Corso di Laurea in Ingegneria per l'Ambiente e il Territorio - sede distaccata di Latina
Corso di Analisi Matematica (1° modulo) - a.a. 2003/04

APPUNTI INTEGRATIVI SUI CRITERI DI CONVERGENZA PER LE SERIE

Serie a termini positivi

Criterio del rapporto generalizzato

Sia $\sum a_n$ una serie a termini positivi ($a_n > 0$). Se esiste un numero λ, $0 < \lambda < 1$, per cui risulti definitivamente

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \lambda,$$

allora la serie è convergente. Se definitivamente risulta

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1,$$

la serie diverge.

Criterio della radice generalizzato

Sia $\sum a_n$ una serie a termini non negativi ($a_n \geq 0$). Se esiste un numero λ, $0 \leq \lambda < 1$, per cui risulti definitivamente

$$\sqrt[n]{a_n} \leq \lambda \ ,$$

allora la serie è convergente. Se definitivamente risulta

$$\sqrt[n]{a_n} \geq 1 \ ,$$

la serie diverge.

Osservazione 0.1. I criteri del rapporto e della radice si ottengono dai suddetti criteri passando al limite per $n \to \infty$. Questi criteri generalizzati permettono di affermare che, se la successione dei rapporti o delle radici tende al valore 1 *dall'alto*, cioè con valori maggiori di 1, la serie diverge. Se però il limite 1 viene raggiunto *dal basso*, cioè con valori minori di 1, allora neanche i criteri generalizzati sono in grado di fornire una risposta sul carattere della serie, che va quindi studiata con qualche altro strumento. □

Osservazione 0.2. Si osservi che, in base al Teorema di Cesàro, qualora esista il limite della successione dei rapporti, il limite della successione delle radici risulterà uguale al primo. Pertanto, quando il criterio del rapporto fornisce un limite pari a 1, anche il criterio della radice fornirà lo stesso limite. Il criterio della radice fornisce informazioni in più rispetto a quello del rapporto solo nel caso in cui il limite della succcessione dei rapporti non esista. □

Esempio 0.3. Consideriamo la serie a termini positivi $\sum a_k$, con

$$a_k = \left(\frac{1}{2}\right)^k \left[2 + (-1)^k\right] = \begin{cases} 3\left(\frac{1}{2}\right)^k & \text{se } k \text{ è pari} \\ \left(\frac{1}{2}\right)^k & \text{se } k \text{ è dispari} \end{cases}$$

e studiamola per mezzo del criterio del rapporto:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{3\left(\frac{1}{2}\right)^n} & \text{se } n \text{ è pari} \\ \frac{3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1}{2}\right)^n} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{6} & \text{se } n \text{ è pari} \\ \frac{3}{2} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}.$$

Pertanto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} \frac{1}{6} & \text{se } n \text{ è pari} \\ \frac{3}{2} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

e, conseguentemente, non esiste il limite della successione dei rapporti. D'altra parte,

$$\sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} \sqrt[n]{3\left(\frac{1}{2}\right)^n} & \text{se } n \text{ è pari} \\ \sqrt[n]{\left(\frac{1}{2}\right)^n} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases} = \begin{cases} \sqrt[n]{3}\left(\frac{1}{2}\right) & \text{se } n \text{ è pari} \\ \left(\frac{1}{2}\right) & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

da cui

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2} < 1$$

e quindi la serie converge, in base al criterio della radice. □

Criterio di condensazione

Sia $\{a_n\}$ una successione a termini positivi e decrescenti. Allora le due serie

$$\sum a_n \quad \text{e} \quad \sum 2^n a_{2^n}$$

hanno lo stesso carattere (cioè sono ambedue convergenti o ambedue divergenti).

Criterio integrale di Cauchy

Sia $f(x)$ una funzione positiva e decrescente per $x \geq N \in I\!N$ e tale che $f(n) = a_n$ per ogni intero positivo $n \geq N$. Allora la serie $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ e l'integrale $\int_N^{\infty} f(x)\,dx$ hanno lo stesso carattere.

Osservazione 0.4. L'idea fondamentale su cui si basa il criterio integrale è quella di confrontare le somme con gli integrali, osservando che ogni termine di una serie a termini positivi può essere interpretato geometricamente come l'area di un rettangolo di base unitaria e di altezza pari ad a_n. La dimostrazione di questo criterio si basa sulla seguente catena di diseguaglianze, valida per ogni $n > N$:

$$\int_{N+1}^{n+1} f(x)\,dx \leq \sum_{k=N+1}^{n} a_k \leq \int_N^n f(x)\,dx \leq \sum_{k=N}^{n-1} a_k \tag{0.1}$$

e dall'applicazione del Teorema dei Carabinieri in un caso ai primi tre membri e nell'altro agli ultimi tre, per $n \to \infty$. □

Esempio 0.5. Stabilire il carattere della serie

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \log k} \ .$$

Risolviamo l'esercizio per mezzo del criterio di condensazione, studiando la serie

$$\sum_{k=2}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^k \log(2^k)} \ = \ \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \log 2} \ = \ \frac{1}{\log 2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k}$$

che, ovviamente, diverge, trattandosi della serie armonica. Conseguentemente anche la serie di partenza diverge.

La serie può anche essere studiata per mezzo del criterio integrale di Cauchy, studiando l'integrale

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x \log x} \, dx \ = \ \log(\log x) \Big|_2^{\infty} = \lim_{x \to \infty} (\log(\log x) - \log(\log 2)) = +\infty \ .$$

Segue che anche la serie diverge. □

Esempio 0.6. Stabilire il carattere della **serie armonica generalizzata** :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}} \quad ; \quad \alpha > 0. \tag{0.2}$$

Tramite il criterio di condensazione stabiliamo che la serie ha lo stesso carattere della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{(2^k)^{\alpha}} \ = \ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2^k)^{\alpha-1}} \ = \ \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}} \right)^k \ .$$

Trattandosi di una serie geometrica, con ragione positiva, essa converge per ogni valore della ragione minore di 1, vale a dire per ogni valore di $\alpha > 1$ e diverge per ogni valore della ragione maggiore o uguale a 1, cioè per ogni valore di $\alpha \leq 1$.

Si arriva allo stesso risultato tramite il criterio integrale, notando che la serie va confrontata con l'integrale

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} \, dx$$

che, come ben noto, converge per ogni valore di $\alpha > 1$ e diverge per ogni valore di $\alpha \leq 1$. □

Il criterio integrale di Cauchy riveste un ruolo molto importante anche per stabilire la velocità con cui una serie diverge. Infatti, in base alla catena di diseguaglianze (0.1), si può concludere che, qualora sia possibile esprimere in forma analitica una primitiva $F(x)$ della funzione $f(x)$, allora

$$\sum_{k=N}^{n} a_k \ \sim \ F(n) \ .$$

Conseguentemente,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \ \sim \ \log n \ ;$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{(1-\alpha)}\, n^{1-\alpha} \quad ; \quad \alpha < 1 \tag{0.3}$$

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \log k} \sim \log(\log n) \ ;$$

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \log k \log(\log k)} \sim \log[\log(\log n)] \ ;$$

e così via.

Questi ordini di infinito fanno comprendere come alcune successioni delle somme parziali, pur divergenti, crescono con estrema lentezza. Ad esempio, come osservato in **[5]**, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1,01}}$ è tale che occorrono circa 10^{200} termini affinché la somma parziale sia maggiore di 100 o, ancora, la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log(n)}$ è tale che, per oltrepassare 10 con le somme parziali, dobbiamo sommare circa $15 \cdot 10^{4320}$ termini! Dato il numero enorme di addendi necessari, chiunque affidasse al computer il compito di studiare il carattere della serie, senza alcun ausilio teorico, ne dedurrebbe, erroneamente, che la serie converge.

La diseguaglianza (0.1) permette, altresì, di determinare facilmente un minorante e un maggiorante della serie (0.3), quando $\alpha > 1$: da

$$\int_2^{n+1} \frac{1}{x^\alpha}\, dx \le \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \le \int_1^{n} \frac{1}{x^\alpha}\, dx$$

segue, svolgendo i due integrali,

$$\frac{1}{(1-\alpha)} \left[\frac{1}{(n+1)^{(\alpha-1)}} - \frac{1}{2^{(\alpha-1)}} \right] \le \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \le \frac{1}{(1-\alpha)} \left[\frac{1}{n^{(\alpha-1)}} - 1 \right]$$

da cui, passando al limite per $n \to \infty$ e ricordando che $\alpha > 1$,

$$\frac{1}{(\alpha-1)} \left[\frac{1}{2^{(\alpha-1)}} \right] \le \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \le \frac{1}{(\alpha-1)} \ .$$

Ad esempio, per $\alpha = 1,01$, aggiungendo il primo addendo della serie, si ha

$$\frac{100}{2^{(0,01)}} + 1 \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \le 101 \ .$$

La diseguaglianza (0.1) permette, inoltre, di determinare con ottima approssimazione la differenza

$$\sum_{k=N}^{n} f(k) - F(n) \ .$$

Il valore del limite

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log(n) \ ,$$

ad esempio, è noto con il nome di *costante di Eulero - Mascheroni* ed è generalmente indicato con γ:

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log(n) \right) = 0,57712156649015328606 0......$$

che, con π ed e, è una delle costanti più importanti della Matematica. A tutt'oggi, non è stato ancora dimostrato se γ sia un numero razionale o irrazionale.

Va infine sottolineato il fatto che il criterio integrale **non** asserisce che la somma della serie è uguale al valore dell'integrale. Piuttosto, la catena di diseguaglianze (0.1) permette di fornire una stima, che può essere resa accurata quanto si vuole, della somma della serie, a partire dai valori dell'integrale maggiorante e minorante, come mostra il prossimo

Esempio 0.7. Esaminiamo la serie armonica generalizzata di esponente 2:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \ .$$

Dalla (0.1) segue che

$$\int_2^{n+1} \frac{1}{x^2}\, dx \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq \int_1^{n} \frac{1}{x^2}\, dx \ ,$$

da cui

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} \ \leq \ \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \ \leq \ 1 - \frac{1}{n} \ .$$

Passando al limite per $n \to \infty$ e sommando ai tre membri della catena di diseguaglianze il valore 1, si arriva a

$$\frac{3}{2} \ \leq \ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \ \leq \ 2 \ .$$

Applicando ancora la diseguaglianza (0.1) nel seguente modo

$$\int_3^{n+1} \frac{1}{x^2}\, dx \ \leq \ \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k^2} \ \leq \ \int_2^{n} \frac{1}{x^2}\, dx \ ,$$

e, procedendo con passaggi del tutto simili ai precedenti, si arriva alla seguente stima per il valore della somma della serie:

$$\frac{19}{12} \ \leq \ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} \ \leq \ \frac{7}{4} \ ,$$

che risulta più accurata della precedente.

Dalla teoria delle serie di Fourier è possibile risalire al reale valore della somma di tale serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \ ,$$

valore che, effettivamente, appartiene all'intervallo [19/12 , 7/4].

Aumentando il valore iniziale N nella diseguaglianza (0.1), la stima migliora ulteriormente. $\square$

Esempio 0.8. Stabilire il carattere della **serie di Abel**

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p(\log n)^q} \quad ; \quad p, q \in I\!R \tag{0.4}$$

per mezzo del criterio di condensazione.

Risposta: in base al criterio di condensazione, la serie in esame ha lo stesso carattere della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{(2^n)^p\,[\log(2^n)]^q} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2^n)^{(1-p)}}{n^q\,(\log 2)^q} = \frac{1}{(\log 2)^q} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\left[2^{(1-p)}\right]^n}{n^q} \,. \tag{0.5}$$

Quest'ultima serie è del tipo $\sum \frac{a^n}{n^q}$, di cui si conosce il carattere, al variare di $a > 0$ e di $q \in I\!R$. Come ulteriore esercizio, la studiamo in ogni caso, ad esempio per mezzo del criterio del rapporto:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\left[2^{(1-p)}\right]^{(n+1)}}{(n+1)^q} \cdot \frac{n^q}{\left[2^{(1-p)}\right]^n} \,,$$

da cui

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = 2^{(1-p)} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^q = 2^{1-p} = \begin{cases} < 1 & \text{se } p > 1 \\ > 1 & \text{se } p < 1 \\ = 1 & \text{se } p = 1 \end{cases} \,.$$

Il caso $p = 1$ può essere studiato direttamente; la serie (0.5) diventa

$$\frac{1}{(\log 2)^q} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^q} \,,$$

cioè la serie armonica generalizzata. Pertanto, la serie di Abel (0.4), avendo lo stesso carattere della serie (0.5), è tale che:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p(\log n)^q} \qquad \begin{cases} \forall\; p > 1 \;;\; \forall\; q \in I\!R & \text{converge ;} \\ \forall\; p < 1 \;;\; \forall\; q \in I\!R & \text{diverge ;} \\ \text{se } p = 1 \;;\; \forall\; q > 1 & \text{converge ;} \\ \text{se } p = 1 \;;\; \forall\; q \le 1 & \text{diverge .} \end{cases}$$

□

Esempio 0.9. Stabilire il carattere della **serie di Abel**

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^q} \quad ; \quad q \in I\!R$$

per mezzo del criterio integrale.

In corrispondenza dei valori di q per i quali la serie diverge, stabilire la velocità di divergenza della serie stessa, cioè il suo carattere asintotico.

Risposta: la serie converge $\forall q > 1$ e diverge $\forall q \le 1$ e

$$\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n(\log n)^q} \sim \int_2^N \frac{1}{x(logx)^q}\, dx \sim \frac{1}{1-q}\,(\log N)^{(1-q)} \,.$$

□

Serie a termini di segno alternante

Criterio di Leibniz

Sia data la serie $\sum (-1)^n \; a_n$, con $a_n > 0, \forall n \in I\!N$. Se la successione a_n è

a) decrescente ($a_n \;\geq\; a_{n+1} \quad \forall n \in I\!N$);

b) infinitesima ($\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$)

allora la serie è convergente e per il suo resto n-esimo R_n si ha

$$|R_n| = |S - S_n| \leq a_{n+1} \; .$$

Osservazione 0.10. L'ultima diseguaglianza è decisamente utile per stabilire quanti termini occorrano affinché il valore della somma parziale ottenuta differisca dal reale valore della somma della serie per una quantità inferiore a un errore determinato *a priori*. □

Esempio 0.11. Stabilire quanti termini occorra sommare affinché la somma parziale n-esima della serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \; \frac{1}{k!}$$

differisca dal valore reale della serie per un errore $\leq 10^{-8}$.

Si può facilmente verificare, tramite il criterio di Leibniz, che la serie in oggetto converge.

Affinché l'errore commesso nel calcolo della somma parziale n-esima sia minore di 10^{-8}, occorrerà individuare il valore di n tale che

$$|S - S_n| \leq \frac{1}{(n+1)!} \;\; \leq 10^{-8} \; ,$$

ovvero tale che

$$(n+1)! \;\; \geq \;\; 10^8 \; .$$

E' semplice verificare che il primo valore del fattoriale che sia maggiore di 10^8 è 12! ,per cui il valore di n cercato è 11 .

Si osservi che la serie in oggetto è una serie esponenziale, di ragione -1, pertanto la serie converge al valore $\frac{1}{e}$. La somma parziale undicesima fornisce, dunque, un valore di $\frac{1}{e}$ approssimato all'ottava cifra decimale. Infatti:

$$S_{11} \;\; = \;\; \sum_{k=0}^{11} \frac{(-1)^k}{k!} \;\; \sim \;\; 0.367879439 \quad ; \quad \frac{1}{e} \;\; \sim \;\; 0.367879441 \; .$$

□

Riferimenti bibliografici

[1] R.A. Adams, *Calcolo Differenziale 1*, Ambrosiana.

[2] A. Avantaggiati, *Analisi Matematica 1*, Ambrosiana.

[3] A. Ghizzetti, F. Rosati, *Analisi Matematica; volume 1*, Masson.

[4] E. Giusti, *Analisi Matematica 1*, Boringhieri.

[5] S. Invernizzi, *Didattica delle serie a termini reali: e, γ ed altre costanti di Eulero*, Archimede, vol. 45, n.1, 1994, pp. 30 – 39.

[6] C.D. Pagani, S. Salsa, *Analisi Matematica; volume 1*, Masson.

[7] G.F. Simmons, M. Abate, *Calcolo Differenziale e Integrale*, McGraw Hill.