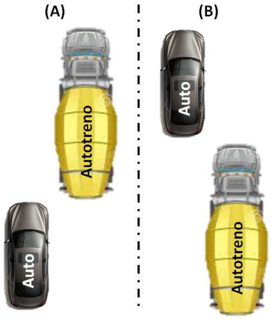
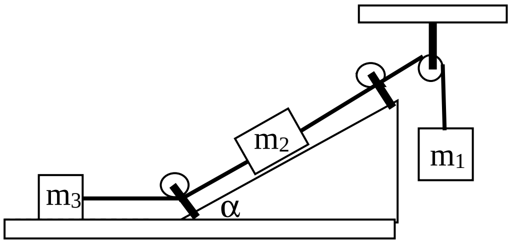
Università di Roma "La Sapienza"
Facoltà di Ingegneria
FISICA
A.A. 2014-2015
Ingegneria Gestionale (M-Z)
Esonero del *24 Aprile 2015*

1. Una automobile lunga 4 m viaggia su autostrada. In un tratto rettilineo decide di effettuare il sorpasso di un autotreno lungo 10 m. Si calcoli il tempo di sorpasso supponendo che la macchina viaggi alla velocità costante di 110 km/h e che l'autotreno viaggi alla velocità costante di 90 km/h. Nell'ipotesi invece che il conducente dell'auto voglia accelerare la manovra di sorpasso in modo da impiegare metà tempo, si determinino quale accelerazione uniforme debba imprimere e quale sarà la velocità dell'auto alla fine del sorpasso (B). (Per tempo di sorpasso si intende il tempo impiegato per passare dalla posizione A alla B).

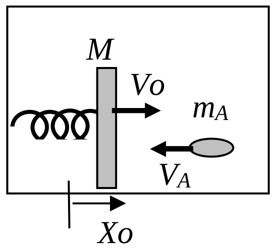


2. Un blocco di massa m_1=2kg disposto lungo la verticale trascina, grazie ad un sistema di pulegge di massa trascurabile, i blocchi m_2=2kg ed m_3=4kg come indicato in figura. In particolare il blocco m_2 è disposto su di un piano inclinato di α=15° rispetto all'orizzontale, mentre m_3 è disposto su di un piano orizzontale. Entrambi i piani sono scabri e caratterizzati da un coefficiente di attrito statico μ_s=0.15 e dinamico μ_d=0.10. Determinare l'accelerazione con cui si muove il sistema e le tensioni delle due funi. **Facoltativo:** per quali valori della massa m_1 il sistema sarebbe stato in equilibrio?

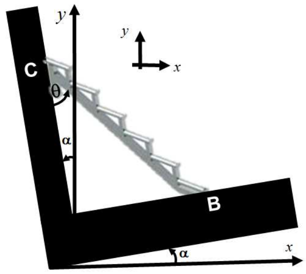


3. Un pendolo semplice è costituito da una massa m=1kg appesa al soffitto di un vagone di un treno per il tramite di un filo di lunghezza L=50 cm e di massa trascurabile. Il pendolo giace inizialmente fermo sulla verticale all'interno del vagone mentre il treno viaggia su traiettoria rettilinea ad velocità costante v_o=200 km/h. In prossimità dell'arrivo in stazione il treno rallenta uniformemente il suo moto portandosi alla velocità v_1=50 km/h in 30 secondi. Contemporaneamente il pendolo prende ad oscillare, Determinare in questa fase la diminuzione percentuale del periodo delle piccole oscillazioni

4. Un piattello di massa M=2 kg, attaccato ad una molla di massa trascurabile di costante elastica k=8 N/m, è messo in oscillazione lungo un piano liscio orizzontale. Volendo arrestarne bruscamente il moto, viene di proposito sparato un proiettile di massa m_A=10g che viaggia in senso opposto alla velocità V_A=150 m/s cercando di impattare contro il piattello proprio quando esso transita nella sua posizione di equilibrio. In condizioni di urto perfettamente anelastico il sistema si arresterebbe. Tuttavia per imperizia il proiettile viene ritardato di un decimo di secondo. In queste condizioni il piattello si trova in una posizione (x_o) rispetto all'equilibrio e possiede una velocità (V_o) non previste. Determinare la nuova energia meccanica del sistema e raffrontarla percentualmente con quella posseduta dal piattello prima dell'urto

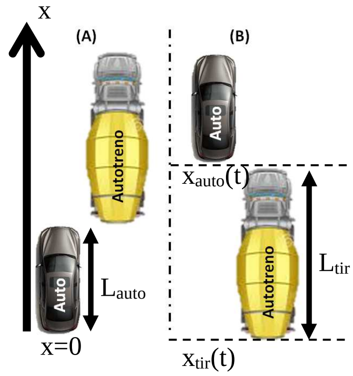


5. Una scala di massa *m*=10kg e di lunghezza *L*=2m viene posizionata in una camera di un edificio pericolante in cui il pavimento e le pareti sono inclinate di un angolo α=10° rispetto ai convenzionali assi orizzontale x e verticale y. Sapendo che la scala viene inclinata di un angolo θ=30° rispetto al piano di appoggio nel punto C (dove non c'è attrito) determinare la forza di attrito minima richiesto nel punto di appoggio B per soddisfare le condizioni di staticità, fornendo anche il relativo coefficiente di attrito statico minimo μ_s.



Università di Roma "La Sapienza"
Facoltà di Ingegneria
FISICA
A.A. 2014-2015
Ingegneria Gestionale (M-Z)
Esonero del *24 Aprile 2015*

1. Il moto degli autoveicoli è rettilineo. L'asse *x* viene orientato nel verso del moto e vengono scelti come punti rappresentativi dei due autoveicoli i paraurti posteriori. Questi descrivono nel tempo un moto rettilineo uniforme descritto dalle leggi orarie



$$\begin{cases} x_{auto}(t) = v_{auto} \cdot t \\ x_{tir}(t) = L_{auto} + v_{tir} \cdot t \end{cases}.$$

ove la posizione iniziale del paraurti posteriore della macchina è $x_{auto}(0)=0$ mentre quello del tir è $x_{tir}(0)=L_{auto}$ (vedi figura A)

Condizione di sorpasso
Il tempo minimo necessario per il sorpasso è definito come quel tempo al quale la macchina ha superato completamente il tir e cioè quando il paraurti posteriore dell'auto è allineato con quello anteriore del tir (vedi figura B).
Questa condizione si esprime in formule

$$x_{auto}(t) - x_{tir}(t) = L_{tir}$$

Combinando le equazioni si ha $v_{auto}t - (L_{auto} + v_{tir}t) = L_{tir}$

da cui risolvendo in t, si ricava il **tempo necessario per il sorpasso** $t = \dfrac{L_{tir} + L_{auto}}{v_{auto} - v_{Tir}} = \dfrac{(10+4)m}{\left(\dfrac{110-90}{3.6}\right)\dfrac{m}{s}} =$ **2.52 s.**

Nel caso invece in cui l'auto acceleri durante il sorpasso il moto diviene uniformemente accelerato secondo

$$\begin{cases} v_{auto}(t) = v_{auto}(0) + at \\ x_{auto}(t) = v_{auto}(0) \cdot t + at^2/2 \end{cases}.$$

Sostituendo le nuove equazioni nella condizione di sorpasso si ottiene

$$v_{auto}t + a\,t^2/2 - (L_{auto} + v_{tir}t) = L_{tir}$$

da cui si ottiene il valore della **accelerazione** $a = \dfrac{2[(L_{tir} + L_{auto}) - (v_{auto} - v_{tir})\tau]}{\tau^2} =$ **8.82 m/s²**

ove al tempo di sorpasso precedentemente calcolato è stato sostituito il valore dimezzato $\tau = t/2 =$ **1.26 s**

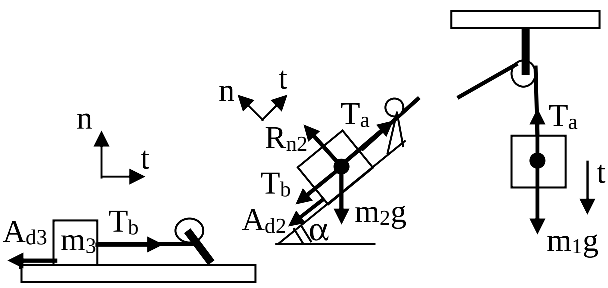
Conseguentemente la **velocità finale dell'auto** è $v_{auto}(\tau) = v_{auto}(0) + a\tau =$ **41.7 m/s = 150 km/h**

2. Applicando il secondo principio per ogni blocco si ottiene il sistema:

massa **m1** ; $t)\ \ m_1 g - T_a = m_1 a$

massa **m2** ; $\begin{cases} t) \ \ T_a - T_b - A_{d2} - m_2 g \sin\alpha = m_2 a \\ n) \ \ R_{n2} - m_2 g \cos\alpha = 0 \end{cases}$

massa **m3** ; $\begin{cases} t) \ \ T_b - A_{d3} = m_3 a \\ n) \ \ R_{n3} = m_3 g \end{cases}$



sommando le equazioni lungo l'asse t per tutte le masse si ottiene

$m_1 g - m_2 g \sin\alpha - A_{d2} - A_{d3} = (m_1 + m_2 + m_3)a$

e sostituendo i valori delle forze di attrito

$m_1 g - m_2 g \sin\alpha - \mu_d m_2 g \cos\alpha - \mu_d m_3 g = (m_1 + m_2 + m_3)a$

da cui l'**accelerazione del sistema**

$$a = g\frac{m_1 - m_2 \sin\alpha - \mu_d(m_3 + m_2 \cos\alpha)}{m_1 + m_2 + m_3} = \quad \mathbf{1.09\ m/s^2}$$

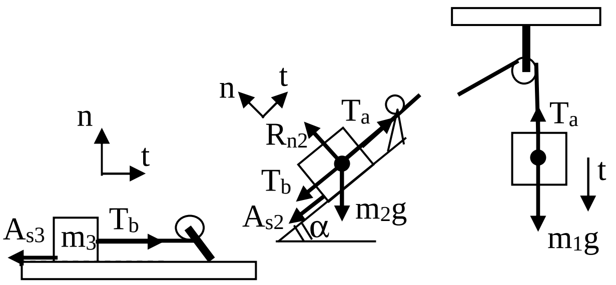
e le due **tensioni** $T_a = m_1(g - a) =$ **17.4 N** e $T_b = m_3(a + \mu_d g) =$ **8.3 N**

Facoltativo: studiamo l'equilibrio del sistema

massa **m1** ; $t)\ T_a = m_1 g$

massa **m2** ; $\begin{cases} t) & T_a - T_b - A_{s2} - m_2 g \sin\alpha = 0 \\ n) & R_{n2} - m_2 g \cos\alpha = 0 \end{cases}$

massa **m3** ; $\begin{cases} t) & T_b = A_{s3} \\ n) & R_{n3} = m_3 g \end{cases}$



Sommando le equazioni lungo l'asse del moto

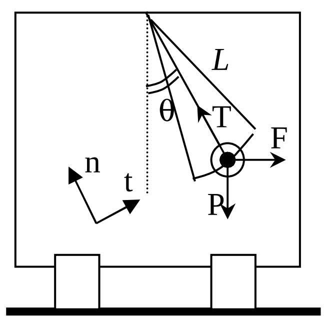
$A_{s2} + A_{s3} = m_1 g - m_2 g \sin\alpha$

da cui $m_1 = m_2 \sin\alpha + \frac{(A_{s2} + A_{s3})}{g} \le m_2 \sin\alpha + \frac{(A_{s2,\max} + A_{s3,\max})}{g}$

il sistema è in equilibrio quando $m_1 \le m_2 \sin\alpha + \mu_s(m_3 + m_2 \cos\alpha) =$ **1.4 kg.**

(poiché $\mu_s > \tan\alpha$ la massa m_2 rimane ferma anche in assenza di m_1).

3. Nel sistema di riferimento non inerziale solidale al treno, il pendolo è soggetto a 3 forze:
la forza peso **P=mg** diretta lungo la verticale,
la tensione del filo **T** lungo la normale *n*,
la forza apparente **F=ma**$_{\mathbf{app}}$ lungo l'orizzontale dovuta diretta in senso opposto alla decelerazione del treno.



L'accelerazione apparente vale $a_{app} = \frac{v_o - v_1}{\Delta t} = \frac{(200-50)/3.6}{30}$ **= 1.39 m/s²**

Queste forze si equilibrano $\vec{P} + \vec{F}_{app} + \vec{T} = 0$ quando il pendolo si inclina dell'angolo θ_{eq}. Proiettando le forze lungo l'asse tangenziale *t* ($F_{app}\cos\theta - P\sin\theta = ma_t$) ed imponendo per la statica $a_t=0$ si ricava $tg\theta_{eq} = F_{app}/P = a_{app}/g$. Tutto va come se all'interno del vagone ci fosse una accelerazione di gravità $g' = \sqrt{g^2 + a_{app}^2}$ ove $g = g'\cos\theta_{eq}$ e $a_{app} = g'\sin\theta_{eq}$

Nel caso dinamico invece $a_t = L \cdot d^2\theta / dt^2$; l'equazione per la dinamica $F_{app}\cos\theta - P\sin\theta = ma_t$ diviene $ma_{app}\cos\theta - mg\sin\theta = mL\dfrac{d^2\theta}{dt^2}$ ossia $-mg'(\sin\theta\cos\theta_{eq} - \sin\theta_{eq}\cos\theta) = mL\dfrac{d^2\theta}{dt^2}$

quindi $\dfrac{d^2\theta}{dt^2} = \dfrac{g'}{L}\sin(\theta - \theta_{eq})$ che per piccole oscillazioni ha **periodo** $T' = \dfrac{2\pi}{\omega'} = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g'}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{\sqrt{g^2 + a_{app}^2}}}$

inferiore rispetto al **periodo iniziale** $T = \dfrac{2\pi}{\omega'} = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}}$. La **diminuzione percentuale** è quindi

$\dfrac{T - T'}{T} = 1 - \sqrt{\dfrac{g}{\sqrt{g^2 + a_{app}^2}}} = 1 - \sqrt{\dfrac{9.8}{\sqrt{9.8^2 + 1.39^2}}} =$ **0.005 = 0.5%**

4. Calcolo della velocità del piattello.
Il proiettile avrebbe dovuto raggiungere il piattello nella sua posizione di equilibrio annullando la quantità di moto complessiva dopo l'urto perfettamente anelastico come descritto dalla equazione

$MV_{piat} - m_A V_A = 0$ da cui $V_{piat} = \dfrac{m_A}{M} V_A =$ **0.75 m/s**

L'energia meccanica del piattello prima dell'urto è solo cinetica in quanto il piattello si trova nella posizione di equilibrio in x=0:

$E_{prima} = K_{prima} = \dfrac{1}{2} M V_{piatt}^2 = \dfrac{1}{2}\dfrac{m_A^2 V_A^2}{M} =$ **563 mJ**

A causa del ritardo t=0.1 s il piattello si sposta di moto armonico in avanti verso la posizione $x_o = A\sin(\omega t) = \dfrac{V_{piat}}{\omega}\sin(\omega t)$ =**7.5 cm**

con velocità $V_o = A\omega\cos(\omega t) = V_{piat}\cos(\omega t)$=**0.735 m/s** ove per il moto armonico si ha $V_{piat} = A\omega$

ma l'energia meccanica del piattello prima dell'urto è costante e pari al valore precedente **563 mJ**

Nuova velocità del sistema piattello/proiettile

indichiamo le velocità prima e dopo l'urto come segue

V_A: velocità proiettile prima dell'urto (quantità nota)

V_o: velocità del piattello prima dell'urto (quantità nota $V_o = V_{piat}\cos(\omega t)$)

V: velocità del sistema piattello/proiettile dopo l'urto

In queste nuove imponendo la conservazione della quantità di moto per urto perf. anelastico

$MV_o - m_A V_A = (M + m_A)V$ da cui

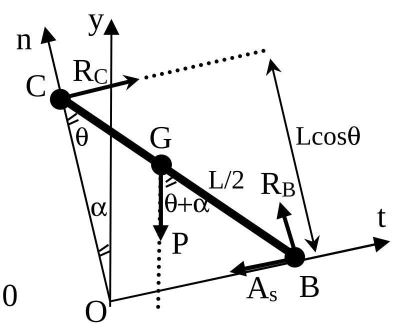
$V = \dfrac{MV_o - m_A V_A}{M + m_A} = \dfrac{MV_{piat}\cos(\omega t) - m_A V_A}{M + m_A} = \dfrac{m_A V_A}{M + m_A}\left(\cos\sqrt{\dfrac{k}{M}}t - 1\right)$ **= - 0.015 m/s** con energia cinetica $K_{dopo} = \frac{1}{2}(M + m_A)V^2 = \frac{1}{2}\frac{m_A^2 V_A^2}{M + m_A}\left(\cos\sqrt{\frac{k}{M}}t - 1\right)^2$ $=$ **0.222 mJ**

energia potenziale $U_{dopo} = \frac{1}{2}kx_o^2 = \frac{1}{2}k\left(\frac{V_{piat}}{\omega}\right)^2\left(\sin\sqrt{\frac{k}{M}}t\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{m_A^2 V_A^2}{M}\left(\sin\sqrt{\frac{k}{M}}t\right)^2$ $=$ **22 mJ**

ed energia meccanica $E_{dopo} = U_{dopo} + K_{dopo} =$ **22 mJ**

che rappresenta il **3.9 %** dell'energia iniziale di **563 mJ**

5. Gli assi del sistema non sono più quelli standard (x,y), ma sono (t,n) ruotati di un angolo α
Le forze agenti sull'asta saranno proiettate secondo questi nuovi assi (t,n):
la forza peso dell'asta **P=mg** applicata nel baricentro G (a metà dell'asta supposta omogenea) lungo la verticale y, la reazione del pavimento $\mathbf{R_B}$ applicata in B diretta lungo la nuova normale n, la forza di attrito statico $\mathbf{A_s}$ e la reazione normale dalla parete $\mathbf{R_C}$ di verso opposto ma direzione dell'asse t
In condizione statiche devono essere contemporaneamente nulle entrambe le equazioni cardinali.



Proiettando la 1ª eq. cardinale lungo gli assi t, n:

$$\begin{array}{l} t) \\ n) \end{array}\begin{cases} R_C - A_s - P\sin\alpha = 0 \\ R_B - P\cos\alpha = 0 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} R_C = A_s + P\sin\alpha \\ R_B = P\cos\alpha \end{cases}$$

Calcolando la 2ª equazione cardinale nel punto B

$$M_{Rc} + M_P = R_C L\cos\theta - PL\sin(\theta+\alpha)/2 = 0 \quad \text{essendo} \quad M_A = M_{Rb} = 0$$

da cui si ricava l'intensità della forza

$$R_C = \frac{P}{2}\frac{\sin(\theta+\alpha)}{\cos\theta}$$

combinando le equazioni per R_C si ha

$$R_C = \frac{P}{2}\frac{\sin(\theta+\alpha)}{\cos\theta} = A_s + P\sin\alpha$$

da cui l'attrito $A_s = \frac{P}{2}\left[\frac{\sin(\theta+\alpha)}{\cos\theta} - 2\sin(\alpha)\right] = \frac{P}{2}\left[\frac{\sin\theta\cos\alpha + \sin\alpha\cos\theta - 2\sin\alpha\cos\theta}{\cos\theta}\right] = \frac{P}{2}\left[\frac{\sin(\theta-\alpha)}{\cos\theta}\right]$

L'attrito deve però soddisfare la condizione per cui $A_s = \frac{P}{2}\left[\frac{\sin(\theta-\alpha)}{\cos\theta}\right] \le \mu_s R_B = \mu_s P\cos\alpha$

da $\mu_s \ge \frac{\sin(\theta-\alpha)}{2\cos\theta\cos\alpha} =$ cui **0.2**