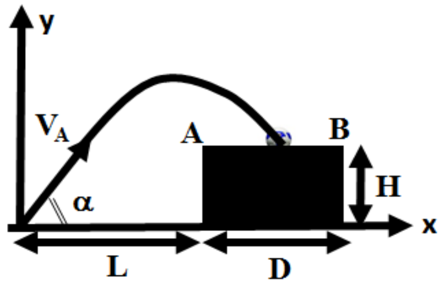
Università di Roma "La Sapienza"
Facoltà di Ingegneria
FISICA
A.A. 2016-2017
Ingegneria Gestionale (M-Z)
Soluzioni Esonero del 21 Aprile 2017 – Tutte le tipologie

1. Un pallone viene calciato con una velocità iniziale $\mathbf{V_A}$, ed una inclinazione $\boldsymbol{\alpha}$**=30°** rispetto all'orizzontale, in modo da poter atterrare all'interno di un terrapieno rettangolare di larghezza **D=3m** e di altezza **H=2m** che si trova ad una distanza **L=10m** dal punto di lancio. Determinare l'intervallo delle velocità di lancio ammissibile affinchè il pallone atterrari all'interno del terrapieno (in un punto del segmento AB).



1AC. Equazioni della cinematica. Le grandezze cinematiche vengono scomposte secondo gli assi x,y

Lungo l'asse x $\begin{cases} x(t) = v_A\cos(\alpha)\cdot t \\ v_x(t) = v_A\cos(\alpha) \\ a_x = 0 \end{cases}$, e lungo l'asse y $\begin{cases} y(t) = v_A\sin(\alpha)\cdot t - gt^2/2 \\ v_y(t) = v_A\sin(\alpha) - gt \\ a_y = -g \end{cases}$

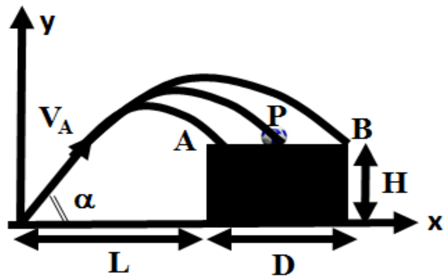
Equazione della traiettoria:

dalla equazione x(t) si esplicita il tempo $t = \dfrac{x}{v_A\cos\alpha}$ che si sostituisce nell'equazione y(t)

in modo da determinare l'equazione della traiettoria parabolica $y = tg\alpha\cdot x - \left(\dfrac{g}{2v_A^2\cos^2\alpha}\right)x^2$

Condizione per atterrare in un punto P(x,H) del segmento AB:

$$y = tg\alpha\cdot x - \left(\frac{g}{2v_A^2\cos^2\alpha}\right)x^2 = H \quad \text{da cui} \quad v_A = \frac{x}{\cos\alpha}\sqrt{\frac{g}{2(x\cdot tg\alpha - H)}}$$

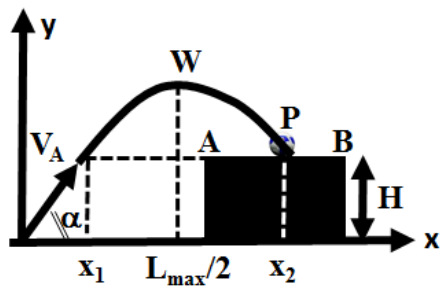


Il range delle velocità ammissibili: quella minima che consente di raggiungere A: $v_{\min} = \dfrac{L}{\cos\alpha}\sqrt{\dfrac{g}{2(L\cdot tg\alpha - H)}}$ = **13.16 m/s**

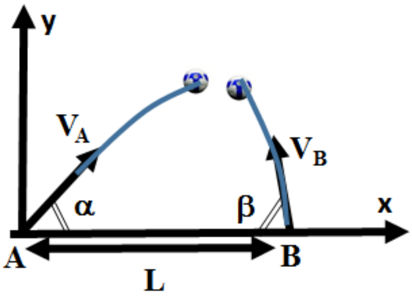
quella massima che consente di raggiungere B: $v_{\max} = \dfrac{L+D}{\cos\alpha}\sqrt{\dfrac{g}{2((L+D)tg\alpha - H)}}$ = **14.16 m/s**

Riprova e controllo della traiettoria:
A conferma che la palla cada sul terrapieno dall'alto, come riportato in figura, si deve verificare che il punto P sia successivo al raggiungimento dell'apice W della parabola. Ciò corrisponde sulle ascisse $x_2 \geq x_W = \dfrac{L_{\max}}{2} = \dfrac{V_A^2\sin\alpha\cos\alpha}{g} = \dfrac{x^2 tg\alpha}{2(xtg\alpha - H)}$

che è vera se $x \geq \dfrac{2H}{tg\alpha}$ = **6.93 m** (verificato sia per A che per B)



1. Una bomba viene erroneamente lanciata dalla stazione A con la velocità iniziale **V_A=180 km/h** ed inclinazione **α=30°** rispetto all'orizzontale. Al fine di abbaterla in volo, dalla stazione contraerea B viene contemporaneamente lanciato un proiettile con velocità iniziale **V_B** ed inclinazione **β=60°** cone indicato in figura**.** Sapendo che la distanza fra le due stazioni è **L=100m** determinare la velocità **V_B** necessaria per intercettare la bomba in volo e le coordinate del punto dove avviene l'intercettazione.



1BD. Equazioni della cinematica. Le grandezze cinematiche vengono scomposte secondo gli assi x,y.

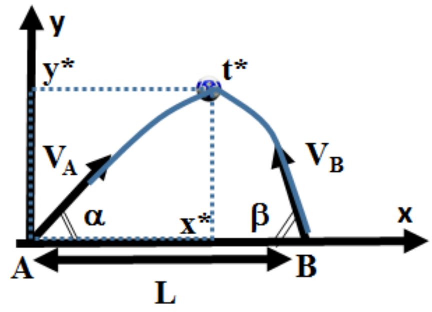
Per il punto materiale A

Lungo l'asse x $\begin{cases} x_A(t) = V_A\cos(\alpha)\cdot t \\ v_x(t) = V_A\cos(\alpha) \\ a_x = 0 \end{cases}$, e lungo l'asse y $\begin{cases} y_A(t) = V_A\sin(\alpha)\cdot t - gt^2/2 \\ v_y(t) = V_A\sin(\alpha) - gt \\ a_y = -g \end{cases}$

Per il punto materiale B

Lungo l'asse x $\begin{cases} x_B(t) = L - V_B\cos(\beta)\cdot t \\ v_x(t) = -V_B\cos(\beta) \\ a_x = 0 \end{cases}$, e lungo l'asse y $\begin{cases} y_B(t) = V_B\sin(\beta)\cdot t - gt^2/2 \\ v_y(t) = V_B\sin(\beta) - gt \\ a_y = -g \end{cases}$

La condizione di intercettazione in volo è quella di esistenza di un istante t* al quale le coordinate dei punti A e B coincidano nello spazio di volo y>0 ossia $\begin{cases} x_A(t^*) = x_B(t^*) \\ y_A(t^*) = y_B(t^*) > 0 \end{cases}$



Dalla condizione $y_A(t^*) = y_B(t^*)$ si ottiene

$V_A\sin(\alpha)\cdot t - gt^2/2 = V_B\sin(\beta)\cdot t - gt^2/2$ da cui $V_B = V_A\dfrac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)}$ **= 28.9 m/s**

Dalla condizione $x_A(t^*) = x_B(t^*)$ si ottiene $V_A\cos(\alpha)\cdot t = L - V_B\cos(\beta)\cdot t$ da cui

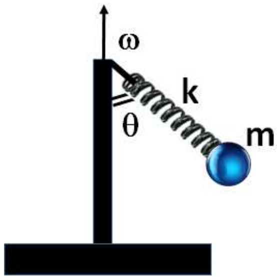
$t^* = \dfrac{L}{V_A\cos(\alpha) + V_B\cos(\beta)\cdot}$ da cui $t^* = \dfrac{L}{V_A}\cdot\dfrac{\sin(\beta)}{\sin(\beta)\cos(\alpha) + \sin(\alpha)\cos(\beta)} = \dfrac{L}{V_A}\cdot\dfrac{\sin(\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$ **=1.73 s**

Le coordinate del punto di intersezione fra le parabole dei due punti materiali sono:

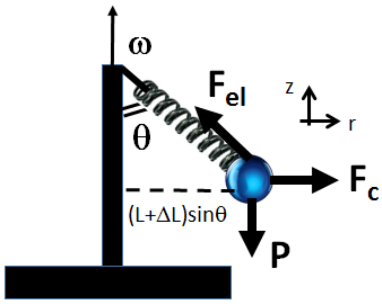
Ascissa : $x^* = x_A(t^*) = L\dfrac{\sin(\beta)\cos(\alpha)}{\sin(\alpha+\beta)}$ **=75 m**

Ordinata: $y^* = y_A(t^*) = V_A\sin(\alpha)\cdot t^* - gt^{*2}/2 =$ **28.6 m (> 0)**

2. Una giostra ruota uniformemente intorno ad un asse verticale. Una massa **m=10kg** ruota intorno all'albero rotante per il tramite di un filo elastica di massa trascurabile e di lunghezza a riposo **L=4 m** e di costante elastica **k=500 N/m**. Sapendo che la giostra gira ad una velocità angolare di crociera **ω=5rad/s** e che il filo elastico subisce a regime un allungamento statico **ΔL** (senza innesco di oscillazioni) calcolare l'angolo di inclinazione **θ** (rispetto alla verticale) e l'allungamento a regime del filo **ΔL**



2BC. La massa è soggetta alla forza peso complessiva **P=mg**, alla forza elastica di richiamo **F_{el}=kΔL (**supposta costante durante la rotazione, una volta esaurite le oscillazioni**)** ed alla forza centrifuga **F_c=mω²r** dove il raggio della circonferenza è **r=(L+ΔL)sinβ.** Applicando il 2° principio della dinamica e proiettando le forze lungo gli assi r,z



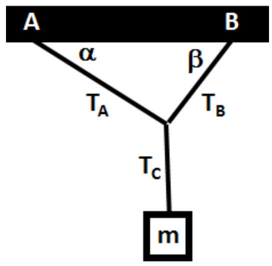
$$\begin{array}{l} r) \\ z) \end{array}\begin{cases} F_c - F_{el}\sin\theta = 0 \\ F_{el}\cos\theta - P = 0 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} F_{el}\sin\theta = F_c = m\omega^2 r = m\omega^2(L+\Delta L)\sin\theta \\ F_{el}\cos\theta = mg \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_{el} = k\Delta L = m\omega^2(L+\Delta L) \\ \cos\theta = \dfrac{mg}{F_{el}} = \dfrac{mg}{k\Delta L} \end{cases}$$

Dalla prima equazione si ottiene l'allungamento $\Delta L = \dfrac{m\omega^2}{k - m\omega^2}L$ **= 4m**

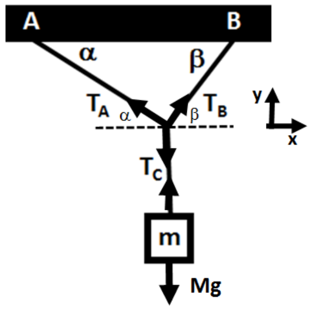
Dalla seconda $\cos\theta = \dfrac{mg}{k\Delta L} = \dfrac{g\left(1 - \dfrac{m\omega^2}{k}\right)}{\omega^2 L}$ **=0.049** da cui **l'angolo** del pendolo conico **θ=87° 11'**

2. Una blocco di massa m è appeso ad una fune verticale che è annodata per l'altro capo ad altre due funi fissate al soffitto nei punti A e B. Le due funi sono entrambe tese ed inclinate di angoli **α=30° e β=45°** rispetto al soffitto. Sapendo che la tensione **T_B=150 N** determinare le rimanenti due tensioni T_A e T_C ed il valore della massa appesa**. Facoltativo:** Sapendo che ciascuna delle 3 funi si spezza per **T>T_{max}=400N** trovare quale è il valore massimo della massa che è possibile appendere (sempre con **α=30°** e **β=45°**)



2AD. Il punto che raccoglie le tre tensioni **T_A, T_B, T_C** è privo di massa. In queste condizioni la somma vettoriale delle tre tensioni nel punto deve annullarsi. Scomponendo le forze lungo gli assi x,y si ha:

$$\begin{array}{l} x) \\ y) \end{array}\begin{cases} T_B\cos\beta - T_A\cos\alpha = 0 \\ T_A\sin\alpha + T_B\sin\beta - T_C = 0 \end{cases} \quad \text{da cui si ottiene}$$



$$
\begin{aligned}
x)&\begin{cases} T_A = T_B \dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha} \\ T_C = T_A \sin\alpha + T_B \sin\beta = T_B \dfrac{\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha} = T_B \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha} \end{cases}\\
y)&
\end{aligned}
$$

Svolgendo i calcoli si ottiene : **T_A=122.5 N** e **T_C=mg=167 N**

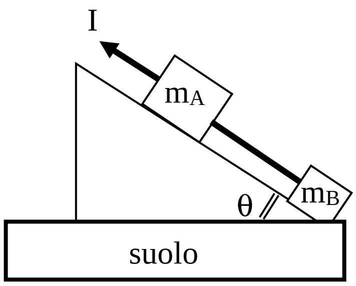
da cui si calcola il valore della massa appesa **m=T_C/g=17 kg**

Facoltativo: dati gli angoli α e β, vale la relazione per le tensioni **$T_C>T_B>T_A$**

Ciò viene dimostrato dalle $T_A = T_B \dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha} = 0.816 \cdot T_B$, e $T_C = T_B \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha} = 1.115 \cdot T_B$

Pertanto il filo che rischia la rottura è quello in verticale. La massa appesa massima vale quindi **m_{max}=T_{Cmax}/g=40.8 kg**

3. Due blocchi rispettivamente di massa m_A=4 kg ed m_B=2 kg sono collegati da una fune e posti su di un piano inclinato di θ=30° rispetto all'orizzontale. Per far procedere in salita il gruppo si rende necessario applicare un impulso I=6Ns applicato al blocco in testa lungo il pendio. Conoscendo il valore del coefficiente dell'attrito dinamico del blocco B μ_{dB}=0.5 determinare dopo quanto tempo il gruppo si ferma.



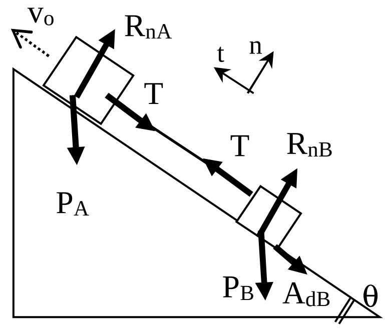
3AD. L'impulso applicato dall'esterno al tempo t=0 è in grado di far variare la quantità di moto del sistema al tempo t=0, mentre le altre forze esterne (forze peso e forza di attrito) forniscono al sistema impulsi trascurabili (poiché $dt \to 0$ allora $Fdt \to 0$)
Applicando il teorema dell'impulso e della variazione della q.d.m. al tempo t=0

$I = \Delta p = M_{tot} v_o - M_{tot} 0 = M_{tot} v_o$ da cui la velocità iniziale del sistema $v_o = I/(m_A + m_B)$**=1m/s**

Scomponendo le forze che agiscono sui due blocchi lungo gli assi n, t si ottiene:

blocco A:
$$
\begin{aligned}
n)&\begin{cases} R_{nA} - P_A \cos\theta = 0 \\ -T - P_A \sin\theta = m_A a \end{cases}\\
t)&
\end{aligned}
$$

blocco B:
$$
\begin{aligned}
n)&\begin{cases} R_{nB} - P_B \cos\theta = 0 \\ T - P_B \sin\theta - A_{dB} = m_B a \end{cases}\\
t)&
\end{aligned}
$$



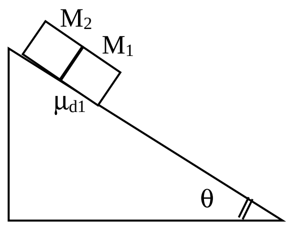
Sommando le espressioni lungo l'asse del moto t si ottiene

$-\left(P_A+P_B\right)\sin\theta - A_{dB} = \left(m_A+m_B\right)a$ ove la forza di attrito vale $A_{dB} = \mu_{dB}R_{nB} = \mu_{dB}m_B g\cos\theta$

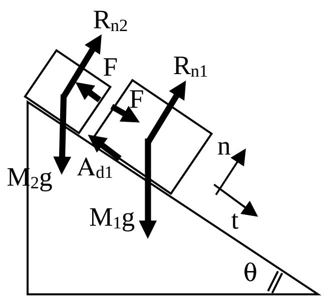
risolvendo si ottiene la decelerazione del c.d.m. $a = -g\left[\sin\theta + \dfrac{\mu_{dB}m_B}{m_A+m_B}\cos\theta\right]$ = **- 6.31 m/s²**

Il moto è uniformemente decelerato ed il tempo in cui si ferma $t = \dfrac{v_o}{|a|}$ **= 158 ms**

3. Due blocchi di massa M_1=1 kg ed M_2=3 kg in contatto l'un con l'altro scivolano lungo un piano scabro inclinato di θ=40° rispetto all'orizzontale. Sapendo che il blocco anteriore è frenato da una forza di attrito di coefficiente μ_{d1}=0.5 determinare l'accelerazione comune di caduta del gruppo dei blocchi e l'intensità delle forze interne di contatto fra i due blocchi.



3BC. Studio delle forze sui singoli blocchi



Blocco anteriore

Scomponendo tutte le forze agenti lungo gli assi t,n

$$\begin{cases} \text{t)}\ M_1 g\sin\theta - \mu_{d1}M_1 g\cos\theta + F = M_1 a \\ \text{n)}\ R_{n1} = M_1 g\cos\theta \end{cases}$$

Blocco posteriore

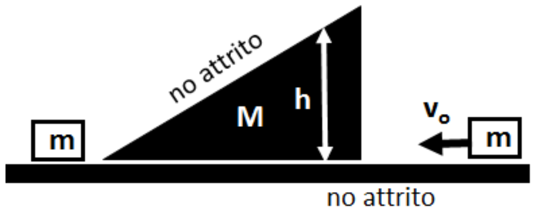
Scomponendo tutte le forze agenti lungo gli assi t,n

$$\begin{cases} t)\ M_2 g\sin\theta - F = M_2 a \\ n)\ R_{n2} = M_2 g\cos\theta \end{cases}$$

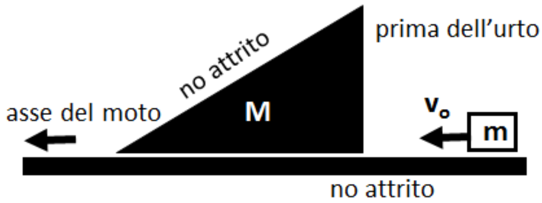
Sommando le equazioni lungo t si ha l'accelerazione $a = g\dfrac{\left(M_1+M_2\right)\sin\theta - \mu_{d1}M_1\cos\theta}{M_1+M_2}$ = **5.36 m/s²**

e la forza di contatto tra i blocchi $F = M_1\left(a - g\sin\theta + \mu_{d1}g\cos\theta\right) = \dfrac{M_1M_2\mu_{d1}g\cos\theta}{M_1+M_2}$ =**2.815 N**

4. Un blocco di massa **m=10 kg** si muove alla velocità costante **v₀=3m/s** lungo un piano orizzontale liscio. In un certo istante il blocco urta elasticamente un cuneo di massa **M=20 kg** inizialmente fermo sul piano. Dopo l'urto il cuneo prende a muoversi ed incontra un secondo blocco anch'essa di massa **m=10 kg** che risale lungo il lato inclinato liscio del cuneo fino a raggiungere la quota massima **h** (rispetto al piano orizzontale). **Determinare** la massima altezza **h** raggiunta e le velocità del sistema in quella situazione.

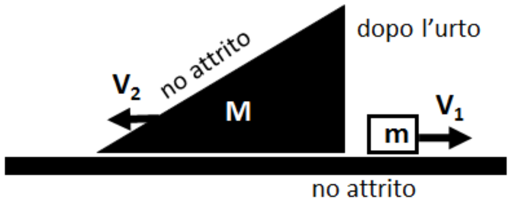


4AD. L'urto centrale elastico fra il primo blocco *m* in moto, ed il cuneo *M* fermo, si risolve trovando le velocità dopo l'urto dei due corpi, imponendo la contemporanea conservazione dell'energia cinetica e della quantità di moto del sistema. Risolvendo la nuova velocità del blocco *m*



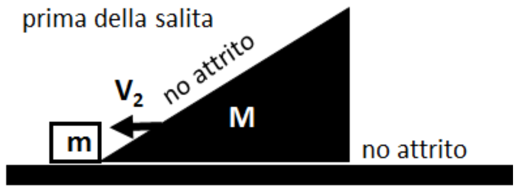
$$V_1 = \left(\frac{m-M}{m+M}\right)v_o + \left(\frac{2M}{m+M}\right)0 = -\frac{v_o}{3} = \mathbf{-1m/s}$$

(le velocità sono positive se nel senso dell'asse del moto)

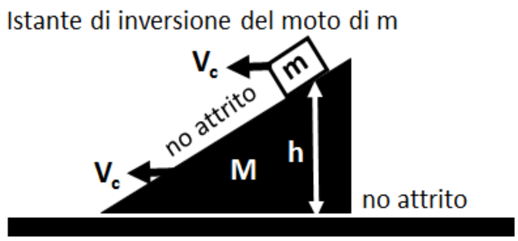


La velocità cui viene lanciato il cuneo *M*

$$V_2 = \left(\frac{2m}{m+M}\right)v_o + \left(\frac{M-m}{m+M}\right)0 = \frac{2}{3}v_o = \mathbf{+2m/s}$$



Successivamente il cuneo incontra il secondo blocco che sale percorrendo senza attrito il pendio del cuneo, fino a raggiungere, per un istante, la massima quota h per poi ridiscendere. Durante la salita le uniche forze esterne agenti sul sistema massa-cuneo sono le forze peso e la reazione normale del piano. Essendo esse tutte dirette lungo la verticale, **si conserva** la **componente orizzontale della quantità di moto del sistema** tra i due momenti riportati in figura:



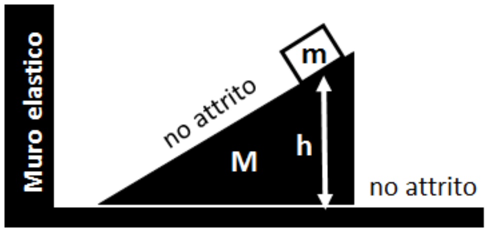
$$MV_2 = (m+M)\cdot V_C \quad \text{da cui} \quad V_C = \left(\frac{M}{m+M}\right)V_2 = \mathbf{+1.33\ m/s}$$

In assenza di attriti si conserva anche l'energia meccanica fra i due momenti riportati in figura:

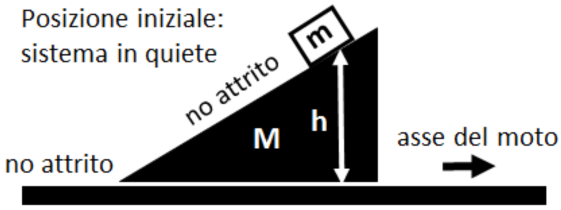
$$\frac{1}{2}MV_2^2 = \frac{1}{2}(m+M)\cdot V_C^2 + mgh \quad \text{ossia} \quad \frac{1}{2}MV_2^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{M^2}{m+M}\right)\cdot V_2^2 + mgh$$

da cui si ricava la **massima quota h** raggiunta prima della discesa $h = \left(\frac{M}{m+M}\right)\cdot\frac{V_2^2}{2g} = \mathbf{13.6\ cm}$

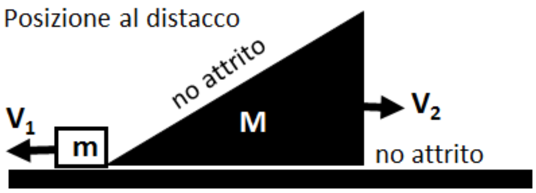
4. Un cuneo di massa **M=15 kg** è inizialmente fermo sopra un piano orizzontale, ma libero di muoversi senza attrito su di esso. Un blocco di massa **m=5 kg** è anch'esso tenuto inizialmente fermo sulla sommità del cuneo ad una quota **h=2m** rispetto al piano orizzontale. Il blocco **m** scivola senza attrito sul cuneo fino a raggiungere il piano orizzontale che percorre per un breve tratto prima di urtare elasticamente un muro verticale di massa infinita. Il blocco m, rilanciato indietro dall'urto, rincorre il cuneo e vi risale sino ad una nuova quota **h***. **Determinare** la nuova altezza **h*** e le **velocità del blocco m prima e dopo l'urto** con il muro.



4BC. Durante la discesa del blocco *m* lungo il pendio liscio del cuneo le uniche forze esterne agenti sul sistema massa-cuneo sono le forze peso e la reazione normale del piano. Essendo esse tutte dirette lungo la verticale, **si conserva** la **componente orizzontale della quantità di moto del sistema** tra i due momenti riportati in figura: $p_{C,x}^{prima} = P_{C,x}^{dopo}$



da cui $0 = MV_2 + mV_1$, e $V_1 = -\frac{MV_2}{m}$

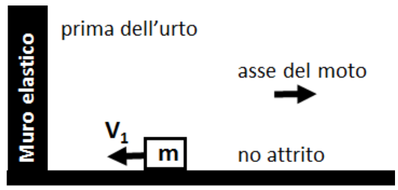


In assenza di attriti si conserva anche l'energia meccanica fra i due momenti riportati in figura: $E_m^{prima} = E_m^{dopo}$

$mgh = \frac{1}{2}MV_2^2 + \frac{1}{2}\frac{M^2}{m}V_2^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{M(m+M)}{m}\right)V_2^2$ da cui le

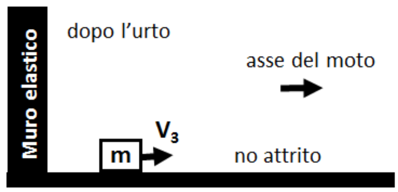
velocità del cuneo $V_2 = \sqrt{2gh}\sqrt{\frac{m^2}{M(M+m)}}$ **= 1.81 m/s,** e **del blocco** $V_1 = -\sqrt{2gh}\sqrt{\frac{M}{M+m}}$ **= -5.42 m/s**

Successivamente avviene l'urto elastico del blocco con un muro ideale di massa infinita che inverte la direzione della velocità del blocco conservandone la sua energia cinetica per cui **V_3= -V_1**

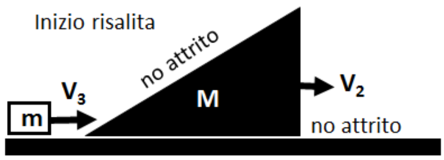


Una ulteriore dimostrazione si ottiene ricavando la formula della velocità del blocco V_3 successiva all'urto elastico con un la parete verticale di massa $M_{pv} \to \infty$ cosicché

$$V_3 = \left(\frac{m - M_{pv}}{m + M_{pv}}\right)V_1 + \left(\frac{2M_{pv}}{m + M_{pv}}\right)0 = \left(\frac{m-\infty}{m+\infty}\right)V_1 = -V_1 = \textbf{+5.42 m/s}$$

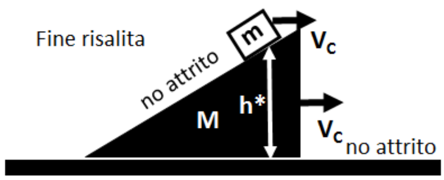


Essendo **V_3>V_2** il blocco può quindi raggiungere il cuneo iniziando la fase di risalita in cui, analogamente alla fase di discesa, **si conserva la componente orizzontale della quantità di moto del sistema**



$mV_3 + MV_2 = (M+m)\cdot V_C$ da cui la velocità acquistata dal c.d.m.

$$V_C = \frac{mV_3 + MV_2}{M+m} = \frac{-mV_1 + MV_2}{M+m} = \frac{MV_2 + MV_2}{M+m} = \frac{2M}{M+m}V_2 = \textbf{2.71 m/s}$$



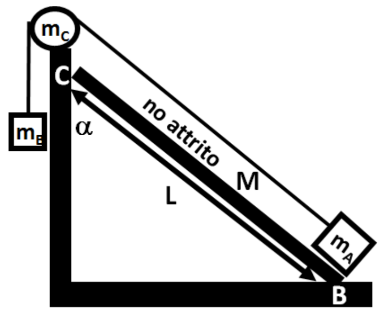
Ed in assenza di attriti **si conserva l'energia meccanica del sistema (**che è sempre rimasta costante al valore iniziale **E_m=mgh).** Imponendo la sua conservazione nelle varie fasi

$$mgh^* + \frac{1}{2}(M+m)V_C^2 = \frac{1}{2}mV_3^2 + \frac{1}{2}MV_2^2 = mgh$$

dalla quale conoscendo **h, m, M**, o avendo già calcolato **V_2, V_3, V_c** si può facilmente ricavare **h***. Per ricavare una espressione analitica compatta basta sfruttare l'uguaglianza con l'ultimo termine

$$h^* = h - \left(\frac{m+M}{m}\right)\cdot\frac{V_C^2}{2g} = h - \frac{4M^2}{m(M+m)}\frac{V_2^2}{2g} = h - h\frac{4mM}{(M+m)^2} = h\left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2 = \frac{h}{4} = \mathbf{50\ cm}$$

5AC. Una barra omogenea di massa **M=20 kg** e di lunghezza **L=3m** è appoggiata ad una parete verticale in un punto C, inclinata di un angolo **α=30°** rispetto alla verticale. La barra poggia anche nel punto B sul pavimento scabro ossia in grado di sviluppare anche una forza di attrito **(μ_s=0.3)** che garantisce la statica della scala. Alla base della scala (nel punto B) è posizionato un blocco **m_A=10 kg** collegato per una fune ad una carrucola di massa **m_C=4 kg** e ad una massa **m_B=20 kg**. Al tempo t=0 il blocco m_A comincia a salire lungo la barra scivolando senza attrito. In un certo istante il blocco raggiunge una posizione che rompe la stabilità della barra che cade in terra. Determinare la posizione di tale punto ed in quale tempo ciò avviene [$I_{carrucola}=mr^2/2$]

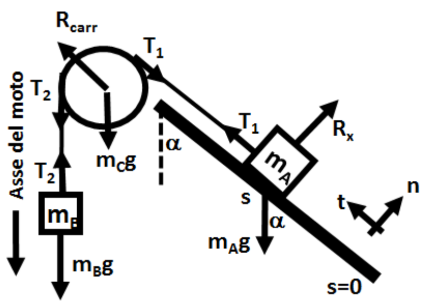


5. La struttura può essere vista come la combinazione di due sistemi interagenti: il sistema statico della barra poggiata sulla parete e sul pavimento, ed un sistema dinamico del tipo della macchina di Atwood che sposta il blocco m_A sulla barra. Analizziamo dapprima il sistema mobile.

Studio della macchina di Atwood

Le forze su m_A scomposte lungo assi t,n: $\begin{cases} t)\ T_1 - m_A g\cos\alpha = m_A a \\ n)\ R_x = m_A g \sin\alpha \end{cases}$

(**R_x** è la reazione di sostegno della barra sulla massa m_A)



Le forze sulla massa m_B lungo l'asse del moto: $m_B g - T_2 = m_B a$

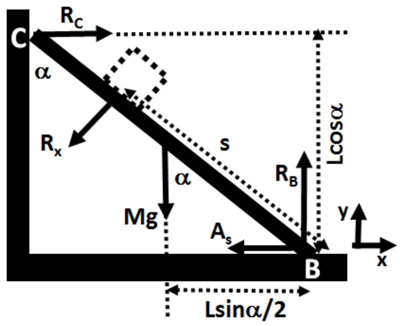
L'equazione dei momenti sulla carrucola: $T_2 r - T_1 r = I_c\alpha = I_C\frac{a}{r}$ da cui $T_2 - T_1 = \frac{I_C}{r^2}a = \left(\frac{m_C}{2}\right)a$.

Sommando le equazioni $m_B g - m_A g\cos\alpha = \left(m_B + m_A + \frac{m_C}{2}\right)a$

da cui l'accelerazione di salita $a = g\dfrac{m_B - m_A\cos\alpha}{m_B + m_A + \frac{m_C}{2}}$ =**3.585 m/s²**

Il moto di m_A è quindi uniformemente accelerato con legge: $s(t) = \frac{1}{2}at^2$

ed il **tempo** per raggiungere la posizione s sulla barra è $t^* = \sqrt{\dfrac{2s}{a}} = \sqrt{\dfrac{2s}{g} \cdot \dfrac{m_A + m_B + \dfrac{m_C}{2}}{m_B - m_A \cos\alpha}}$



Statica del piano di sostegno
Le forze agenti sulla barra sono: la forza peso **Mg** applicata nel baricentro G, la reazione normale del pavimento $\mathbf{R_B}$ e l'attrito statico $\mathbf{A_s}$ applicate in B, la reazione normale dalla parete verticale $\mathbf{R_C}$ applicate nel punto C**,** e la reazione $\mathbf{R_x}$=$\mathbf{m_A g\sin\alpha}$ sulla barra operata dalla massa m_A (che è esterna al sistema). In condizione statiche devono essere contemporaneamente nulle entrambe le equazioni cardinali.

Proiettando la 1ª equazione cardinale lungo x, y:

$$\begin{matrix} x) \\ y) \end{matrix}\begin{cases} R_C - A_s - R_x\cos\alpha = 0 \\ -Mg - R_x\sin\alpha + R_B = 0 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} R_C = A_s + R_x\cos\alpha \le \mu_s\left(Mg + R_x\sin\alpha\right) + R_x\cos\alpha \\ R_B = Mg + R_x\sin\alpha \end{cases}$$

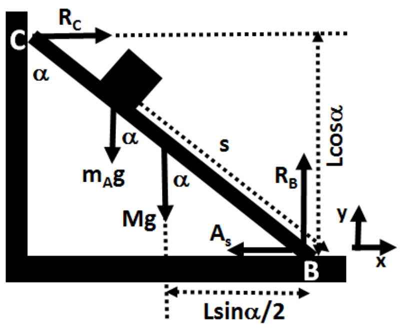
Calcolando la 2ª equazione cardinale nel punto B

$M_{RC} + M_{Mg} + M_{Rx} = R_C L\cos\alpha - MgL\sin\alpha/2 - R_x s = 0$ (positivo - rotazione oraria)

da cui si ricava $s = \dfrac{R_C\cos\alpha - Mg\sin\alpha/2}{R_x}L \le \dfrac{R_x\left(\cos\alpha + \mu_s\sin\alpha\right)\cos\alpha + Mg\left(\mu_s\cos\alpha - \sin\alpha/2\right)}{R_x}L$

e con $\mathbf{R_x}$=$\mathbf{m_A g\sin\alpha}$**,** si ha la posizione critica $s \le L\left[\cos^2\alpha + \mu_s\sin\alpha\cos\alpha + \dfrac{M}{m_A}\left(\dfrac{\mu_s}{tg\alpha} - \dfrac{1}{2}\right)\right]$ = **2.76 m**

ed il **tempo** per raggiungere la posizione critica s : $t^* = \sqrt{\dfrac{2s}{a}}$ =**1.24 s**



Nota bene: un altro ragionamento poteva essere quello di considerare la massa m_A fissa e facente parte del sistema così da considerare la sua forza peso $\mathbf{m_A g}$ ma non le forze interne R_x: **ciò avrebbe però portato ad un risultato differente ed errato**

In questo caso **dalla 1ª equazione cardinale lungo x, y:**

$$\begin{matrix} x) \\ y) \end{matrix}\begin{cases} R_C = A_s \le \mu_s\left(M + m_A\right)g \\ \quad R_B = \left(M + m_A\right)g \end{cases}$$

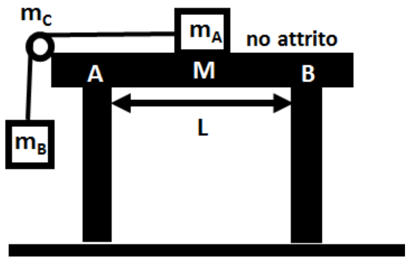
Dalla 2ª equazione cardinale nel punto B

$R_C L\cos\alpha - MgL\sin\alpha/2 - m_A gs\cdot\sin\alpha = 0$ (positivo - rotazione oraria)

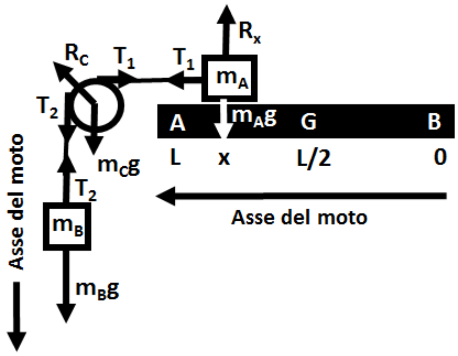
da cui si ricava $s = L\left(\dfrac{R_c}{m_A g tg\alpha} - \dfrac{M}{2m_A}\right) \le L\left(\dfrac{\mu_s}{tg\alpha} + \dfrac{M}{m_A}\left(\dfrac{\mu_s}{tg\alpha} - \dfrac{1}{2}\right)\right)$ = **1.68 m** con **t*=0.967s**

Questo risultato è errato poiché la situazione qui descritta è quella di una massa m_A non mobile ed incardinata in una posizione fissa. Tuttavia, vista la difficoltà dell'esercizio, gli studenti che hanno seguito questo ragionamento coerentemente avranno ugualmente il massimo del punteggio previsto.

5BD. Una lastra orizzontale liscia di massa **M=20kg** è sostenuta da due pilastri nei punti A e B che possono reggere fino ad un carico massimo di **150N**. Sopra la lastra nel punto centrale del segmento AB di lunghezza **L=2m** è appoggiato un blocco di massa **m_A=8kg** che è collegato ad un blocco di massa **m_B=1kg** tramite fune e carrucola di massa **m_C=2kg** non gravanti sui pilastri. Per t>0 il blocco m_A scivola senza attrito orizzontalmente verso A giungendo in una posizione in cui il pilastro in A si rompe. Determinare la posizione di m_A ed in quale istante ciò accade [$I_{carrucola}=mr^2/2$]



5. La struttura può essere vista come la combinazione di due sistemi interagenti: il sistema statico della lastra poggiata sui pilastri, ed un sistema dinamico del tipo della macchina di Atwood che sposta il blocco m_A sulla lastra. Analizziamo dapprima il sistema mobile.



Studio della macchina di Atwood

Le forze sulla massa m_A scomposte lungo x,y: $\begin{cases} x) \; T_1 = m_A a \\ y) \; R_x = m_A g \end{cases}$

Le forze sulla massa m_B lungo l'asse del moto: $m_B g - T_2 = m_B a$

L'equazione dei momenti sulla carrucola: $T_2 r - T_1 r = I_c \alpha = I_C \dfrac{a}{r}$ da cui $T_2 - T_1 = \dfrac{I_C}{r^2} a = \left(\dfrac{m_C}{2}\right) a$

Sommando le equazioni $m_B g = \left(m_B + m_A + \dfrac{m_C}{2}\right) a$ da cui l'acc. $a = g \dfrac{m_B}{m_B + m_A + \dfrac{m_C}{2}} = \dfrac{g}{10}$ =**0.98 m/s²**

Il moto di m_A è quindi uniformemente accelerato: $x(t) = \dfrac{L}{2} + \dfrac{1}{2} a t^2$

ed il **tempo per raggiungere la posizione x** è $t^* = \sqrt{\dfrac{2x-L}{a}} = \sqrt{\dfrac{2x-L}{g} \cdot \dfrac{m_A + m_B + \dfrac{m_C}{2}}{m_B}} = \sqrt{10 \cdot \dfrac{2x-L}{g}}$

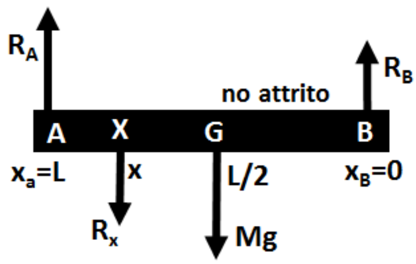
Statica del piano di sostegno

Per determinare la posizione nella quale il piano di sostegno cede occorre imporre le equazioni della statica nelle condizioni estreme in cui la resistenza nel punto A raggiunge il massimo valore **R_A=150 N** (il pilastro in A che è quello maggiormente sollecitato).

Nel punto X agisce anche una forza di reazione **R_x=m_Ag** opposta a quella che sostiene la massa m_A

1ª equazione cardinale *(proiettata lungo la verticale)*

$R_A + R_B - R_x - Mg = 0$ da cui $R_B = (M + m_A)g - R_A =$ **124 N**



2ª equazione cardinale (*calcolata rispetto ad un asse per B*).

$M_{RA} + M_{Rx} + M_{Mg} + M_{RB} = 0$

M_{RB}=0 (braccio nullo), $M_{RA} = -R_A L$ (negativo - rotazione oraria)

$M_{Rx} = m_A g x$, $M_{Mg} = Mg(L/2)$ (positivi - rotazione antioraria)

da cui $x^* = \left(\dfrac{R_A}{m_A g} - \dfrac{M}{2 m_A}\right) L$ =**1.327 m** che viene raggiunta **al tempo** $t^* = \sqrt{10 \cdot \dfrac{2x^* - L}{g}}$ **=0.816 s**