb{R}^2$ , il piano tangente  $\Pi_{P_0}$  ha equazione

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(P_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(P_0) \cdot (y - y_0)$$

**Componenti del vettore della normale interna alla superficie regolare nel punto  $P_0 \equiv (x_0, y_0, z_0)$**

$$vers(\vec{n}_i) = \left( \frac{f_x(P_0)}{\sqrt{(f_x(P_0))^2 + (f_y(P_0))^2 + 1}}, \frac{f_y(P_0)}{\sqrt{(f_x(P_0))^2 + (f_y(P_0))^2 + 1}}, \frac{-1}{\sqrt{(f_x(P_0))^2 + (f_y(P_0))^2 + 1}} \right)$$

**Area della superficie**

$$Area(S) = \iint_A \sqrt{(f_x(x, y))^2 + (f_y(x, y))^2 + 1} dx dy$$

**Baricentri e momenti di inerzia**

**Tutte le formule vanno intese per corpi aventi densità di massa uniforme e di massa unitaria.**

Coordinate del baricentro di un corpo  $\gamma$  filiforme nel piano, di equazione

$$\gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} , \quad t \in [t_1, t_2] , \quad P(t_1) = P_1 , P(t_2) = P_2$$

$$x_B = \frac{1}{l(\gamma)} \int_{t_1}^{t_2} x(t) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt \quad ; \quad y_B = \frac{1}{l(\gamma)} \int_{t_1}^{t_2} y(t) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt .$$

Coordinate del baricentro di un corpo  $D$  bidimensionale:

$$x_B = \frac{1}{Area(D)} \iint_D x dx dy \quad ; \quad y_B = \frac{1}{Area(D)} \iint_D y dx dy .$$

Coordinate del baricentro di un dominio  $T$  tridimensionale:

$$x_B = \frac{1}{Vol(T)} \iiint_T x dx dy dz \quad ; \quad y_B = \frac{1}{Vol(T)} \iiint_T y dx dy dz \quad ; \quad z_B = \frac{1}{Vol(T)} \iiint_T z dx dy dz .$$

Momento d'inerzia di un dominio  $T$  tridimensionale rispetto a un punto  $P_0 \equiv (x_0, y_0, z_0)$ :

$$I_{P_0} = \iiint_T [\text{dist}(P_0, P)]^2 dx dy dz = \iiint_T [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2] dx dy dz .$$

Momento d'inerzia di un dominio  $T$  tridimensionale rispetto all'asse delle  $z$  (analogamente per i momenti d'inerzia rispetto agli altri due assi):

$$I = \iiint_T (x^2 + y^2) dx dy dz .$$

Momento d'inerzia di un dominio  $T$  tridimensionale rispetto al piano  $(x, y)$  (analogamente per i momenti d'inerzia rispetto agli altri due piani coordinati):

$$I = \iiint_T z^2 dx dy dz .$$

### Divergenza e rotore

Dato il campo vettoriale  $\vec{F} = (X(x, y), Y(x, y)) \in C^1(D)$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ,

$$\text{div}(\vec{F}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} := \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \quad ; \quad \text{rot}(\vec{F}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{F} := \left( \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) \vec{k} .$$

Dato il campo vettoriale  $\vec{F} = (X(x, y, z), Y(x, y, z), Z(x, y, z)) \in C^1(T)$ ,  $T \subseteq \mathbb{R}^3$ ,

$$\begin{aligned} \text{div}(\vec{F}) &= \vec{\nabla} \cdot \vec{F} := \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} ; \\ \overrightarrow{\text{rot}(\vec{F})} &= \vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X(x, y, z) & Y(x, y, z) & Z(x, y, z) \end{vmatrix} = \\ &= \left( \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) \vec{k} \end{aligned}$$

### Formule di Gauss-Green in due dimensioni:

Dato un dominio regolare e limitato  $D \subset \mathbb{R}^2$ , considerate  $f, g \in C^1(D)$ ,

$$\iint_D \frac{\partial f}{\partial x} dx dy = \int_{+\partial D} f dy \quad ; \quad \iint_D \frac{\partial g}{\partial y} dx dy = - \int_{+\partial D} g dx \quad ;$$

### Applicazioni

$$\text{Area}(D) = \int_{+\partial D} x dy = \int_{+\partial D} y dx = \frac{1}{2} \int_{+\partial D} (x dy - y dx)$$

### Teorema della Divergenza in due dimensioni:

$$\iint_D \text{div}(\vec{F}) dx dy = \iint_D \left( \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) dx dy = \int_{+\partial D} (X dy - Y dx) = \int_{+\partial D} \vec{F} \cdot \vec{n}_e ds$$

Teorema del Rotore (o di Stokes) in due dimensioni:

$$\iint_D \left( \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) dx dy = \int_{+\partial D} (X dx + Y dy)$$

**Teorema del Rotore (o di Stokes) in tre dimensioni:**

Data una superficie  $S$ , grafico della funzione regolare  $z = f(x, y)$ , definita su un dominio regolare  $D$ , fissato arbitrariamente l'orientamento positivo del bordo  $+BS$  e orientati coerentemente  $S$  e il versore normale positivo  $\vec{n}$ , considerato il campo vettoriale  $\vec{F} = (X(x, y, z), Y(x, y, z), Z(x, y, z)) \in C^1(A)$ ,  $S \subset A \subseteq \mathbb{R}^3$ ,

$$\Phi_S(\overrightarrow{\text{rot}(\vec{F})}) := \int_S \overrightarrow{\text{rot}(\vec{F})} \cdot \vec{n} dS = \int_{+BS} X dx + Y dy + Z dz =: \oint_{+BS} \vec{F} \cdot \vec{\tau} ds$$

**Equazioni differenziali a variabili separabili**

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y) \quad ; \quad f \in C^0(I_x), g \in C^0(I_y).$$

Metodo della separazione delle variabili: ponendo  $g(y) \neq 0$ , si risolve

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx \quad (\text{integrale generale})$$

Eventuali soluzioni singolari: si ottengono risolvendo  $g(y) = 0$ .

**Equazioni differenziali lineari del primo ordine a coefficienti continui**

$$y'(x) = a(x) \cdot y(x) + b(x) \quad ; \quad a, b \in C^0(I)$$

Metodo del fattore integrante:  $e^{-\int a(x) dx}$

$$e^{-\int a(x) dx} [y'(x) - a(x) \cdot y(x)] = e^{-\int a(x) dx} b(x)$$

$$\frac{d}{dx} \left[ e^{-\int a(x) dx} y(x) \right] = e^{-\int a(x) dx} b(x)$$

da cui

$$y(x) = e^{\int a(x) dx} \left[ \int e^{-\int a(x) dx} b(x) dx + C \right]$$

ovvero, usando la funzione integrale,

$$y(x) = e^{\int_{x_0}^x a(t) dt} \left[ \int_{x_0}^x e^{-\int_{x_0}^t a(\tau) d\tau} b(t) dt + y_0 \right], \quad x_0 \in I,$$

dove, assegnato un Problema di Cauchy,  $y_0 = y(x_0)$ .

**Equazioni differenziali di Bernoulli**

$$y'(x) = a(x) \cdot y(x) + b(x) \cdot y^\alpha(x) \quad ; \quad a, b \in C^0(I) \quad ; \quad \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \notin \{0, 1\}.$$

Solo se  $\alpha > 0$ , occorre tener conto anche della soluzione singolare  $y \equiv 0$ .

Supposto  $y \neq 0$ , si pone  $z(x) = y^{1-\alpha}(x)$ , da cui

$$z'(x) = (1 - \alpha)a(x)z(x) + (1 - \alpha)b(x) .$$

### Equazioni differenziali lineari del secondo ordine a coefficienti costanti

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = f(x) \quad \text{equazione non omogenea o completa}$$

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0 \quad \text{equazione omogenea}$$

Integrale generale  $y_0(x)$  dell'equazione omogenea: chiamiamo  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  le soluzioni dell'equazione caratteristica (o secolare)

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0 .$$

I caso ( $\Delta > 0$ ,  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ) (radici reali e distinte):

$$y_0(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} \quad , \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R} .$$

II caso ( $\Delta = 0$ ,  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R}$ ) (radici reali e coincidenti):

$$y_0(x) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 \cdot x \cdot e^{\lambda x} \quad , \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R} .$$

III caso ( $\Delta < 0$ ,  $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ ,  $\lambda_2 = \alpha - i\beta = \overline{\lambda_1} \in \mathcal{C}$ ) (radici complesse coniugate):

$$y_0(x) = e^{\alpha x} [C_1 \cdot \cos(\beta x) + C_2 \cdot \sin(\beta x)] \quad , \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R} .$$

Integrale generale  $y(x)$  dell'equazione non omogenea: detti  $y_0(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$  l'integrale generale dell'equazione omogenea associata e  $\bar{y}(x)$  un integrale particolare dell'equazione non omogenea,

$$y(x) = y_0(x) + \bar{y}(x)$$

### Metodo di Lagrange della variazione delle costanti

$$\bar{y}(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) ,$$

dove

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0 \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x) \end{cases}$$

ovvero

$$C_1(x) = - \int \frac{f(x)y_2(x)}{W(x)} dx \quad ; \quad C_2(x) = \int \frac{f(x)y_1(x)}{W(x)} dx$$

dove  $W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$  è il *Wronskiano* di  $y_1$  e  $y_2$ .

### Metodo di somiglianza

Si vedano anche le due pagine in fondo al formulario.

1)  $f(x) = P_m(x)$ ,

con  $P_m(x)$  polinomio di grado  $m$  in  $x$ :

$$\bar{y}(x) = p_m(x) \cdot x^h ,$$

dove  $h$  è la molteplicità (eventualmente nulla) della soluzione  $\lambda = 0$  dell'equazione caratteristica e  $p_m(x)$  è un generico polinomio di grado  $m$  in  $x$ .

2)  $f(x) = e^{\eta x} P_m(x)$ ,

dove  $\eta \in \mathbb{R}$  ,  $P_m(x)$  polinomio di grado  $m$  in  $x$ :

$$\bar{y}(x) = e^{\eta x} q_m(x) \cdot x^h ,$$

dove  $h$  è la molteplicità (eventualmente nulla) della soluzione  $\lambda = \eta$  dell'equazione caratteristica e  $q_m(x)$  è un generico polinomio di grado  $m$  in  $x$ .

3)  $f(x) = e^{\eta x} [P_m(x) \cos(\mu x) + Q_k(x) \sin(\mu x)]$ ,

dove  $\eta, \mu \in \mathbb{R}$  ,  $P_m(x)$  ,  $Q_k(x)$  polinomi rispettivamente di grado  $m$  e  $k$  in  $x$ :

$$\bar{y}(x) = e^{\eta x} [p_n(x) \cos(\mu x) + q_n(x) \sin(\mu x)] \cdot x^h ,$$

dove  $h$  è la molteplicità (eventualmente nulla) della soluzione  $\lambda = \eta + i\mu$  dell'equazione caratteristica e  $p_n(x), q_n(x)$  sono generici polinomi di grado  $n = \max\{k, m\}$  in  $x$ .

### Principio di sovrapposizione

Data la generica equazione differenziale di ordine  $n$  lineare  $L(y) = f$ , con  $f = f_1 + f_2$ , se esistono  $y_1$  e  $y_2$  tali che  $L(y_1) = f_1$  e  $L(y_2) = f_2$ , allora la funzione  $y = y_1 + y_2$  soddisfa l'equazione  $L(y) = f$ .

## Punti critici liberi

(da M. Bramanti, C.D. Pagani, S. Salsa, Matematica, Zanichelli, 2004)

**Teorema 6.8** – Sia  $f(x, y)$  una funzione di due variabili,  $(x_0, y_0)$  un punto critico per  $f$ ,  $Hf(x_0, y_0)$  la matrice hessiana di  $f$  nel punto critico. Allora:

Se $\det Hf(x_0, y_0)$ è ...	e $f_{xx}(x_0, y_0)$ è ...	la forma quadratica è ...	e il punto critico è ...
$> 0$	$> 0$	definita positiva	punto di minimo
$> 0$	$< 0$	definita negativa	punto di massimo
$< 0$		indefinita	punto di sella
$= 0$		semidefinita	caso dubbio

## Metodo di somiglianza

(da Krasnov, Kiselyov, Makarenko – A book of problems in ordinary differential equations)

Table 1. A summary of the forms of particular solutions for various right-hand sides \*

No.	Right-hand side of differential equation	Roots of characteristic equation	Forms of particular solutions
I	$P_m(x)$	1. Number 0 is not a root of characteristic equation	$\tilde{P}_m(x)$
		2. Number 0 is a root of characteristic equation of multiplicity $s$	$x^s \tilde{P}_m(x)$
II	$P_m(x) e^{\alpha x}$	1. Number $\alpha$ is not a root of characteristic equation	$\tilde{P}_m(x) e^{\alpha x}$
		2. Number $\alpha$ is a root of characteristic equation of multiplicity $s$	$x^s \tilde{P}_m(x) e^{\alpha x}$
III	$P_n(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x$	1. Numbers $\pm i\beta$ are not roots of characteristic equation	$\tilde{P}_h(x) \cos \beta x + \tilde{Q}_h(x) \sin \beta x$
		2. Numbers $\pm i\beta$ are roots of characteristic equation of multiplicity $s$	$x^s (\tilde{P}_h(x) \cos \beta x + \tilde{Q}_h(x) \sin \beta x)$
IV	$e^{\alpha x} [P_n(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x]$	1. Numbers $\alpha \pm i\beta$ are not roots of characteristic equation	$(\tilde{P}_h(x) \cos \beta x + \tilde{Q}_h(x) \sin \beta x) e^{\alpha x}$
		2. Numbers $\alpha \pm i\beta$ are roots of characteristic equation of multiplicity $s$	$x^s (\tilde{P}_h(x) \cos \beta x + \tilde{Q}_h(x) \sin \beta x) e^{\alpha x}$

\* The first three forms of right-hand sides are particular cases of form IV.

Una soluzione particolare sarà data da  $y_p(x) = C_1(x)y_{p1}(x) + C_2(x)y_{p2}(x)$ .

È ben noto che il problema di Cauchy per un'equazione differenziale lineare del secondo ordine ha sempre una ed una sola soluzione di classe  $C^2$  definita in tutto l'intervallo  $I$  ed essa può essere determinata imponendo la condizione iniziale nell'espressione precedentemente trovata per l'integrale generale dell'equazione completa.

Rimane aperto il problema di determinare le due soluzioni indipendenti dell'equazione omogenea associata; ciò è possibile solo in alcune situazioni particolari. Noi ci limiteremo a considerare esclusivamente i seguenti due casi: quello delle equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti e quello delle equazioni di Eulero, che sono equazioni a coefficienti variabili, ma che, come vedremo, si possono ricondurre al caso delle equazioni a coefficienti costanti con un opportuno cambiamento di variabile.

- Equazioni a coefficienti costanti: si tratta di equazioni differenziali della forma

$$a_0 y''(x) + a_1 y'(x) + a_2 y(x) = f(x),$$

con  $a_i \in \mathbb{R}$ , per  $i = 0, 1, 2$ , e  $a_0 \neq 0$ . Per determinare le due soluzioni indipendenti dell'equazione omogenea, si considera l'equazione caratteristica o *secolare* associata, cioè l'equazione algebrica del secondo ordine data da:

$$a_0 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0.$$

A seconda che il discriminante di tale equazione sia positivo, nullo o negativo, l'equazione avrà, rispettivamente, due soluzioni reali distinte, una sola soluzione reale, due soluzioni complesse coniugate. In corrispondenza, avremo le due soluzioni indipendenti dell'equazione differenziale omogenea, secondo la seguente tabella:

$\Delta > 0$	soluzioni $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ distinte	$\begin{cases} y_{o1}(x) = e^{\lambda_1 x}, \\ y_{o2}(x) = e^{\lambda_2 x}, \end{cases}$
$\Leftrightarrow$	$y_o(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$ ;	
$\Delta = 0$	unica soluzione $\lambda \in \mathbb{R}$	$\begin{cases} y_{o1}(x) = e^{\lambda x}, \\ y_{o2}(x) = x e^{\lambda x}, \end{cases}$
$\Leftrightarrow$	$y_o(x) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}$ ;	
$\Delta < 0$	soluzioni $\alpha \pm i\beta \in \mathbb{C}$ , $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$	$\begin{cases} y_{o1}(x) = e^{\alpha x} \cos(\beta x), \\ y_{o2}(x) = e^{\alpha x} \sin(\beta x), \end{cases}$
$\Leftrightarrow$	$y_o(x) = e^{\alpha x} [C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)]$ .	

Ricordiamo anche che, nel caso delle equazioni a coefficienti costanti e per particolari funzioni continue  $f$ , una soluzione particolare dell'equazione completa si può determinare evitando tutta la

procedura della variazione delle costanti, ed utilizzando, invece, il *metodo di somiglianza*:

- $f(x) = \alpha_0 x^r + \alpha_1 x^{r-1} + \dots + \alpha_{r-1} x + \alpha_r$

polinomio di grado  $r$

$\Rightarrow$

$$y_p(x) = p_0 x^r + p_1 x^{r-1} + \dots + p_{r-1} x + p_r$$

polinomio di grado  $s = r + 2 - m$  dove  $m = 0, 1, 2$  è il più grande indice t.c.  $a_m \neq 0$  nell'equazione differenziale;

- $f(x) = e^{\lambda x} [\alpha_0 x^r + \alpha_1 x^{r-1} + \dots + \alpha_{r-1} x + \alpha_r]$

$\Rightarrow$

$$y_p(x) = e^{\lambda x} x^m [p_0 x^r + p_1 x^{r-1} + \dots + p_{r-1} x + p_r]$$

dove  $m = 0$ , se  $A$  non è soluzione dell'equazione caratteristica,  $m = 1, 2$ , se tale è la molteplicità con cui  $A$  è soluzione dell'equazione caratteristica.

- $f(x) = e^{\lambda x} [k_1 \cos(Bx) + k_2 \sin(Bx)]$

$\begin{cases} A = 0 & \text{funzione trigonometrica pura,} \\ B = 0 & \text{funzione esponenziale pura,} \end{cases}$

$\Rightarrow$

$$y_p(x) = \begin{cases} e^{\lambda x} [p_1 \cos(Bx) + p_2 \sin(Bx)] \\ x e^{\lambda x} [p_1 \cos(Bx) + p_2 \sin(Bx)] \end{cases}$$

$\begin{cases} \text{se } A + iB \text{ non è soluzione} \\ \text{dell'equazione caratteristica.} \\ \text{se } A + iB \text{ è soluzione dell'equazione} \\ \text{caratteristica;} \end{cases}$

Restano da determinare i coefficienti  $p_i$ , che si ricavano come soluzioni dell'equazione ottenuta inserendo l'espressione trovata per  $y_p(x)$  nell'equazione differenziale completa.

Nel caso in cui  $f$  risulti essere la somma di più termini  $f_1 + f_2 + \dots$ , si può ricorrere al *principio di sovrapposizione*, cioè si determina una soluzione particolare relativa all'equazione completa con secondo membro dato di volta in volta da ciascuna  $f_i$ , separatamente (cioè:  $a_0 y''(x) + a_1 y'(x) + a_2 y(x) = f_i(x)$ ); una soluzione particolare relativa al secondo membro pari ad  $f$  si otterrà sommando le soluzioni così trovate. Questo principio può risultare molto utile proprio quando tutte o almeno alcune delle  $f_i$  si possono determinare con il metodo di somiglianza.

• Equazioni di Eulero: si tratta di equazioni lineari a coefficienti non costanti di forma particolare, che si possono ricondurre ad equazioni a coefficienti costanti. Più precisamente, un'equazione di Eulero del secondo ordine è della forma:

$$a_0 x^2 y''(x) + a_1 x y'(x) + a_2 y(x) = f(x).$$

Non è difficile verificare che, con la sostituzione di variabile  $x = e^t$ , nel caso si cerchino soluzioni per  $x > 0$ , la precedente equazione si trasforma nell'equazione lineare data da

$$(6.1) \quad a_0 \tilde{y}''(t) + (a_1 - a_0) \tilde{y}'(t) + a_2 \tilde{y}(t) = \tilde{f}(t),$$