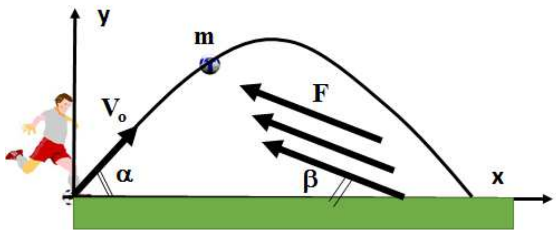
FISICA

A.A. 2015-2016

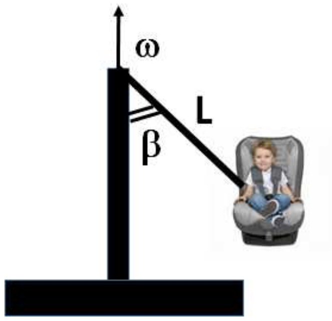
Ingegneria Gestionale

Esonero A del 20 Aprile 2016

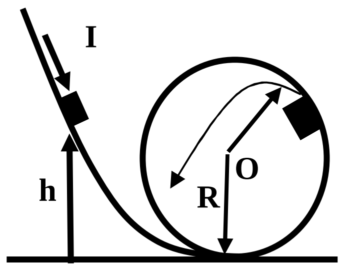
1. In una giornata ventosa un ragazzo lancia un pallone con una velocità V_o=10 m/s con una inclinazione α=40° rispetto all'orizzontale. Durante tutto il tempo di volo il pallone è soggetto ad una folata di vento costante di intensità F=2N inclinato di un angolo β=20° rispetto all'orizzontale (come in figura). Il pallone con grande sorpresa ricade nel punto in cui è stato calciato. Determinare la massa del pallone da questa inconsueta osservazione. **Facoltativo.** Determinare il tempo di volo del pallone.



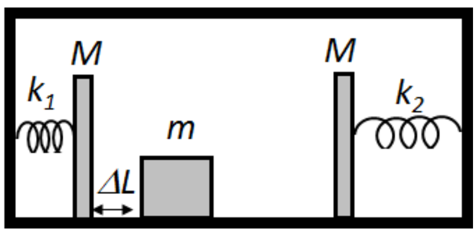
2. Una giostra ruota uniformemente intorno ad un asse verticale. Un bambino seduto su di un seggiolino di massa complessiva **m=20kg** ruota intorno all'albero rotante per il tramite di una fune di massa trascurabile e di lunghezza **L=15 m**. Sapendo che la fune ha un carico di rottura $\mathbf{T_{max}=250N}$ calcolare il periodo di rotazione minimo e l'angolo di inclinazione β_{max} (rispetto alla verticale) al di sopra del quale avviene la rottura.



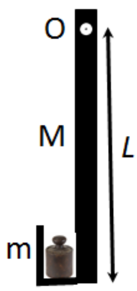
3. In un Luna Park un carrello di massa **m=20kg** è libero di muoversi su una guida metallica liscia che si raccorda con un tratto perfettamente circolare liscio di raggio **R=2m** come indicato in figura. Sapendo che il carrello viene lasciato scivolare erroneamente dalla quota **h=1.5m** (a velocità iniziale nulla) in modo da prendere la velocità necessaria per effettuare il giro della morte, evidenziare il problema che si manifesta ed indicare l'entità dell'impulso **I** minimo che occorre imprimere inizialmente per completare il giro. **Facoltativo** in assenza di tale impulso calcolare a quale quota da terra il carrello si stacca dalla guida circolare.



4. Un sistema a molla di costante elastica $\mathbf{k_1}$=25N/m collegata ad un pistone di massa M=5kg, inizialmente compresso di una quantità ΔL viene lasciato libero in modo da urtare elasticamente un blocco m fermo sulla posizione di equilibrio della molla. Il blocco scivola senza attrito verso un secondo sistema a molla in equilibrio di costante elastica $\mathbf{k_2}$=16N/m e con un identico pistone M. A seguito del secondo urto elastico si riscontra che la massima compressione della seconda molla ΔL_2 è uguale a quella della prima molla. Determinare i possibili valori per la massa del blocco m che permettono questa condizione.



5 Un pendolo composto è formato da un'asta rigida omogenea di massa M=4kg, di lunghezza L, libera di ruotare intorno al cardine O. In queste condizioni il periodo delle piccole oscillazioni vale T=2s. In un secondo esperimento all'estremo della sbarra viene alloggiata una piccola massa m. In queste nuove condizioni il periodo delle piccole oscillazioni si incrementa lievemente e diviene T'=2.1 s. Determinare il valore della massa aggiuntiva m.



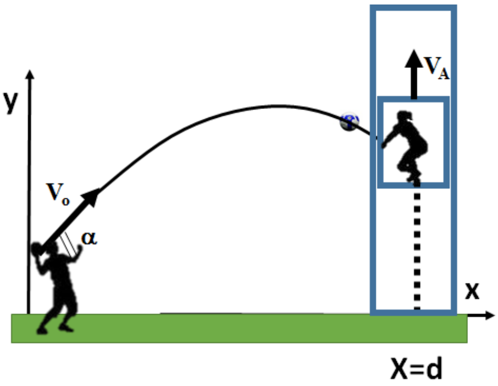
FISICA

A.A. 2015-2016

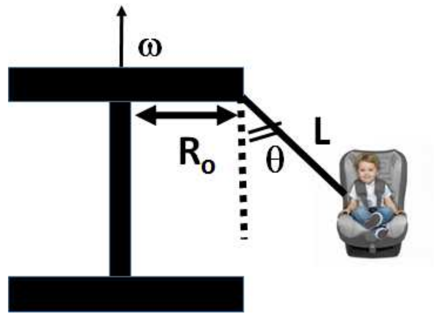
Ingegneria Gestionale

Esonero B del 20 Aprile 2016

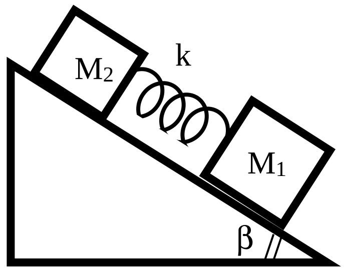
1. Un operaio, che si trova al piano terra, deve lanciare un oggetto ad un collega che si trova nella cabina aperta di un ascensore di una gru, in salita alla velocità costante V_A=2 m/s. Sapendo che nell'istante del lancio i due operai sono entrambi al piano terra alla distanza d=10m e che il lancio avviene ad una velocità iniziale V_o inclinata di angolo α=20° rispetto all'orizzontale (come in figura) proprio nell'istante in cui l'ascensore prende a muoversi, determinare la velocità del lancio V_o necessaria affinchè l'oggetto possa essere preso al volo dal collega.



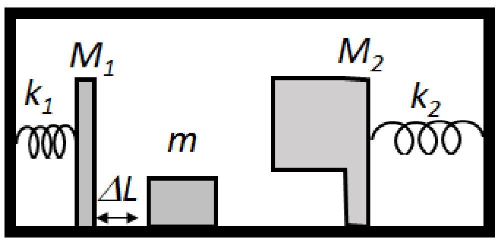
2. Una giostra ruota uniformemente intorno ad un asse verticale.
Un bambino seduto su di un seggiolino di massa complessiva **m=25kg** ruota intorno all'albero rotante per il tramite di una fune di massa trascurabile e di lunghezza **L=15 m**. La fune è incardinata ad un estremo anch'esso rotante ad una distanza **R_o=10m** dall'asse di rotazione. Sapendo che la fune si incline di un angolo θ=30° (rispetto alla verticale) calcolare il periodo di rotazione e calcolare quanto tempo impieghi la giostra a raggiungere questa condizione ipotizzando un moto circolare con acc. angolare **α=0.01 rad/s^2.**



3. Due corpi di massa **M_1=6kg** ed **M_2=4kg** scivolano lungo un piano scabro inclinato di **β=40°** rispetto ad un piano orizzontale. Essi sono uniti tra loro da una molla di massa trascurabile e di costante elastica **k=35 N/m**. Ipotizzando che le due masse scendano a valle con identica accelerazione e senza visibili oscillazioni, e sapendo che la molla rimane compressa di **ΔL=5cm** e che il coefficiente di attrito dinamico del corpo 1 vale **μ_{d1}=0.20**, calcolare il coefficiente di attrito dinamico del corpo 2 e l'accelerazione comune cui sono sottoposti i due corpi.

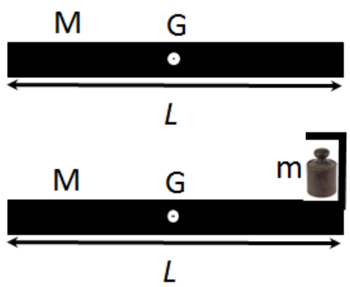


4. Un sistema a molla di costante elastica **k_1**=2N/m collegata ad un pistone di massa M_1=3kg, inizialmente compresso di una quantità ΔL=5cm viene lasciato libero in modo da urtare elasticamente un blocco m=1kg fermo sulla posizione di equilibrio della molla. Il blocco scivola senza attrito verso un secondo sistema a molla in equilibrio di costante elastica **k_2**=4N/m e con un pistone M_2=4kg con un incavo che incapsula il blocco m.



A seguito del secondo urto perfettamente anelastico determinare la massima compressione della seconda molla ΔL_2, il periodo di oscillazione e la perdita di energia a causa dell'urto.

5. Un'asta rigida omogenea di massa M=5kg, di lunghezza L=80cm è vincolata a ruotare intorno al cardine coincidente con il baricentro G. L'asta è posizionata ferma in orizzontale ed in queste condizioni rimane in quiete. In una sacca all'estremità dell'asta viene poi alloggiata una massa m=3kg. Il sistema tende quindi a ruotare. Determinare in quale posizione raggiunge la massima velocità angolare. **Facoltativo:** quale sarà la massima velocità raggiunta della massa m incapsulata nell'asta.



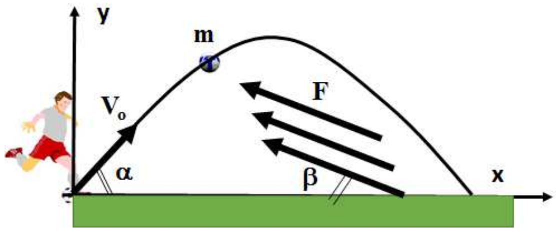
FISICA

A.A. 2015-2016

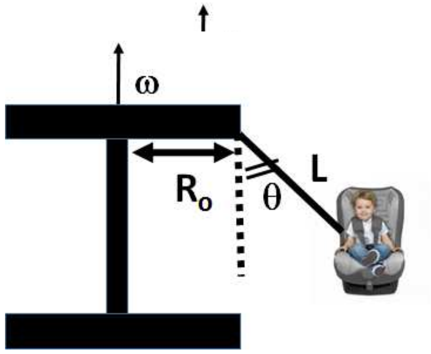
Ingegneria Gestionale

Esonero C del 20 Aprile 2016

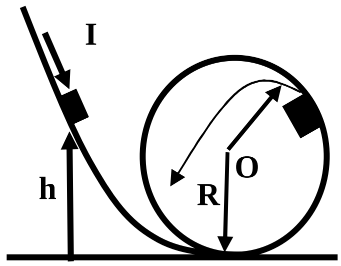
1. In una giornata ventosa un ragazzo lancia un pallone con una velocità V_o=10 m/s con una inclinazione α=40° rispetto all'orizzontale. Durante tutto il tempo di volo il pallone è soggetto ad una folata di vento costante di intensità F=2N inclinato di un angolo β=20° rispetto all'orizzontale (come in figura). Il pallone con grande sorpresa ricade nel punto in cui è stato calciato. Determinare la massa del pallone da questa inconsueta osservazione. **Facoltativo.** Determinare il tempo di volo del pallone.



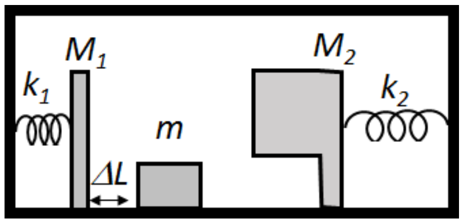
2. Una giostra ruota uniformemente intorno ad un asse verticale.
Un bambino seduto su di un seggiolino di massa complessiva **m=25kg** ruota intorno all'albero rotante per il tramite di una fune di massa trascurabile e di lunghezza **L=15 m**. La fune è incardinata ad un estremo anch'esso rotante ad una distanza **R_o=10m** dall'asse di rotazione. Sapendo che la fune si inclina di un angolo θ=30° (rispetto alla verticale) calcolare il periodo di rotazione e calcolare quanto tempo impieghi la giostra a raggiungere questa condizione ipotizzando un moto circolare con acc. angolare **α=0.01 rad/s^2.**



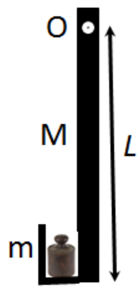
3. In un Luna Park un carrello di massa **m=20kg** è libero di muoversi su una guida metallica liscia che si raccorda con un tratto perfettamente circolare liscio di raggio **R=2m** come indicato in figura. Sapendo che il carrello viene lasciato scivolare erroneamente dalla quota **h=1.5m** (a velocità iniziale nulla) in modo da prendere la velocità necessaria per effettuare il giro della morte, evidenziare il problema che si manifesta ed indicare l'entità dell'impulso **I** minimo che occorre imprimere inizialmente per completare il giro. **Facoltativo** in assenza di tale impulso calcolare a quale quota da terra il carrello si stacca dalla guida circolare.



4. Un sistema a molla di costante elastica **k_1**=2N/m collegata ad un pistone di massa M_1=3kg, inizialmente compresso di una quantità ΔL=5cm viene lasciato libero in modo da urtare elasticamente un blocco m=1kg fermo sulla posizione di equilibrio della molla. Il blocco scivola senza attrito verso un secondo sistema a molla in equilibrio di costante elastica **k_2**=4N/m e con un pistone M_2=4kg con un incavo che incapsula il blocco m. A seguito del secondo urto perfettamente anelastico determinare la massima compressione della seconda molla ΔL_2, il periodo di oscillazione e la perdita di energia a causa dell'urto.



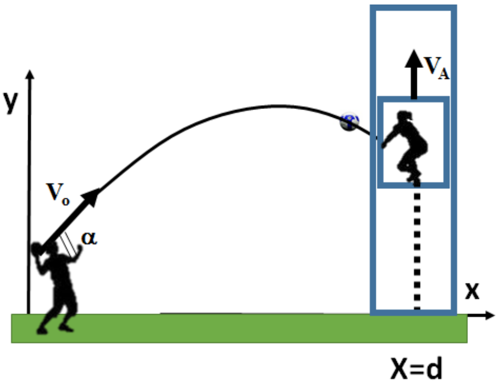
5 Un pendolo composto è formato da un'asta rigida omogenea di massa M=4kg, di lunghezza L, libera di ruotare intorno al cardine O. In queste condizioni il periodo delle piccole oscillazioni vale T=2s. In un secondo esperimento all'estremo della sbarra viene alloggiata una piccola massa m. In queste nuove condizioni il periodo delle piccole oscillazioni si incrementa lievemente e diviene T'=2.1 s. Determinare il valore della massa aggiuntiva m.



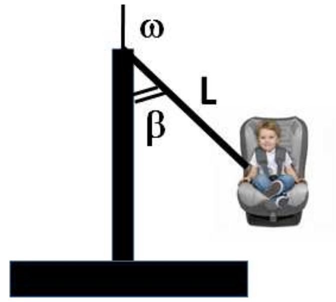
FISICA

A.A. 2015-2016
Ingegneria Gestionale
Esonero D del 20 Aprile 2016

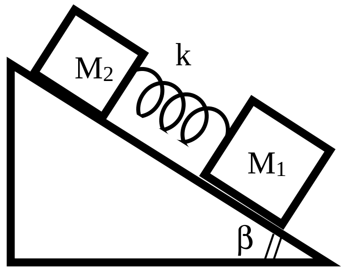
1. Un operaio, che si trova al piano terra, deve lanciare un oggetto ad un collega che si trova nella cabina aperta di un ascensore di una gru, in salita alla velocità costante V_A=2 m/s. Sapendo che nell'istante del lancio i due operai sono entrambi al piano terra alla distanza d=10m e che il lancio avviene ad una velocità iniziale V_o inclinata di angolo α=20° rispetto all'orizzontale (come in figura) proprio nell'istante in cui l'ascensore prende a muoversi, determinare la velocità del lancio V_o necessaria affinchè l'oggetto possa essere preso al volo dal collega.



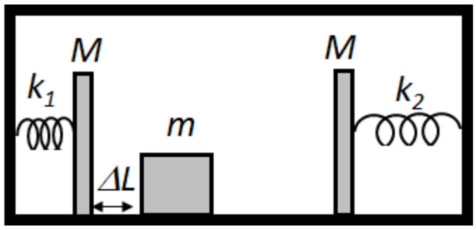
2. Una giostra ruota uniformemente intorno ad un asse verticale. Un bambino seduto su di un seggiolino di massa complessiva **m=20kg** ruota intorno all'albero rotante per il tramite di una fune di massa trascurabile e di lunghezza **L=15 m**. Sapendo che la fune ha un carico di rottura $\mathbf{T_{max}}$**=250N** calcolare il periodo di rotazione minimo e l'angolo di inclinazione $\boldsymbol{\beta_{max}}$ (rispetto alla verticale) al di sopra del quale avviene la rottura.



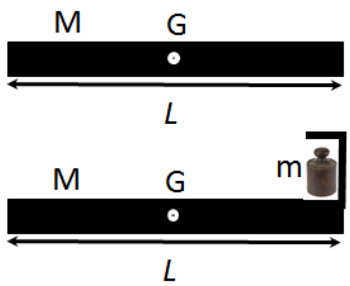
3. Due corpi di massa $\mathbf{M_1}$**=6kg** ed $\mathbf{M_2}$**=4kg** scivolano lungo un piano scabro inclinato di $\boldsymbol{\beta}$**=40°** rispetto ad un piano orizzontale. Essi sono uniti tra loro da una molla di massa trascurabile e di costante elastica **k=35 N/m**. Ipotizzando che le due masse scendano a valle con identica accelerazione e senza visibili oscillazioni, e sapendo che la molla rimane compressa di $\boldsymbol{\Delta}$**L=5cm** e che il coefficiente di attrito dinamico del corpo 1 vale $\boldsymbol{\mu_{d1}}$**=0.20**, calcolare il coefficiente di attrito dinamico del corpo 2 e l'accelerazione comune cui sono sottoposti i due corpi.



4. Un sistema a molla di costante elastica $\mathbf{k_1}$=25N/m collegata ad un pistone di massa M=5kg, inizialmente compresso di una quantità ΔL viene lasciato libero in modo da urtare elasticamente un blocco m fermo sulla posizione di equilibrio della molla. Il blocco scivola senza attrito verso un secondo sistema a molla in equilibrio di costante elastica $\mathbf{k_2}$=16N/m e con un identico pistone M. A seguito del secondo urto elastico si riscontra che la massima compressione della seconda molla ΔL_2 è uguale a quella della prima molla. Determinare i possibili valori per la massa del blocco m che permettono questa condizione.



5. Un'asta rigida omogenea di massa M=5kg, di lunghezza L=80cm è vincolata a ruotare intorno al cardine coincidente con il baricentro G. L'asta è posizionata ferma in orizzontale ed in queste condizioni rimane in quiete. In una sacca all'estremità dell'asta viene poi alloggiata una massa m=3kg. Il sistema tende quindi a ruotare. Determinare in quale posizione raggiunge la massima velocità angolare. **Facoltativo:** quale sarà la massima velocità raggiunta della massa m incapsulata nell'asta.



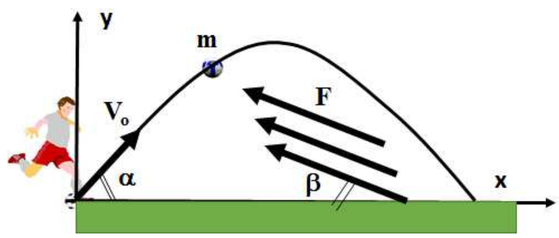
FISICA

A.A. 2015-2016

Ingegneria Gestionale

Soluzioni Esonero del 20 Aprile 2016

1AC. In una giornata ventosa un ragazzo lancia un pallone con una velocità V_o=10 m/s con una inclinazione α=40° rispetto all'orizzontale. Durante tutto il tempo di volo il pallone è soggetto ad una folata di vento costante di intensità F=2N inclinato di un angolo β=20° rispetto all'orizzontale (come in figura). Il pallone con grande sorpresa ricade nel punto in cui è stato calciato. Determinare la massa del pallone da questa inconsueta osservazione. **Facoltativo.** Determinare il tempo di volo del pallone.

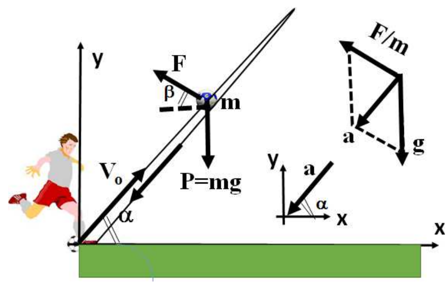


1AC. Metodo rapido. Accelerazione del pallone. A causa della folata di vento il pallone subisce la somma della forza peso P=mg e quella del vento F. Durante il volo ciò causa una accelerazione diversa di quella attesa di gravità.

$m\vec{g} + \vec{F} = m\vec{a}$ da cui $\vec{a} = \vec{g} + \vec{F}/m$ con componenti $\begin{cases} x) & a_x = -(F/m)\cos\beta \\ y) & a_y = -g + (F/m)\sin\beta \end{cases}$

Il fatto che dopo il lancio il pallone ritorni al punto di partenza indica che l'accelerazione abbai stessa direzione ma verso opposto alla velocità di lancio, provocando così una degenerazione della parabola in una retta. Gli angoli della velocità e della accelerazione rispetto all'orizzontale devono quindi coincidere (α). Ciò comporta la condizione

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{a_y}{a_x} = \frac{-g + (F/m)\sin\beta}{-(F/m)\cos\beta} = \frac{mg - F\sin\beta}{F\cos\beta}$$



ossia $F\cos\beta\sin\alpha = mg\cos\alpha - F\sin\beta\cos\alpha$

$$F(\cos\beta\sin\alpha + \sin\beta\cos\alpha) = F\sin(\alpha+\beta) = mg\cos\alpha$$

da cui $m = \dfrac{F\sin(\alpha+\beta)}{g\cos\alpha} = \mathbf{231\ g}$

Metodo rigoroso mediante le equazioni della cinematica

Lungo l'asse x $\begin{cases} x(t) = v_o\cos(\alpha)\cdot t - (F/m)\cos\beta\cdot t^2/2 \\ v_x(t) = v_o\cos(\alpha) - (F/m)\cos\beta\cdot t \\ a_x = -(F/m)\cos\beta \end{cases}$,

e lungo l'asse y $\begin{cases} y(t) = v_o\sin(\alpha)\cdot t - [g - (F/m)\sin\beta]\cdot t^2/2 \\ v_y(t) = v_o\sin(\alpha) - [g - (F/m)\sin\beta]\cdot t \\ a_y = -g + (F/m)\sin\beta \end{cases}$

FACOLTATIVO: Tempo di volo $y(t) = v_o \sin(\alpha)\cdot t - [g-(F/m)\sin\beta]\cdot t^2/2 = 0$

da cui $t = \dfrac{2v_o \sin(\alpha)}{g-(F/m)\sin\beta} =$ **1.88 s** (calcolata dopo aver ricavato m**)**

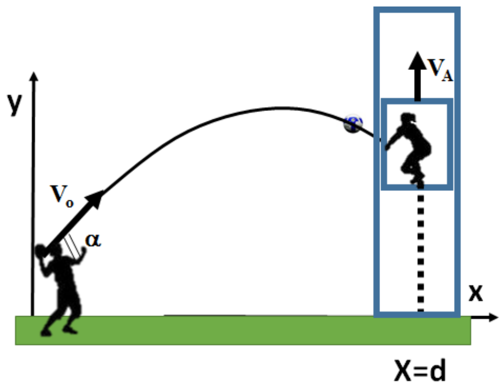
Condizione per la ricaduta nel punto di partenza

$x(t) = v_o \cos(\alpha)\cdot t - (F/m)\cos\beta\cdot t^2/2 = 0$ e dividendo per t $v_o \cos(\alpha) - (F/m)\cos\beta\cdot t/2 = 0$

$v_o \cos(\alpha) - v_o \sin\alpha \dfrac{(F/m)\cos\beta}{g-(F/m)\sin\beta} = 0$ semplificando v_o , $[g-(F/m)\sin\beta]\cos(\alpha) - (F/m)\cos\beta\sin\alpha = 0$

$g\cos\alpha - (F/m)(\sin\beta\cos\alpha + \cos\beta\sin\alpha) = 0$ da cui $m = \dfrac{F\sin(\alpha+\beta)}{g\cos\alpha} =$ **231 g**

1BD. Un operaio, che si trova al piano terra, deve lanciare un oggetto ad un collega che si trova nella cabina aperta di un ascensore di una gru, in salita alla velocità costante V_A=2 m/s. Sapendo che nell'istante del lancio i due operai sono entrambi al piano terra alla distanza d=10m e che il lancio avviene ad una velocità iniziale V_o inclinata di angolo α=20° rispetto all'orizzontale (come in figura) proprio nell'istante in cui l'ascensore prende a muoversi, determinare la velocità del lancio V_o necessaria affinchè l'oggetto possa essere preso al volo dal collega.



1BD. Le equazioni della cinematica

Le equazioni per la palla lungo x $\begin{cases} x(t) = v_o \cdot t\cos\alpha \\ v_x(t) = v_o\cos\alpha \\ a_x = 0 \end{cases}$, e lungo y $\begin{cases} y(t) = v_o \cdot t\sin\alpha - g\cdot t^2/2 \\ v_y(t) = v_o\sin\alpha - g\cdot t \\ a_y = -g \end{cases}$

L' equazione del moto rettilineo uniforme dell'ascensore $\begin{cases} x = d \\ y = V_A\cdot t \end{cases}$

Il tempo necessario alla palla per arrivare sul piano di arrivo x=d (dove viaggia l'ascensore viaggia in verticale) è quindi $t = \dfrac{d}{v_o\cos\alpha}$

In quell'istante la palla raggiunge la quota $y_{palla} = v_o \sin\alpha\cdot\left(\dfrac{d}{v_o\cos\alpha}\right) - g\left(\dfrac{d}{v_o\cos\alpha}\right)^2 \Big/ 2$

che dopo opportune semplificazioni $y_{palla} = d\cdot tg\alpha - \dfrac{g\cdot d^2}{2v_o^2\cos^2\alpha}$

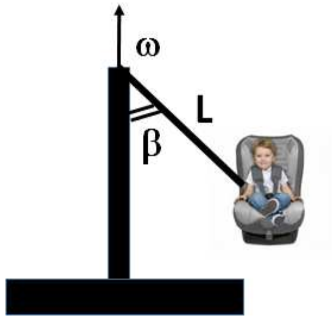
in quell'istante l'ascensore è salito alla quota $y_{ascensore} = V_A\cdot t = \dfrac{V_A\cdot d}{v_o\cos\alpha}$

$$y_{palla} = y_{ascensore} = d \cdot tg\alpha - \frac{g \cdot d^2}{2v_o^2 \cos^2\alpha} = \frac{V_A \cdot d}{v_o \cos\alpha}$$ che dividendo per d $$tg\alpha - \frac{g \cdot d}{2v_o^2 \cos^2\alpha} = \frac{V_A}{v_o \cos\alpha}$$

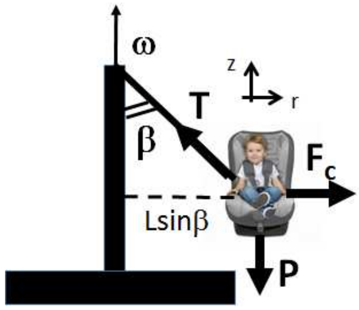
da cui moltiplicando per il fattore $2v_o^2 \cos^2\alpha$ si ottiene $2v_o^2 \sin\alpha\cos\alpha - 2v_o V_A \cos\alpha - gd = 0$

con una sola soluzione accettabile $$v_o = \frac{V_A \cos\alpha + \sqrt{V_A^2 \cos^2\alpha + 2gd\sin\alpha\cos\alpha}}{2\sin\alpha\cos\alpha} = \mathbf{15.6\ m/s}$$

2AD. Una giostra ruota uniformemente intorno ad un asse verticale. Un bambino seduto su di un seggiolino di massa complessiva **m=20kg** ruota intorno all'albero rotante per il tramite di una fune di massa trascurabile e di lunghezza **L=15 m**. Sapendo che la fune ha un carico di rottura $\mathbf{T_{max}=250N}$ calcolare il periodo di rotazione minimo e l'angolo di inclinazione β_{max} (rispetto alla verticale) al di sopra del quale avviene la rottura.



2AD. Il seggiolino con bambino è soggetto alla forza peso complessiva **P=mg**, alla Tensione della fune **T** ed alla forza centrifuga $\mathbf{F_c=m\omega^2 r}$ dove il raggio della circonferenza **r=Lsinβ.** Applicando il 2° principio della dinamica e proiettando le forze lungo gli assi r,z

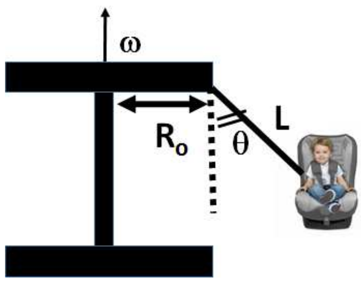


$$\begin{matrix} r) \\ z) \end{matrix} \begin{cases} F_c - T\sin\beta = 0 \\ T\cos\beta - P = 0 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} T\sin\beta = F_c = m\omega^2 r = m\omega^2 L\sin\beta \\ T\cos\beta = mg \end{cases}$$

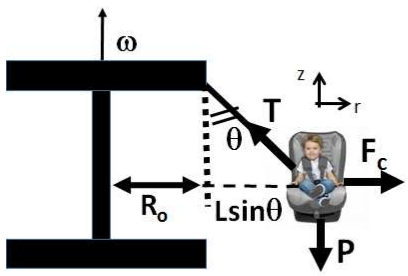
da cui $\begin{cases} T = m\omega^2 L \\ \cos\beta = \frac{mg}{T} \end{cases}$ La tensione della fune quindi cresce con la velocità angolare. In condizione

di tensione massima $$\begin{cases} T_{periodo} = \frac{2\pi}{\omega_{\max}} = 2\pi\sqrt{\frac{mL}{T_{\max}}} = 6.88s \\ \beta_{\max} = \arccos\left(\frac{mg}{T_{\max}}\right) = 38°22' \end{cases}$$

2BC. Una giostra ruota uniformemente intorno ad un asse verticale.
Un bambino seduto su di un seggiolino di massa complessiva **m=25kg** ruota intorno all'albero rotante per il tramite di una fune di massa trascurabile e di lunghezza **L=15 m**. La fune è incardinata ad un estremo anch'esso rotante ad una distanza $\mathbf{R_o=10m}$ dall'asse di rotazione. Sapendo che la fune si incluna di un angolo θ=30° (rispetto alla verticale) calcolare il periodo di rotazione e calcolare quanto tempo impieghi la giostra a raggiungere questa condizione ipotizzando un moto circolare con acc. angolare $\mathbf{\alpha=0.01\ rad/s^2}$.



2BC. Il seggiolino con bambino è soggetto alla forza peso complessiva **P=mg**, alla Tensione della fune **T** ed alla forza centrifuga $\mathbf{F_c=m\omega^2 r}$ dove il raggio della circonferenza $\mathbf{r=R_o+L\sin\theta}$. Si trascurano altre forze apparenti di entità minore**.** Applicando il 2° principio della dinamica e proiettando le forze lungo gli assi r,z



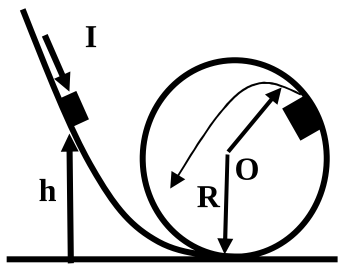
$$\begin{matrix} r) \\ z) \end{matrix}\begin{cases} F_c - T\sin\theta = 0 \\ T\cos\theta - P = 0 \end{cases} \quad \text{ossia} \quad \begin{cases} T\sin\theta = F_c = m\omega^2 r = m\omega^2\left(R_o + L\sin\theta\right) \\ T\cos\theta = mg \end{cases}$$

dal rapporto della prima equazione con la seconda $\dfrac{T\sin\theta}{T\cos\theta} = tg\theta = \dfrac{\omega^2}{g}\left(R_o + L\sin\theta\right)$

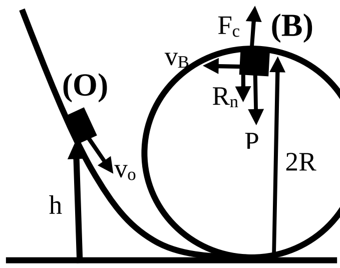
da cui la velocità angolare $\omega = \sqrt{\dfrac{g \cdot tg\theta}{R_o + L\sin\theta}} =$ **0.569 rad/s**

da cui il tempo per raggiungere è $t = \dfrac{\omega}{\alpha} = \sqrt{\dfrac{g \cdot tg\theta}{R_o + L\sin\theta}}\left(\dfrac{1}{\alpha}\right) =$ **56.9 s**

3AC. In un Luna Park un carrello di massa **m=20kg** è libero di muoversi su una guida metallica liscia che si raccorda con un tratto perfettamente circolare liscio di raggio **R=2m** come indicato in figura. Sapendo che il carrello viene lasciato scivolare erroneamente dalla quota **h=1.5m** (a velocità iniziale nulla) in modo da prendere la velocità necessaria per effettuare il giro della morte, evidenziare il problema che si manifesta ed indicare l'entità dell'impulso **I** minimo che occorre imprimere inizialmente per completare il giro. **Facoltativo** in assenza di tale impulso calcolare a quale quota da terra il carrello si stacca dalla guida circolare.



3AC. Le forze agenti sul carrello, per un osservatore che si trova su di esso, sono: la forza centrifuga, la forza peso, la reazione normale. In particolare nel punto critico B le forze si devono bilanciare affinchè il carrello possa proseguire correttamente il suo moto circolare sulla rotaia. Deve quindi possedere una velocità $\mathbf{v_B}$ cui corrisponde una forza centrifuga adeguata:



Dal **bilancio delle forze in B** si ottiene $F_c = P + R_N$ con $R_N \geq 0$ da cui

$F_c \geq P$ ossia $m\dfrac{v_B^2}{R} = mg$ da cui la velocità minima in B diviene $v_B \geq v_{B,\min} = \sqrt{gR}$

Imponendo **la conservazione dell'energia meccanica in O e B**
nella condizione di passaggio in B con minima velocità

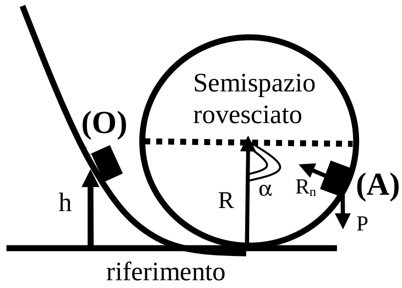
$$E_O = mgh + \frac{1}{2}mv_o^2 \quad = \quad E_{B,\min} = mg(2R) + \frac{1}{2}mv_{B,\min}^2 = \frac{5}{2}mgR$$

ottenendo la velocità minima in partenza $v_{o,\min} = \sqrt{g(5R - 2h)}$ = **8.28m/s**

e conseguentemente l'impulso minimo che deve essere erogato

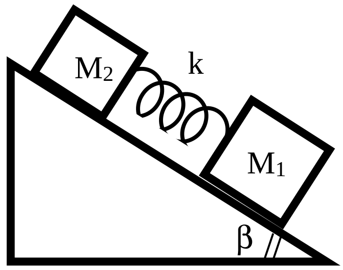
$I_{\min} = m \cdot v_{o,\min} = m\sqrt{(5R - 2h)R} =$ **165.6 kg m/s**

FACOLTATIVO:

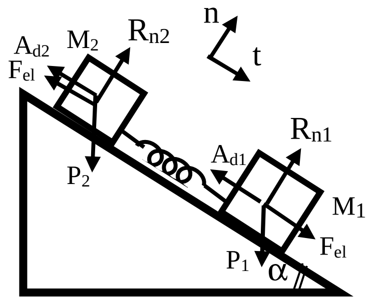


In assenza di impulso e velocità iniziale, essendo h<R il carrello raggiungere un punto A sulla guida alla stessa quota h di partenza, dove invertità il suo moto senza il problema del distacco che nascerebbe invece nel "*semispazio rovesciato*" quando α>90° (rispetto alla verticale). In questo caso invece l'angolo massimo corrispondente ad A $\alpha = \arccos\left(\frac{R-h}{R}\right) =$ **75°31'<90°**

3BD. Due corpi di massa $\mathbf{M_1=6kg}$ ed $\mathbf{M_2=4kg}$ scivolano lungo un piano scabro inclinato di **β=40°** rispetto ad un piano orizzontale. Essi sono uniti tra loro da una molla di massa trascurabile e di costante elastica **k=35 N/m**. Ipotizzando che le due masse scendano a valle con identica accelerazione e senza visibili oscillazioni, e sapendo che la molla rimane compressa di **ΔL=5cm** e che il coefficiente di attrito dinamico del corpo 1 vale $\boldsymbol{\mu_{d1}=0.20}$, calcolare il coefficiente di attrito dinamico del corpo 2 e l'accelerazione comune cui sono sottoposti i due corpi.



3BD. Le forze agenti su ciascuna massa sono le seguenti
a) la forza peso $P=Mg$ diretta lungo la verticale
b) la reazione normale R_n lungo la normale n.
c) la forza di attrito dinamico A_d lungo l'asse tangenziale t.
d) la forza elastica F_{el} lungo l'asse tangenziale t
(nella direzione corrispondente ad una compressione)



Scomponendo le forze secondo gli assi n,t

Per la massa M_1

$$\begin{matrix}\hat{n} \\ \hat{t}\end{matrix}\begin{cases} R_{n1} - P_1\cos\alpha = 0 \\ P_1\sin\alpha - A_{d1} + F_{el} = M_1 a \end{cases}$$

Per la massa M_2

$$\begin{matrix}\hat{n} \\ \hat{t}\end{matrix}\begin{cases} R_{n2} - P_2\cos\alpha = 0 \\ P_2\sin\alpha - A_{d2} - F_{el} = M_2 a \end{cases}$$

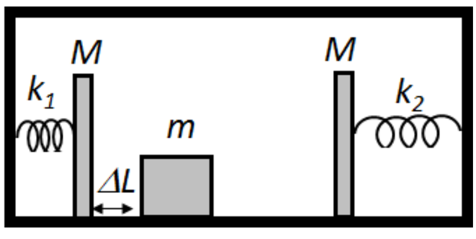
Sommando le 2 equazioni lungo t si ottiene $,(M_1+M_2)a = (P_1+P_2)\sin\alpha - (A_{d1}+A_{d2})$

da cui l'accelerazione comune $a = g\left[\sin\alpha - \cos\alpha\left(\frac{\mu_{d1}M_1+\mu_{d2}M_2}{M_1+M_2}\right)\right] =$ **5.09 m/s²**

sostituendo nella prima il valore trovato dell'accelerazione si ottiene l'espressione della forza elastica $F_{el} = k\Delta L = M_1(a - g\sin\alpha) + A_{d1} = g\cos\alpha\frac{M_1\cdot M_2}{M_1+M_2}(\mu_{d1}-\mu_{d2})$

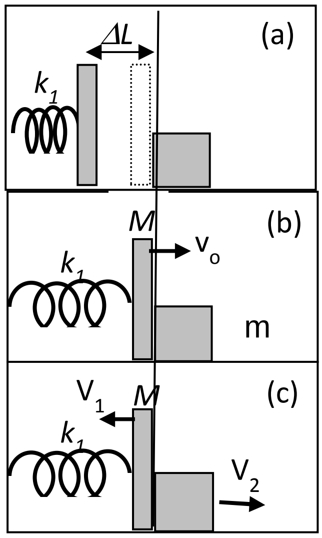
da cui il coefficiente di attrito dinamico cercato $\mu_{d2} = \mu_{d1} - \frac{k\Delta L}{g\cos\alpha}\frac{M_1+M_2}{M_1\cdot M_2} =$ **0.103**

4AD. Un sistema a molla di costante elastica $\mathbf{k_1}$=25N/m collegata ad un pistone di massa M=5kg, inizialmente compresso di una quantità ΔL viene lasciato libero in modo da urtare elasticamente un blocco m fermo sulla posizione di equilibrio della molla. Il blocco scivola senza attrito verso un secondo sistema a molla in equilibrio di costante elastica $\mathbf{k_2}$=16N/m e con un identico pistone M. A seguito del secondo urto elastico si riscontra che la massima compressione



della seconda molla ΔL_2 è uguale a quella della prima molla. Determinare i possibili valori per la massa del blocco m che permettono questa condizione.

4AD. La velocità del pistone prima dell'urto



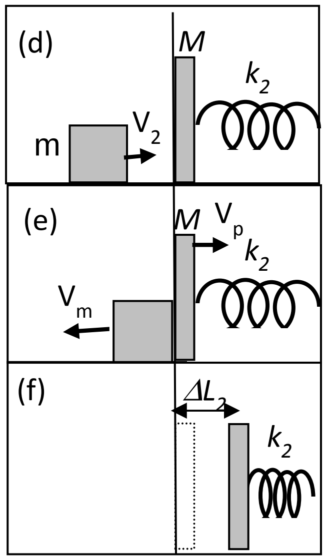
Si ottiene dalla conservazione dell'energia meccanica del pistone tra (a) e (b).

Nella posizione (a) c'è solo energia potenziale $E_A = \frac{1}{2}k_1\Delta L^2$

Nella posizione (b) c'è solo energia cinetica $E_B = \frac{1}{2}Mv_o^2$.

La velocità del pistone prima dell'urto è quindi $v_o = \sqrt{\frac{k_1}{M}}\Delta L =$

Le velocità dopo l'urto elastico (c) $\begin{cases} V_1 = \left(\frac{M-m}{M+m}\right)v_o \\ V_2 = \left(\frac{2M}{M+m}\right)v_o \end{cases}$ **(**poichè m era ferma)



Le velocità dopo il secondo urto elastico (d,e) $\begin{cases} V_m = \left(\frac{m-M}{M+m}\right)V_2 \\ V_p = \left(\frac{2m}{M+m}\right)V_2 \end{cases}$

(formule ottenute poichè M era ferma. V_p è la velocità del secondo pistone)

La nuova ampiezza di oscillazione si ottiene dalla conservazione dell'energia meccanica del pistone fra (e), (f)

Nella posizione (f) c'è solo energia potenziale $E_f = \frac{1}{2}k_2\Delta L_2^2$

Nella posizione (e) c'è solo energia cinetica $E_e = \frac{1}{2}MV_p^2$.

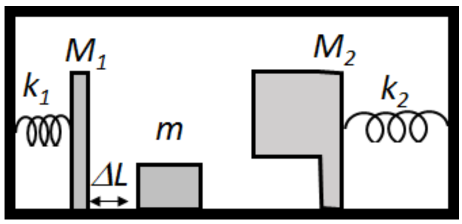
L'ampiezza di oscillazione del secondo pistone è quindi

$\Delta L_2 = \sqrt{\frac{M}{k_2}}V_p$ e combinando le eq. $\Delta L_2 = \sqrt{\frac{M}{k_2}}\sqrt{\frac{k_1}{M}}\left(\frac{2M}{M+m}\right)\left(\frac{2m}{M+m}\right)\Delta L$

Imponendo infine $\Delta L_2 = \Delta L$ si ottiene $\sqrt{\frac{k_1}{k_2}}\frac{4M\cdot m}{(M+m)^2} = 1$

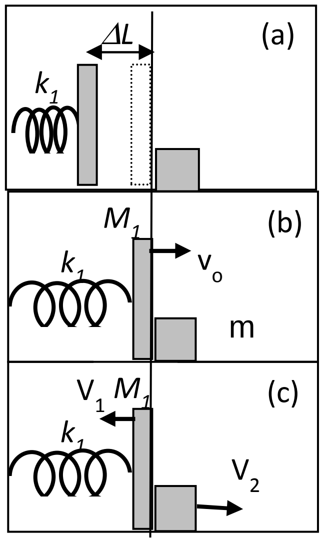
Corrispondente alla equazione di 2° grado $m^2 + m\cdot M\left(2 - 4\sqrt{k_1/k_2}\right) + M^2 = 0$

con **due soluzioni** $m_{1,2} = M\cdot\left[2\sqrt{k_1/k_2} - 1 \pm \sqrt{\left(2\sqrt{k_1/k_2} - 1\right)^2 - 1}\right] = \left(\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 1}\right)M = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}M = \begin{cases} 13.1\ \ kg \\ 1.91\ \ kg \end{cases}$



4BC. Un sistema a molla di costante elastica **k_1**=2N/m collegata ad un pistone di massa M_1=3kg, inizialmente compresso di una quantità ΔL=5cm viene lasciato libero in modo da urtare elasticamente un blocco m=1kg fermo sulla posizione di equilibrio della molla. Il blocco scivola senza attrito verso un secondo sistema a molla in equilibrio di costante elastica **k_2**=4N/m e con un pistone M_2=4kg con un incavo che incapsula il blocco m. A seguito del secondo urto perfettamente anelastico determinare la massima compressione della seconda molla ΔL_2, il periodo di oscillazione e la perdita di energia a causa dell'urto.

4BC. La velocità del pistone prima dell'urto
Si ottiene dalla conservazione dell'energia meccanica del pistone tra (a) e (b).



Nella posizione (a) c'è solo energia potenziale $E_A = \frac{1}{2}k_1\Delta L^2$

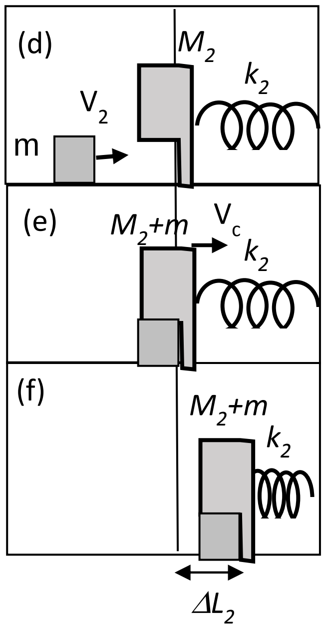
Nella posizione (b) c'è solo energia cinetica $E_B = \frac{1}{2}M_1 v_o^2$.

La velocità del pistone prima dell'urto è quindi $v_o = \sqrt{\frac{k_1}{M_1}}\Delta L =$ **0.041 m/s**

Le velocità dopo l'urto elastico (c) $\begin{cases} V_1 = \left(\frac{M_1 - m}{M_1 + m}\right)v_o = 0.020 m/s \\ V_2 = \left(\frac{2M_1}{M_1 + m}\right)v_o = 0.061 m/s \end{cases}$

(m è ferma)

Le velocità dopo il secondo urto perfettamente anelastico (d,e)



Dalla conservazione della quantità di moto $mV_2 = (M_2 + m)V_C$

La velocità del centro di massa $V_C = \frac{m}{M_2 + m}V_2 =$ **0.012 m/s**

L'energia prima dell'urto è $K_{prima} = \frac{1}{2}mV_2^2 =$ **1.87 mJ**

L'energia prima dell'urto è $K_{dopo} = \frac{1}{2}(M_2 + m)V_C^2 =$ **0.37 mJ**

L'energia persa per l'urto è $K_{prima} - K_{dopo} =$ **1.50 mJ**

La nuova ampiezza di oscillazione si ottiene dalla conservazione dell'energia meccanica del pistone fra (e), (f)

Nella posizione (f) c'è solo energia potenziale $E_f = \frac{1}{2}k_2\Delta L_2^2$

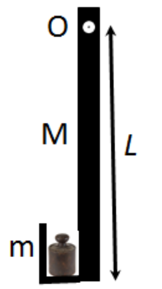
Nella posizione (e) c'è solo energia cinetica $E_e = \frac{1}{2}(M_2 + m)V_C^2$.

L'ampiezza di oscillazione del secondo pistone è quindi

$$\Delta L_2 = \sqrt{\frac{M_2 + m}{k_2}}V_C = \textbf{ 1.37 cm}$$

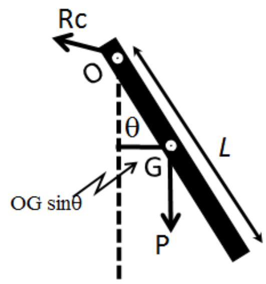
Il **periodo di oscillazione** $T = 2\pi\sqrt{\frac{M_2 + m}{k_2}} =$ **7.025 s**

5AC Un pendolo composto è formato da un'asta rigida omogenea di massa M=4kg, di lunghezza L, libera di ruotare intorno al cardine O. In queste condizioni il periodo delle piccole oscillazioni vale T=2s. In un secondo esperimento all'estremo della sbarra viene alloggiata una piccola massa m. In queste nuove condizioni il periodo delle piccole oscillazioni si incrementa lievemente e diviene T'=2.1 s. Determinare il valore della massa aggiuntiva m.



5AC. Calcolo del periodo delle piccole oscillazioni di un pendolo composto

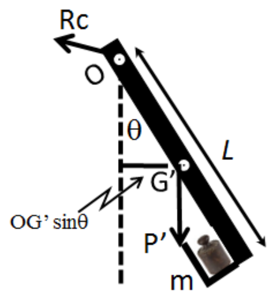
Applicando la II equazione cardinale il momento della reazione sul cardine è nullo mentre il momento della forza peso complessiva rimane il solo responsabile dell'accelerazione angolare.



$$M_p = -P(OG\sin\theta) = I_{tot}\alpha = I_{tot}\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

che per piccole oscillazioni diviene l'equazione diff. $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \left[\frac{M_{tot}g(OG)}{I_{tot}}\right]\theta = 0$

con periodo di oscillazione $T_{periodo} = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I_{tot}}{M_{tot}g(OG)}}$



Nel caso iniziale della sola barra: $I_O = \frac{1}{3}ML^2$, e $OG = \frac{L}{2}$ da cui $T = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}}$

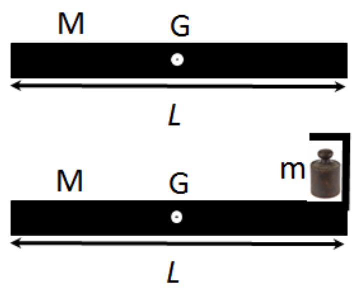
Quando è inserita la massa m: $I_{tot} = \frac{1}{3}ML^2 + mL^2$, e $M_{tot}(OG) = M\frac{L}{2} + mL$

da cui $T' = 2\pi\sqrt{\frac{ML^2/3 + mL^2}{g(ML/2 + mL)}} = \sqrt{\frac{L(M/3+m)}{g(M/2+m)}}$

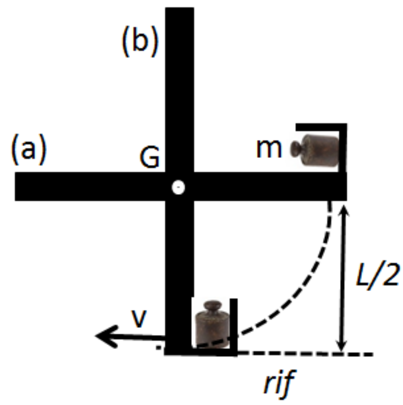
Quadrando i rapporti fra i due periodi $\left(\frac{T'}{T}\right)^2 = \frac{\frac{L(M/3+m)}{g(M/2+m)}}{\frac{2L}{3g}} = \frac{M+3m}{M+2m}$

da cui si ricava il valore della massa incapsulata $m = M\frac{(T'/T)^2 - 1}{3 - 2\cdot(T'/T)^2} =$ **516 g**

5BD. Un'asta rigida omogenea di massa M=5kg, di lunghezza L=80cm è vincolata a ruotare intorno al cardine coincidente con il baricentro G. L'asta è posizionata ferma in orizzontale ed in queste condizioni rimane in quiete. In una sacca all'estremità dell'asta viene poi alloggiata una massa m=3kg. Il sistema tende quindi a ruotare. Determinare in quale posizione raggiunge la massima velocità angolare. **Facoltativo:** quale sarà la massima velocità raggiunta della massa m incapsulata nell'asta.



5BD. Calcolo energia meccanica nello stato iniziale (a)



Una volta incapsulata la massa il sistema inizialmente nella posizione orizzontale (a) comincia a ruotare acquistando il massimo di energia cinetica nella posizione verticale (b) dove c'è un minimo di energia potenziale.

Essendo nulla l'energia cinetica nello stato (a), l'energia meccanica ha solo il contributo potenziale

$$E_{ma} = U_a = Mg\frac{L}{2} + mg\frac{L}{2}$$

dove il riferimento è posto nel punto più basso possibile durante la rotazione e l'energia potenziale della sbarra è calcolata come se tutta la massa M fosse concentrata sul baricentro G

Calcolo energia meccanica nello stato (b)

Nel posizione verticale (b) il sistema è dotato di energia potenziale della sola barra perché la massa m è alla quota del riferimento

$$U_b = Mg\frac{L}{2}$$

Mentre ha una energia cinetica di rotazione

$$K_b = \frac{1}{2}I_{tot}\omega^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{12}ML^2 + m\left(\frac{L}{2}\right)^2\right]\omega^2 \quad = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{12}(M+3m)L^2\right]\omega^2$$

dove il momento di inerzia complessivo è calcolato come somma di quello della sbarra per il suo baricentro e quello della massa m concentrata sull'estremo a distanza L/2 dal cardine.
L'energia meccanica complessiva si ottiene dalla somma delle energie potenziale e cinetica

$$E_{mb} = Mg\frac{L}{2} + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{12}(M+3m)L^2\right]\omega^2$$

Imponendo infine la conservazione della energia meccanica fra gli stati (a) e (b)

$$E_{ma} = E_{mb} \text{ da cui } \quad Mg\frac{L}{2} + mg\frac{L}{2} = Mg\frac{L}{2} + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{12}(M+3m)L^2\right]\omega^2$$

da cu si calcola la velocità angolare massima $\omega_b = \sqrt{\dfrac{mg\frac{L}{2}}{\frac{1}{24}(M+3m)L^2}} = \sqrt{\dfrac{12mg}{(M+3m)L}} = \mathbf{5.61}$ **rad/s**,

Fac. La velocità della massa incapsulata nella posizione (b) $\quad v_B = \omega_B\left(\frac{L}{2}\right) = \sqrt{\dfrac{3mgL}{M+3m}} = \mathbf{2.245}$ **m/s**