Università di Roma "La Sapienza"
Facoltà di Ingegneria
FISICA

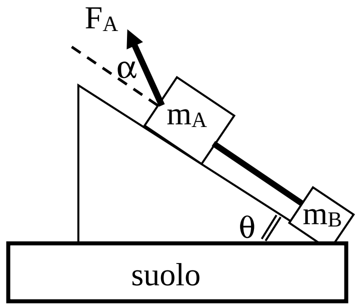
A.A. 2012-2013

Ingegneria Gestionale (M-Z)

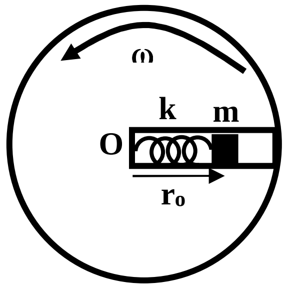
Esonero del 26 Aprile 2013 – Tipologia **A**

1. Due automobili A e B viaggiano nella stessa corsia con velocità differenti V_A=140km/h e V_B=50km/h. Quando la macchina A si trova dietro B ad una distanza L troppo ravvicinata il conducente di A aziona il freno che esercita una decelerazione costante di valore assoluto $a_A=4m/s^2$. Calcolare la distanza minima di sicurezza L_{min} al di sotto della quale l'urto diviene inevitabile. **Facoltativo**: immaginando che il conducente di A inizi a frenare ad una distanza 0.8* L_{min} e che il conducente di B accorgendosi della frenata decida, con un tempo di reazione di 1s, di evitare l'urto accelerando uniformemente determinare il valore minimo della accelerazione a_B necessaria

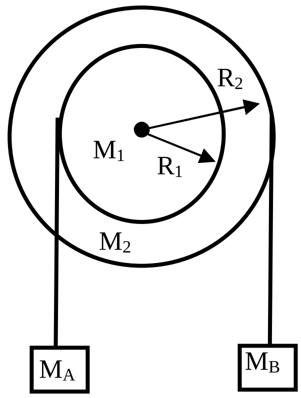
2. Due blocchi rispettivamente di massa m_A=3 kg ed m_B=2 kg sono collegati da una fune e posti su di un piano inclinato di θ=20° rispetto all'orizzontale. Per far procedere in salita il gruppo si rende necessario applicare una forza F_A=60N applicata al blocco in testa con un angolo di inclinazione α=10° rispetto al pendio. Conoscendo il valore del coefficiente degli attriti dinamici dei due blocchi con il piano inclinato μ_{dA}=0.4 e μ_{dB}=0.5 determinare l'accelerazione del sistema e la tensione della fune.



3. Una piattaforma circolare è libera di ruotare su un piano orizzontale alla velocità angolare costante ω=3 rad/s. All'interno della piattaforma, lungo un suo diametro, è praticata una scanalatura dove è presente una molla di costante elastica **k**=20 N/m, lunghezza a riposo $\mathbf{r_o}$=10cm, collegata da un lato all'asse di rotazione dall'altro ad una massa **m**=2kg libera di muoversi senza attrito lungo la scanalatura. Determinare il periodo di oscillazione della massa e la posizione del nuovo punto di equilibrio



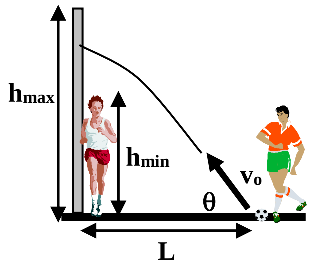
4. Una carrucola è costituita da due dischi omogenei e massicci di raggi R_1 =1m ed R_2 =1.5m di massa M_1=2kg e M_2=5kg saldati in modo concentrico, ed è libera di ruotare senza attrito attorno al centro C. due masse M_A=5kg ed M_B=10kg sono collegate alla carrucola mediante due funi inestensibili di massa trascurabile che si avvolgono sui due dischi. Si determinino il momento di inerzia e l'accelerazione della carrucola



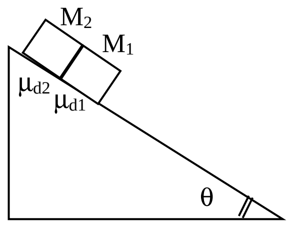
5 Una palla da bowling è lanciata con velocità di traslazione $v_o = 7\,m/s$ su una corsia in lieve pendenza in salita di α=20° rispetto all'orizzontale in modo che inizialmente slitti senza ruotare (pura traslazione). I coefficienti di attrito tra la palla e il parquet sono μ_d=0.3 e μ_s=0.4 . In conseguenza della forza di attrito la palla prenderà a ruotare fino all'instaurarsi di un moto di puro rotolamento. Si determinino le seguenti grandezze cinematiche: (a) l'accelerazione del centro di massa a_c, (b) l'istante in cui la palla comincia a rotolare t_{rot}, (c) la quota massima raggiunta prima di invertire il moto

Università di Roma "La Sapienza"
Facoltà di Ingegneria
FISICA
A.A. 2012-2013
Ingegneria Gestionale (M-Z)
Esonero del 26 Aprile 2013 – Tipologia **B**

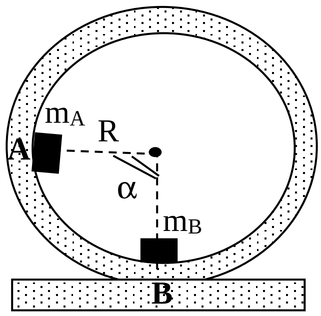
1. Un calciatore corre verso la porta e attende l'istante propizio per tirare in modo che la palla scavalchi il portiere che attende fermo sulla linea di porta. Quel calciatore imprime usualmente una velocità iniziale alla sfera v_o=70km/h con inclinazione sull'orizzontale di θ=30°. Sapendo che la sfera deve infilarsi nella zona fra portiere e traversa ad una quota $h_{min}<y<h_{max}$ (h_{min}=2m, h_{max} =2.5m) valutare a che distanza L dalla porta dovrà calciare, calcolando l'intervallo di distanze minima e massima L_{min} e L_{max} per poter fare goal con le modalità sopra indicate.



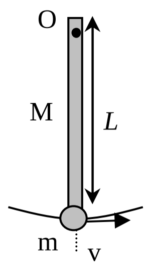
2. Due blocchi in contatto l'un con l'altro scivolano lungo un piano scabro inclinato di θ=30° rispetto all'orizzontale. Sapendo che il blocco anteriore M_1=3 kg è frenato da una forza di attrito di coefficiente μ_{d1}=0.6 superiore all'attrito esercitato sul blocco posteriore di massa M_2=2 kg (μ_{d2}=0.3) determinare l'accelerazione comune di caduta del gruppo dei blocchi. Determinare inoltre l'intensità delle forze interne di contatto fra i due blocchi.



3. Un blocco di massa m_A=2kg è posizionato all'interno di uno scivolo cilindrico liscio di raggio R=2m, nella posizione A corrispondente ad un angolo α=90° rispetto alla verticale. Il blocco viene lasciato cadere lungo lo scivolo finendo per urtare elasticamente un blocco di massa m_B posto in quiete sul fondo dello scivolo (B). Determinare per quali valori della massa m_B il blocco urtato riesce a compiere il giro della morte (intervallo m_{Bmin} e m_{Bmax})



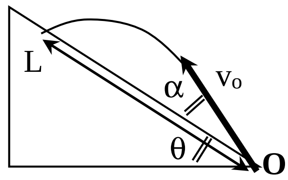
4 Un pendolo composto è formato da un'asta rigida omogenea di massa M=4kg, di lunghezza L=40cm, libera di ruotare intorno al cardine O. All'estremo della sbarra è anche alloggiata una piccola massa m=1kg. Supponendo di imprimere una piccola velocità v=0.5m/s all'estremo libero dell'asta, determinare l'angolo massimo di oscillazione del sistema e fornire una stima del tempo necessario per tornare nella posizione verticale di partenza. [Suggerimento: $I_{asta}=ML^2/3$]



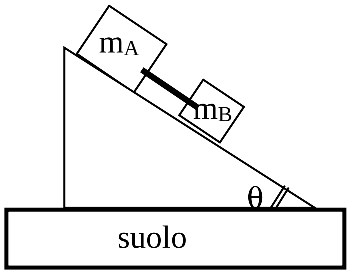
5 Una palla da bowling è lanciata con velocità di traslazione $v_o = 7\,m/s$ su una corsia in lieve pendenza in salita di α=20° rispetto all'orizzontale in modo che inizialmente slitti senza ruotare (pura traslazione). I coefficienti di attrito tra la palla e il parquet sono μ_d=0.3 e μ_s=0.4 . In conseguenza della forza di attrito la palla prenderà a ruotare fino all'instaurarsi di un moto di puro rotolamento. Si determinino le seguenti grandezze cinematiche: (a) l'accelerazione del centro di massa a_c, (b) l'istante in cui la palla comincia a rotolare t_{rot}, (c) la quota massima raggiunta prima di invertire il moto

Università di Roma "La Sapienza"
Facoltà di Ingegneria
FISICA
A.A. 2012-2013
Ingegneria Gestionale (M-Z)
Esonero del 26 Aprile 2013 – Tipologia **C**

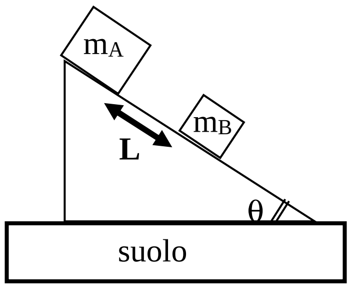
1. Un cannone è posizionato nel punto O ai piedi di una collina assimilabile ad un piano inclinato di θ=30° sull'orizzontale. Il proiettile viene lanciato con una velocità iniziale v_o=200km/h ed una inclinazione α=20° rispetto però al piano inclinato della collina Determinare la distanza L dal punto di lancio alla quale il proiettile impatterà con il terreno collinare.



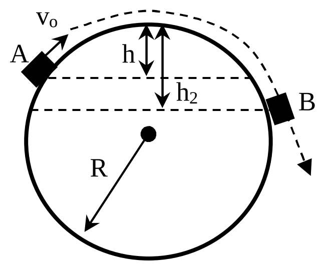
2. Due blocchi rispettivamente di massa m_A=3 kg ed m_B=2 kg sono collegati da una fune e posti su di un piano inclinato di θ=40° rispetto all'orizzontale. Conoscendo il valore del coefficiente dell'attrito statico μ_{sB}=0.3 del blocco B determinare quale debba essere il coefficiente di attrito statico di A per garantire l'equilibrio la statica del sistema.



3. Un blocco A di massa m_A=2 kg inizialmente fermo scivola lungo un piano inclinato di θ=20° rispetto all'orizzontale con un attrito dinamico μ_{dA}=0.1 coprendo una distanza L=1m prima di urtare elasticamente il blocco B di massa m_B=5 kg inizialmente fermo più a valle. Determinare le velocità dei due blocchi dopo l'urto e conoscendo il coefficiente di attrito dinamico del secondo blocco μ_{dB}=0.5 determinare lo spazio percorso prima di fermarsi. Trascurare gli effetti legati a possibili urti successivi.



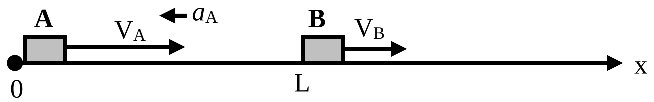
4. Un blocco di massa m posizionato in A sulla superficie esterna di un tubo cilindrico liscio di raggio R=1m viene lanciato con velocità v_o=1.5 m/s in modo da raggiungere l'apice colmando il dislivello h=10cm per poi discendere dal versante opposto Il blocco infine si distacca dal cilindro nel punto B. Determinare il dislivello h_2 tra l'apice ed il punto di distacco B.



5 Una palla da bowling è lanciata con velocità di traslazione $v_o = 7\,m/s$ su una corsia in lieve pendenza in salita di α=20° rispetto all'orizzontale in modo che inizialmente slitti senza ruotare (pura traslazione). I coefficienti di attrito tra la palla e il parquet sono μ_d=0.3 e μ_s=0.4 . In conseguenza della forza di attrito la palla prenderà a ruotare fino all'instaurarsi di un moto di puro rotolamento. Si determinino le seguenti grandezze cinematiche: (a) l'accelerazione del centro di massa a_c, (b) l'istante in cui la palla comincia a rotolare t_{rot}, (c) la quota massima raggiunta prima di invertire il moto

Università di Roma "La Sapienza"
Facoltà di Ingegneria
FISICA
A.A. 2012-2013
Ingegneria Gestionale (M-Z)
Esonero del 26 Aprile 2013 – Tipologia **A**

5. Confronto fra i moti rettilinei di A e B



Equazioni cinematiche prima auto A

$$\begin{cases} x_A = v_A \cdot t - a_A t^2/2 \\ v = v_A - a_A \cdot t \\ a = -a_A \end{cases}$$

Equazioni cinematiche seconda auto B

$$\begin{cases} x_B = L + v_B \cdot t \\ v = v_B \\ a = 0 \end{cases}$$

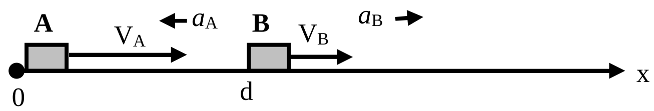
Assenza di tamponamento

$x_B > x_A$ da cui $L + v_B t > v_A t - a_A t^2/2$ da cui $t^2 - 2\dfrac{v_A - v_B}{a_A} t + \dfrac{2L}{a_A} > 0$

La disequazione è verificata per qualunque tempo solo quando il discriminante è negativo

$$\frac{\Delta}{4} = \left(\frac{v_A - v_B}{a_A}\right)^2 - \frac{2L}{a_A} < 0 \qquad \text{ossia} \qquad L > L_{\min} = \frac{(v_A - v_B)^2}{2a_A} = \mathbf{78.1\ m}$$

Facoltativo: essendo la distanza iniziale inferiore alla distanza di sicurezza $d = 0.8 L_{\min} =$ **62.5 m**
L'auto B accelera dopo un tempo di reazione t_o=1s



Equazioni dell'auto B dopo il tempo di reazione ($t>t_o$)

$$\begin{cases} x_B = (d + v_B \cdot t_o) + v_B (t - t_o) + a_B (t - t_o)^2/2 = d + v_B t + a_B (t - t_o)^2/2 \\ v = v_B + a_B (t - t_o) \\ a = 0 \end{cases}$$

Assenza di tamponamento $x_B > x_A$ segue $d + v_B t + a_B (t - t_o)^2/2 > v_A t - a_A t^2/2$

da cui $(a_A + a_B)t^2 - 2(v_A - v_B + a_B t_o)t + 2d + a_B t_o^2 > 0$

La disequazione è verificata per qualunque tempo solo quando il discriminante è negativo

$$\Delta/4 = (v_A - v_B + a_B t_o)^2 - (a_A + a_B)(2d + a_B t_o^2) < 0$$

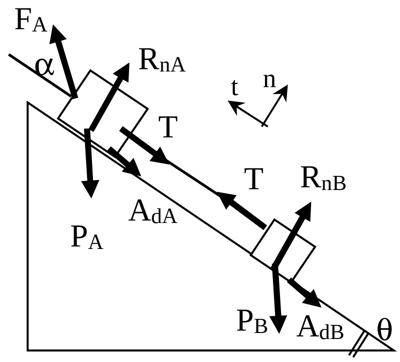
$$\Delta/4 = (v_A - v_B)^2 + 2a_B t_o (v_A - v_B) + a_b^2 t_o^2 - (a_A + a_B)(2d + a_B t_o^2) < 0$$

da cui $(v_A - v_B)^2 - 2d a_A < a_B \left[a_A t_o^2 + 2d - 2t_o (v_A - v_B)\right]$

$$a_B > \frac{(v_A - v_B)^2 - 2d a_A}{2d + a_A t_o^2 - 2t_o (v_A - v_B)} = \mathbf{1.58\ m/s^2}$$

2. Scomponendo le forze che agiscono sui due blocchi lungo gli assi n, t si ottiene:

blocco A: $\begin{cases} n) & R_{nA} - P_A\cos\theta + F_A sen\alpha = 0 \\ t) & F_A\cos\alpha - T - P_A\sin\theta - A_{dA} = m_A a \end{cases}$



con verifica che A rimanga a contatto con il piano inclinato
$R_{nA} = P_A\cos\theta - F_A sen\alpha = 17.2N > 0$

blocco B: $\begin{cases} n) & R_{nB} - P_B\cos\theta = 0 \\ t) & T - P_B\sin\theta - A_{dB} = m_B a \end{cases}$

Sommando le espressioni lungo l'asse del moto t si ottiene

$$F_A\cos\alpha - (P_A + P_B)\sin\theta - (A_{dA} + A_{dB}) = (m_A + m_B)a$$

dove le forze di attrito dinamico sono per definizione $\begin{cases} A_{dA} = \mu_{dA}R_{nA} = \mu_{dA}(m_A g\cos\theta - F_A sen\alpha) \\ A_{dB} = \mu_{dB}m_B g\cos\theta \end{cases}$

risolvendo per $a = \dfrac{F_A(\cos\alpha + \mu_{dA}sen\alpha) - (m_A + m_B)g\sin\theta - (\mu_{dA}m_A + \mu_{dB}m_B)g\cos\theta}{m_A + m_B} = \mathbf{5.25\ m/s^2}$

da cui la tensione della fune si calcola con $T = m_B[a + g(\sin\theta + \mu_{dB}\cos\theta)] = \mathbf{26.4\ N}$

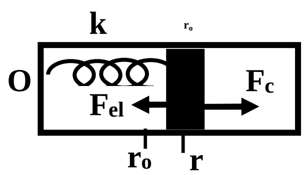
3. **Studio delle forze agenti lungo l'asse radiale** $m\omega^2 r - k(r - r_o) = ma = m\dfrac{d^2r}{dt^2}$

dividendo per la massa $\dfrac{d^2r}{dt^2} + \left(\dfrac{k}{m} - \omega^2\right)\cdot r = \dfrac{k}{m}r_o$, posto $\omega_o = \dfrac{k}{m}$, $\dfrac{d^2r}{dt^2} + \left(\omega_o^2 - \omega^2\right)\cdot r = \omega_o^2 r_o$

essendo $\omega_o > \omega$ $\begin{cases} \omega_o^2 = k/m = 10\,rad^2/s^2 \\ \omega^2 = 9\,rad^2/s^2 \end{cases}$ il sistema ammette oscillazioni

La soluzione si ottiene sovrapponendo la soluzione dell'omogenea associata

con l'integrale particolare $r(t) = A\cos\left(\sqrt{\omega_o^2 - \omega^2}\,t + \theta\right) + \left(\dfrac{\omega_o^2}{\omega_o^2 - \omega^2}\right)r_o$

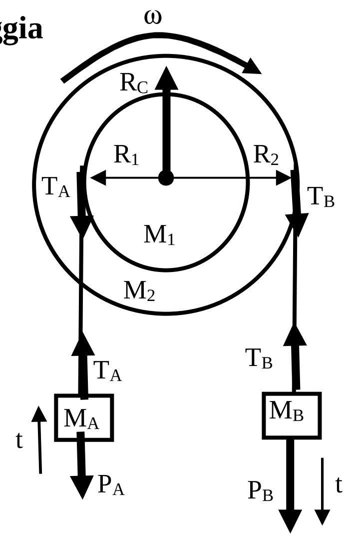


dove l'ampiezza di oscillazione A e la fase iniziale ϕ sono determinate dalle condizioni iniziali

La **nuova posizione di equilibrio** $r_{eq} = \left(\dfrac{\omega_o^2}{\omega_o^2 - \omega^2}\right)r_o = 10r_o = 1m$ (oltre i limiti di elasticità)

il **periodo delle oscillazioni** è $T = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\omega_o^2 - \omega^2}} = 6.28s$

4. Studio delle forze sui blocchi M_A, M_B e dei momenti agenti sulla puleggia



$$\begin{matrix}(M_B)\\(M_A)\\(ruota)\end{matrix}\begin{cases}P_B - T_B = M_B a_B\\ T_A - P_A = M_A a_A\\ +T_B R_2 - T_A R_1 = I_{tot}\alpha\end{cases} \qquad \text{(Eq.1)}$$

Le accelerazioni lineari dei blocchi a_A ed a_B in questo caso non coincidono Infatti per la condizione di raccordo tra le velocità delle funi con le velocità dei punti periferici delle due ruote si ha

$$\begin{cases}v_A = \omega R_1\\ v_B = \omega R_2\end{cases} \quad \text{e derivando} \quad \begin{cases}a_A = \alpha R_1\\ a_B = \alpha R_2\end{cases}$$

Inserendo queste relazioni nelle Eq.(1) e moltiplicando le prime due di Eq.(1) per i rispettivi raggi

$$\begin{matrix}*R_2\\ *R_1\\ (ruota)\end{matrix}\begin{cases}P_B R_2 - T_B R_2 = M_B R_2^2\alpha\\ T_A R_1 - P_A R_1 = M_A R_1^2\alpha\\ +T_B R_2 - T_A R_1 = I_{tot}\alpha\end{cases}$$

Sommando infine tutte i termini a primo membro e uguagliandoli alla somma dei secondi membri si annullano i contributi delle due tensioni delle funi

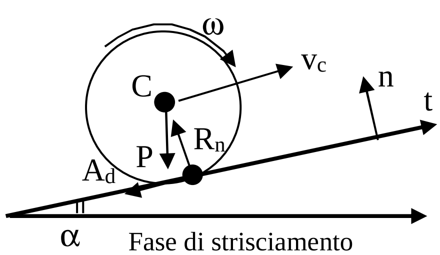
$$P_B R_2 - P_A R_1 = \left(M_B R_2^2 + M_A R_1^2 + I_{tot}\right)\alpha \quad \text{da cui} \quad \alpha = g\frac{M_B R_2 - M_A R_1}{M_B R_2^2 + M_A R_1^2 + \left(\frac{M_1 R_1^2}{2} + \frac{M_2 R_2^2}{2}\right)} = \mathbf{2.87\ rad/s^2}$$

ove il momento di inerzia delle ruote rispetto al centro di massa $I_{tot} = \frac{M_1 R_1^2}{2} + \frac{M_2 R_2^2}{2} = \mathbf{6.62\ kg\ m^2}$

5. Fase di strisciamento: attrito dinamico

1^A Eq. Cardinale $\begin{matrix}n)\\ t)\end{matrix}\begin{cases}R_n - P\cos\alpha = 0\\ -A_d - P\sin\alpha = Ma_C\end{cases}$ da cui la decelerazione e la velocità di C

$$\begin{cases}a_C = -g(\sin\alpha + \mu_d\cos\alpha) = -6.1 m/s^2\\ v_c = v_o - |a_C|\cdot t\end{cases}$$



2^A Eq. Cardinale rispetto ad un asse per C : $A_d r = I_C\alpha$

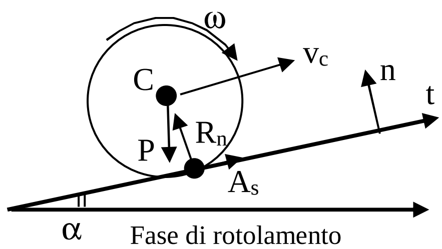
da cui la accelerazione angolare e la velocità angolare $\begin{cases}\alpha = \frac{A_d r}{I_C} = \frac{\mu_d Mrg\cos\alpha}{I_C}\\ \omega = \alpha\cdot t\end{cases}$

La condizione di puro rotolamento si instaura quando $v_C(t) = \omega(t)\cdot r$ da cui $v_o - |a_C|t = \alpha\cdot r\cdot t$

ossia quando $t_{rot} = \dfrac{v_o}{|a_C| + \alpha r} = \dfrac{v_o}{g\left[\sin\alpha + \mu_d \cos\alpha\left(1 + \dfrac{Mr^2}{I_C}\right)\right]}$ = **0.538 s** ($I_C = \dfrac{2}{5}Mr^2$)

a quell'istante la velocità si è ridotta a $v_C(t_{rot}) = v_o - |a_C| t_{rot} = v_o \dfrac{\dfrac{\mu_d}{tg\alpha}\left(\dfrac{Mr^2}{I_C}\right)}{\left[1 + \dfrac{\mu_d}{tg\alpha}\left(1 + \dfrac{Mr^2}{I_C}\right)\right]}$ **=3.71 m/s**

Fase di rotolamento: l'attrito diviene statico e cambia verso



1^A Eq. Cardinale $\begin{cases} n) \quad R_n - P\cos\alpha = 0 \\ t) \quad A_s - P\sin\alpha = Ma_C \end{cases}$

2^A Eq. Cardinale rispetto ad un asse per C : $-A_s r = I_C \alpha = I_C \dfrac{a_C}{r}$

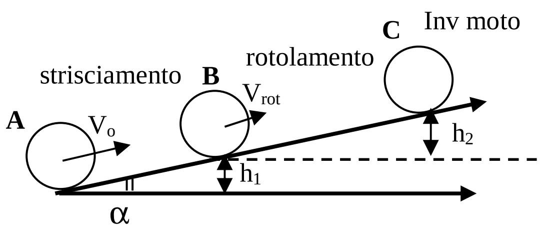
Combinando le due equazioni cardinali si ottiene la decelerazione $a_C = \dfrac{-g\sin\alpha}{1 + I_C/Mr^2}$ = **-2.39 m/s²**

Calcolo della quota massima con approccio energetico

L'energia meccanica iniziale nel punto A è cinetica e vale $E_A = \dfrac{1}{2}Mv_o^2$

Quando la sfera smette di strisciare nel punto B l'energia si è ridotta a causa dell'attrito dinamico

$$E_B = \frac{1}{2}Mv_{rot}^2\left(1 + \frac{I_C}{Mr^2}\right) + Mgh_1$$



La diminuzione vale $E_A - E_B = \dfrac{\mu_d}{tg\alpha}Mgh_1$

da cui $h_1 = \dfrac{v_o^2 - v_{rot}^2(1 + I_C/Mr^2)}{2g(1 + \mu_d/tg\alpha)}$ = **83.1 cm**

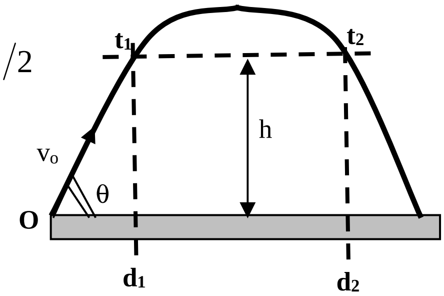
Quando la sfera comincia a rotolare da B a C l'energia meccanica si conserva

$E_B = \dfrac{1}{2}Mv_{rot}^2\left(1 + \dfrac{I_C}{Mr^2}\right) + Mgh_1 \quad = \quad E_C = +Mg(h_1 + h_2)$ da cui $h_2 = \dfrac{v_{rot}^2(1 + I_C/Mr^2)}{2g}$ = **98.5 cm**

La quota complessiva è quindi **h_1+h_2= 1.81 m**

Università di Roma "La Sapienza"
Facoltà di Ingegneria
FISICA
Ingegneria Gestionale (M-Z)
Esonero del 26 Aprile 2013 – Tipologia **B**

1. Equazioni della cinematica: passaggio generico ad una quota h



lungo l'asse x $\begin{cases} x = v_o t \cos\theta \\ v_x = v_o \cos\theta \\ a_x = 0 \end{cases}$ lungo l'asse y $\begin{cases} y = v_o t \sin\theta - g\, t^2/2 \\ v_y = v_o \sin\theta - gt \\ a_y = -g \end{cases}$

Imponendo il passaggio della palla alla quota $y(t) = h$

$t^2 - \left(\dfrac{2v_o \sin\theta}{g}\right)t + \dfrac{2h}{g} = 0$ si ottengono i due istanti di tempo $t_{1/2} = \dfrac{v_o \sin\theta \pm \sqrt{v_o^2 \sin^2\theta - 2gh}}{g}$

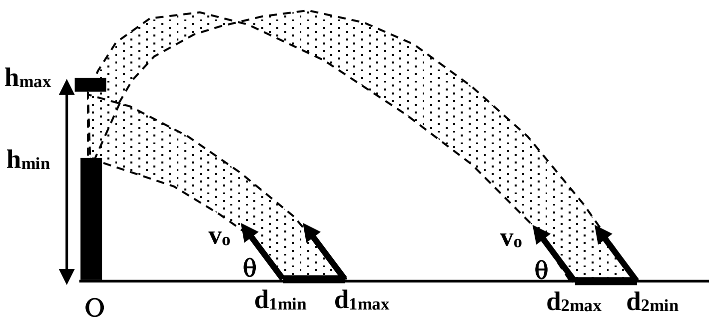
e le due distanze possibili $\mathbf{d_{1/2}}$ dal punto di lancio O $d_{1/2} = \left(\dfrac{v_o^2}{g}\right)\cos\theta\left[\sin\theta \pm \sqrt{\sin^2\theta - 2gh/v_o^2}\right]$

nella fase di salita e ridiscesa della palla.

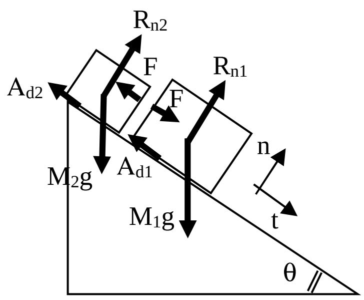
Per raggiungere la quota h_{min}=2 m la sfera può essere calciata da una delle distanze $\begin{cases} d_{1\min} = 3.9m \\ d_{2\min} = 29.5m \end{cases}$

Per raggiungere la quota h_{max}=2.5m la sfera può essere calciata da una delle distanze $\begin{cases} d_{1\max} = 5.1m \\ d_{2\max} = 28.3m \end{cases}$

Combinando i due intervalli ammessibili sono $d_{1\min} \le d \le d_{1\max}$ come anche $d_{2\max} \le d \le d_{2\min}$



2. Studio delle forze sui singoli blocchi



Blocco anteriore
Scomponendo tutte le forze agenti lungo gli assi t,n

$$\begin{cases} \text{t)}\ M_1 g \sin\theta - \mu_{d1} M_1 g \cos\theta + F = M_1 a \\ \text{n)}\ R_{n1} = M_1 g \cos\theta \end{cases}$$

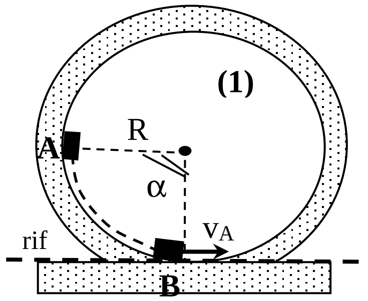
Blocco posteriore
Scomponendo tutte le forze agenti lungo gli assi t,n

$$\begin{cases} t) & M_2 g\sin\theta - \mu_{d2} M_2 g\cos\theta - F = M_2 a \\ n) & R_{n2} = M_2 g\cos\theta \end{cases}$$

Dalle espressioni lungo l'asse del moto $a = g\dfrac{(M_1+M_2)\sin\theta - (\mu_{d1}M_1 + \mu_{d2}M_2)\cos\theta}{M_1+M_2} =$ **0.826 m/s²**

la forza di contatto tra i blocchi $F = M_1(a - g\sin\theta + \mu_{d1} g\cos\theta) = \dfrac{M_1 M_2(\mu_{d1} - \mu_{d2})g\cos\theta}{M_1+M_2} =$ **3.055 N**

3. Fase (1): la massa m_A scende da A verso B acquistando velocità



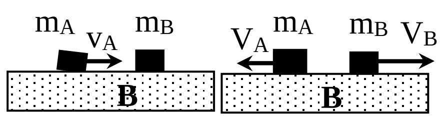
Conservazione energia meccanica in A e B:

$E_A = E_B$ ossia $m_A gR = \frac{1}{2} m_A v_A^2$ da cui $v_A = \sqrt{2gR}$

Fase (2): urto elastico fra m_A e m_B

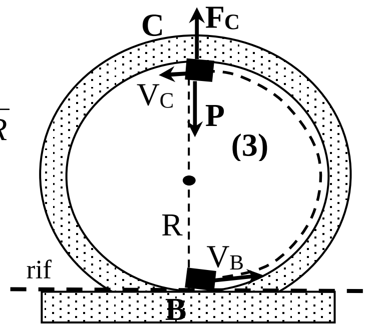
Conservazione energia cinetica e conservazione quantità di moto

(2)



$$V_B^{dopo} = \left(\frac{2m_A}{m_A+m_B}\right)v_A^{prima} + \left(\frac{m_B-m_A}{m_A+m_B}\right)v_B^{prima} = \left(\frac{2m_A}{m_A+m_B}\right)\sqrt{2gR}$$

Fase (3): tragitto da B a C della massa m_B per effettuare giro della morte



Condizione di aderenza in C : $F_C \geq P$ da cui $\dfrac{m_B V_C^2}{R} \geq m_B g \rightarrow V_C \geq \sqrt{gR}$

Conservazione energia meccanica in B e C :

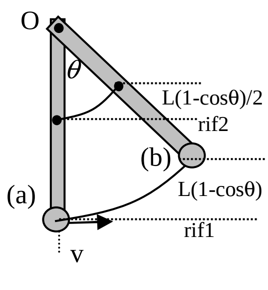
$E_B = E_C \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2} m_B V_B^2 = m_B g(2R) + \frac{1}{2} m_B V_C^2 \quad \rightarrow \quad V_B^2 = 4gR + V_C^2 \geq 5gR$

Combinando le espressioni finali delle fasi (2) e (3)

$\left(\dfrac{2m_A}{m_A+m_B}\right)^2 2gR \geq 5gR$ da cui $\left(\dfrac{m_A+m_B}{2m_A}\right) \leq \sqrt{\dfrac{2}{5}}$ ossia $m_B \leq \left[2\sqrt{\dfrac{2}{5}} - 1\right]\cdot m_A =$ **0.53 kg**

M=4kg, di lunghezza L=40cm, m=1kg. velocità v=0.5m/s

4. Calcolo energia meccanica nello stato (a)



Il sistema è dotato di un momento di inerzia complessivo dato da:

$I_{tot} = I_{asta} + I_m = \dfrac{ML^2}{3} + mL^2 = \dfrac{L^2}{3}(M + 3m)$

Assumendo nulla l'energia potenziale complessiva nello stato (a), l'energia meccanica coincide con l'energia cinetica di rotazione

$$E_{ma} = T_a = \frac{1}{2} I_{tot} \omega_a^2 = \frac{1}{2} I_{tot} \left(\frac{v}{L} \right)^2 = \frac{1}{6}(M + 3m)v^2$$

Calcolo energia meccanica nello stato (b)

Essendo nulla l'energia cinetica nello stato (b), l'energia meccanica diviene

$$E_{mb} = U_b = Mg \frac{L}{2}(1 - \cos\theta) + mgL(1 - \cos\theta) = \frac{gL}{2}(M + 2m)(1 - \cos\theta)$$

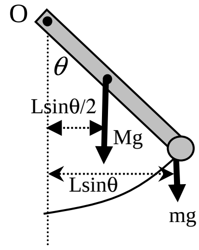
dove sono stati distinti i riferimenti per le masse m, M

Infine imponendo la conservazione dell'energia meccanica $E_{ma} = E_{mb}$

si può calcolare l'**angolo massimo di oscillazione** $\theta = \arccos\left[1 - \frac{v^2}{3gL}\left(\frac{M + 3m}{M + 2m}\right)\right] =$ **12° 47'**

Calcolo del periodo di oscillazione:

Quando il pendolo composto è fuori dalla sua posizione di equilibrio, il momento delle due forze peso tende a far ruotare il sistema verso la posizione di equilibrio



Applicando la seconda equazione cardinale $M_o^{ext} = \frac{db_o}{dt} = I_{tot} \frac{d^2\theta}{dt^2}$

dove $M_o^{ext} = -MgL\sin\theta / 2 - mgL\sin\theta \cong -\frac{gL}{2}(M + 2m)\theta$

L'equazione differenziale è quindi $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(\frac{gL(M + 2m)}{2I_{tot}}\right)\theta = 0$ che prevede oscillazioni di periodo

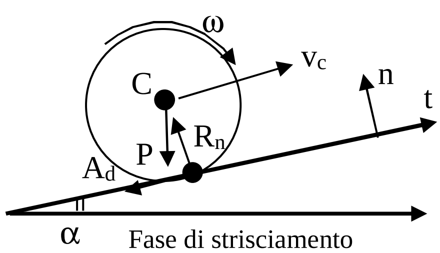
$T = 2\pi\sqrt{\frac{2I_{tot}}{gL(M + 2m)}} = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}\left(\frac{M + 3m}{M + 2m}\right)} =$ **1.12 s.**

Il tempo necessario per tornare in posizione verticale è quindi **T/2 = 0.56 s**

5. Fase di strisciamento: attrito dinamico

1^A Eq. Cardinale $\begin{matrix} n) \\ t) \end{matrix} \begin{cases} R_n - P\cos\alpha = 0 \\ -A_d - P\sin\alpha = Ma_C \end{cases}$ da cui la decelerazione e la velocità di C

$$\begin{cases} a_C = -g(\sin\alpha + \mu_d \cos\alpha) = -6.1 m/s^2 \\ v_c = v_o - |a_C| \cdot t \end{cases}$$



Fase di strisciamento

2^A Eq. Cardinale rispetto ad un asse per C : $A_d r = I_C \alpha$

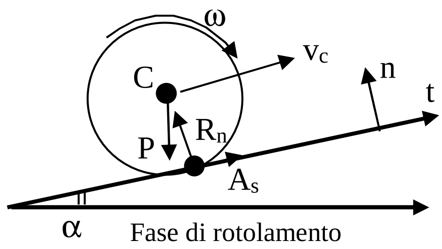
da cui la accelerazione angolare e la velocità angolare $\begin{cases} \alpha = \frac{A_d r}{I_C} = \frac{\mu_d Mrg\cos\alpha}{I_C} \\ \omega = \alpha \cdot t \end{cases}$

La condizione di puro rotolamento si instaura quando $v_C(t) = \omega(t) \cdot r$ da cui $v_o - |a_C| t = \alpha \cdot r \cdot t$

ossia quando $t_{rot} = \dfrac{v_o}{|a_C| + \alpha r} = \dfrac{v_o}{g\left[\sin\alpha + \mu_d \cos\alpha \left(1 + \dfrac{Mr^2}{I_C}\right)\right]} =$ **0.538 s** **(** $I_C = \frac{2}{5} Mr^2$ **)**

a quell'istante la velocità si è ridotta a $v_C(t_{rot}) = v_o - |a_C| t_{rot} = v_o \dfrac{\dfrac{\mu_d}{tg\alpha}\left(\dfrac{Mr^2}{I_C}\right)}{\left[1 + \dfrac{\mu_d}{tg\alpha}\left(1 + \dfrac{Mr^2}{I_C}\right)\right]}$ **=3.71 m/s**

Fase di rotolamento: l'attrito diviene statico e cambia verso



1^A Eq. Cardinale $\begin{cases} n) & R_n - P\cos\alpha = 0 \\ t) & A_s - P\sin\alpha = Ma_C \end{cases}$

2^A Eq. Cardinale rispetto ad un asse per C : $-A_s r = I_C \alpha = I_C \dfrac{a_C}{r}$

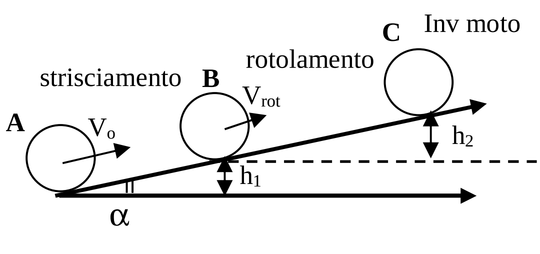
Combinando le due equazioni cardinali si ottiene la decelerazione $a_C = \dfrac{-g\sin\alpha}{1 + I_C/Mr^2}$ = **-2.39 m/s²**

Calcolo della quota massima con approccio energetico

L'energia meccanica iniziale nel punto A è cinetica e vale $E_A = \frac{1}{2} M v_o^2$

Quando la sfera smette di strisciare nel punto B l'energia si è ridotta a causa dell'attrito dinamico

$$E_B = \frac{1}{2} M v_{rot}^2 \left(1 + \frac{I_C}{Mr^2}\right) + Mgh_1$$



La diminuzione vale $E_A - E_B = \dfrac{\mu_d}{tg\alpha} Mgh_1$

da cui $h_1 = \dfrac{v_o^2 - v_{rot}^2\left(1 + I_C/Mr^2\right)}{2g\left(1 + \mu_d/tg\alpha\right)} =$ **83.1 cm**

Quando la sfera comincia a rotolare da B a C l'energia meccanica si conserva

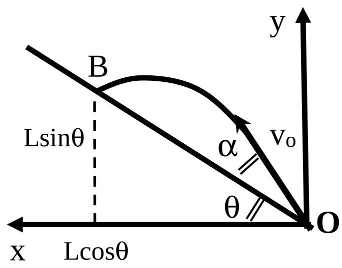
$E_B = \frac{1}{2} M v_{rot}^2 \left(1 + \dfrac{I_C}{Mr^2}\right) + Mgh_1 = E_C = +Mg(h_1 + h_2)$ da cui $h_2 = \dfrac{v_{rot}^2\left(1 + I_C/Mr^2\right)}{2g} =$ **98.5 cm**

La quota complessiva è quindi **h_1+h_2= 1.81 m**

Università di Roma "La Sapienza"
Facoltà di Ingegneria
FISICA
A.A. 2012-2013
Ingegneria Gestionale (M-Z)
Esonero del 26 Aprile 2013 – Tipologia **C**

1. Equazioni della cinematica del proiettile

lungo x $\begin{cases} x = v_o t\cos(\alpha+\theta) \\ v_x = v_o\cos(\alpha+\theta) \\ a_x = 0 \end{cases}$ lungo y $\begin{cases} y = v_o t\sin(\alpha+\theta) - g\,t^2/2 \\ v_y = v_o\sin(\alpha+\theta) - gt \\ a_y = -g \end{cases}$



Il proiettile termina il suo volo nel punto B=(x_B,y_B)

Imponendo che il proiettile abbia la quota del punto B

$y(t) = y_B = L\sin\theta$ da cui $t^2 - \left(\dfrac{2v_o\sin(\alpha+\theta)}{g}\right)t + \dfrac{2L\sin\theta}{g} = 0$

si ottengono i due istanti di tempo $t_{1/2} = \dfrac{v_o\sin(\alpha+\theta) \pm \sqrt{v_o^2\sin^2(\alpha+\theta) - 2gL\sin\theta}}{g}$

Imponendo che il proiettile abbia anche l'ascissa del punto B

$x(t) = x_B = L\cos\theta$ da cui $\dfrac{v_o^2}{g}\cos(\alpha+\theta)\left[\sin(\alpha+\theta) \pm \sqrt{\sin^2(\alpha+\theta) - 2gL\sin\theta/v_o^2}\right] = L\cos\theta$

Isolando il radicale $\left[\pm\cos(\alpha+\theta)\sqrt{\sin^2(\alpha+\theta) - 2gL\sin\theta/v_o^2}\right] = \dfrac{gL}{v_o^2}\cos\theta - \sin(\alpha+\theta)\cos(\alpha+\theta)$

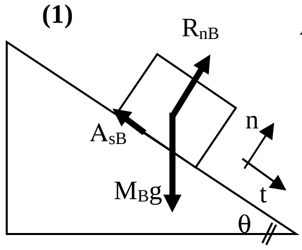
Quadrando e semplificando $2\dfrac{gL}{v_o^2}[\cos\theta\sin(\alpha+\theta) - \sin\theta\cos(\alpha+\theta)]\cos(\alpha+\theta) = \left(\dfrac{gL}{v_o^2}\right)^2\cos^2\theta$

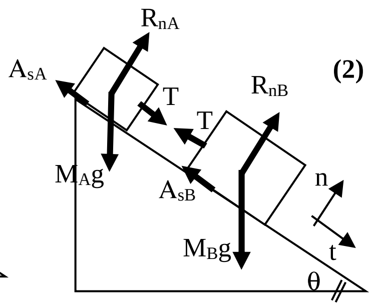
da cui $L = \dfrac{2v_o^2}{g}\dfrac{\cos(\alpha+\theta)[\cos\theta\sin(\alpha+\theta) - \sin\theta\cos(\alpha+\theta)]}{\cos^2\theta} = \dfrac{2v_o^2}{g}\dfrac{\cos(\alpha+\theta)\sin\alpha}{\cos^2\theta} =$ **184.6 m**

2. Studio delle forze sui singoli blocchi

Verifica della instabilità del blocco a valle M_B (1)
Scomponendo tutte le forze agenti lungo gli assi t,n

$\begin{aligned} t)&\ \{ M_B g\sin\theta - A_{sB} = 0 \\ n)&\ \{ R_{nB} = M_B g\cos\theta \end{aligned}$





da cui $A_{sB} = M_B g\sin\theta \le \mu_{sB}R_{nB} = \mu_{sB}M_B g\cos\theta$

che porta alla $\mu_{sB} \ge tg\theta$ che in questo caso viene disattesa !!! M_B da sola non sarebbe in quiete !

Stabilità del sistema fune + M_A + M_B (2)

Scomponendo tutte le forze agenti lungo gli assi t,n sulla massa M_B

$\begin{aligned} t)&\ \{ M_B g\sin\theta - A_{sB} - T = 0 \\ n)&\ \{ R_{nB} = M_B g\cos\theta \end{aligned}$

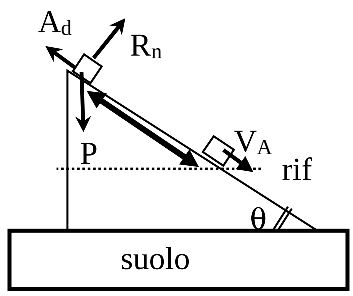
Scomponendo tutte le forze agenti lungo gli assi t,n sulla massa M_A

$$\begin{cases} t) & M_A g \sin\theta - A_{sA} + T = 0 \\ n) & R_{nA} = M_A g \cos\theta \end{cases}$$

Combinando le eq. lungo t si ha $A_{sA} + A_{sB} = (M_A + M_B) g \sin\theta \le (\mu_{sA} M_A + \mu_{sB} M_B) g \cos\theta$

da cui $\mu_{sA} \ge \dfrac{(M_A + M_B) tg\theta - \mu_{sB} M_B}{M_A} =$ **0.762**

5. Velocità di caduta della massa m_A prima dell'urto



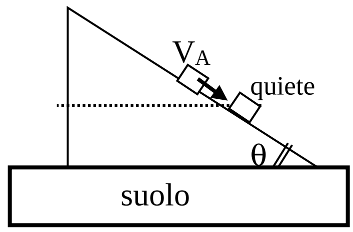
durante lo scivolamento lungo il piano scabro la forza di attrito dinamico compie un lavoro non conservativo che causa una diminuzione dell'energia meccanica del blocco

$$L_{nC} = -\mu_{dA} m_A g L \cos\theta = \Delta E_m = T_{finale} - U_{iniziale} = \frac{1}{2} m_A V_A^2 - m_A g L \sin\theta$$

da cui la velocità finale con cui impatterà la massa sottostante è $V_A = \sqrt{2gL(\sin\theta - \mu_{dA}\cos\theta)}$

Urto elastico fra la massa m_A e la massa m_B

Le velocità delle masse dopo l'urto si calcolano imponendo la conservazione della quantità di moto e dell'energia cinetica

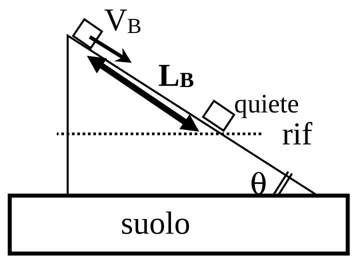


$$V_B^{dopo} = \left(\frac{2m_A}{m_A + m_B}\right) V_A^{prima}$$

$$V_A^{dopo} = \left(\frac{m_A - m_B}{m_A + m_B}\right) V_A^{prima}$$

Spazio percorso dalla massa m_B dopo l'urto

anche durante lo scivolamento lungo il piano scabro di m_B la forza di attrito dinamico compie un lavoro non conservativo che causa una diminuzione dell'energia meccanica del blocco m_B



$$L_{nC} = -\mu_{dB} m_B g L_B \cos\theta = \Delta E_m = 0 - E_{iniziale} = -\frac{1}{2} m_B V_B^2 - m_B g L_B \sin\theta$$

da cui lo spazio percorso diviene $L_B = \dfrac{V_B^2}{2g(\mu_{dB}\cos\theta - \sin\theta)} = \left(\dfrac{2m_A}{m_A + m_B}\right)^2 \dfrac{(\sin\theta - \mu_{dA}\cos\theta)}{(\mu_{dB}\cos\theta - \sin\theta)} L =$

$L_B = L\left(\dfrac{2m_A}{m_A + m_B}\right)^2 \dfrac{(\tan\theta - \mu_{dA})}{(\mu_{dB} - \tan\theta)} =$ **63.4 cm**

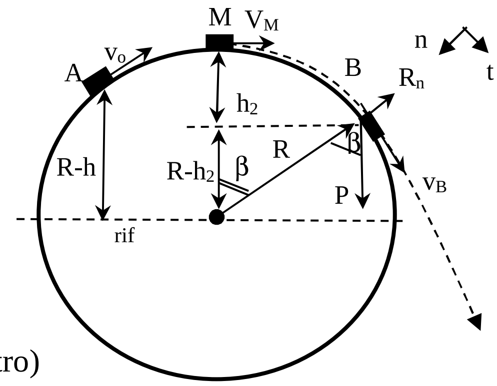
4. Conservazione energia meccanica
In assenza di attriti (cilindro liscio) l'energia meccanica nel punto iniziale E_A deve mantenersi costante durante tutto il tragitto sul cilindro.

Verifica di raggiungibilità dell'apice M con conseguente cambio di versante

$E_A = E_M$ da cui $T_A + U_A = T_M + U_M$

$\frac{1}{2}mv_o^2 + mg(R-h) = \frac{1}{2}mv_M^2 + mgR$ (riferimento nel centro)

da cui $v_M = \sqrt{v_o^2 - 2gh} \geq 0$



Considerazioni energetiche tra lo stato iniziale A e finale B

$E_A = E_B$ da cui $T_A + U_A = T_B + U_B$

$\frac{1}{2}mv_o^2 + mg(R-h) = \frac{1}{2}mv_B^2 + mg(R-h_2)$ (riferimento nel centro)

da cui $v_B = \sqrt{v_o^2 + 2g(h_2 - h)}$ (Eq.1)

Le **forze agenti** quando il blocco si trova in B sono:

$$\begin{cases} \hat{n} & P\cos\beta - R_n = ma_n = mv_B^2/R \\ \hat{t} & P\sin\beta = ma_t \end{cases}$$ dove al distacco però $\mathbf{R_n=0}$

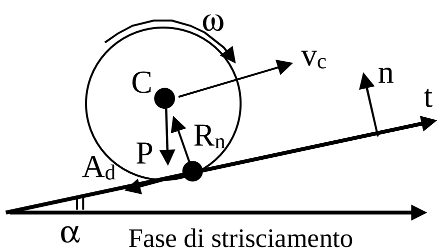
per cui deve valere la condizione $\frac{mv_B^2}{R} = mg\cos\beta = mg\frac{R-h_2}{R}$ da cui $v_B = \sqrt{g(R-h_2)}$

che combinata con Eq.1 dà luogo alla soluzione del **dislivello** $h_2 = \frac{R+2h}{3} - \frac{v_o^2}{3g} =$ **32.3 cm**

5. Fase di strisciamento: attrito dinamico

1^A Eq. Cardinale $\begin{cases} n) & R_n - P\cos\alpha = 0 \\ t) & -A_d - P\sin\alpha = Ma_C \end{cases}$ da cui la decelerazione e la velocità di C

$$\begin{cases} a_C = -g(\sin\alpha + \mu_d\cos\alpha) = -6.1 m/s^2 \\ v_c = v_o - |a_C| \cdot t \end{cases}$$



Fase di strisciamento

2^A Eq. Cardinale rispetto ad un asse per C : $A_d r = I_C \alpha$

da cui la accelerazione angolare e la velocità angolare $\begin{cases} \alpha = \frac{A_d r}{I_C} = \frac{\mu_d Mrg\cos\alpha}{I_C} \\ \omega = \alpha \cdot t \end{cases}$

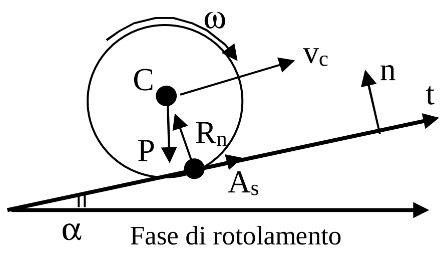
La condizione di puro rotolamento si instaura quando $v_C(t) = \omega(t) \cdot r$ da cui $v_o - |a_C| t = \alpha \cdot r \cdot t$

ossia quando $t_{rot} = \frac{v_o}{|a_C| + \alpha r} = \frac{v_o}{g\left[\sin\alpha + \mu_d \cos\alpha\left(1+\frac{Mr^2}{I_C}\right)\right]} =$ **0.538 s** **(** $I_C = \frac{2}{5}Mr^2$ **)**

a quell'istante la velocità si è ridotta a $v_C(t_{rot}) = v_o - |a_C| t_{rot} = v_o \frac{\frac{\mu_d}{tg\alpha}\left(\frac{Mr^2}{I_C}\right)}{\left[1+\frac{\mu_d}{tg\alpha}\left(1+\frac{Mr^2}{I_C}\right)\right]}$ **=3.71 m/s**

Fase di rotolamento: l'attrito diviene statico e cambia verso

1^A^ Eq. Cardinale $\begin{cases} n) & R_n - P\cos\alpha = 0 \\ t) & A_s - P\sin\alpha = Ma_C \end{cases}$



2^A^ Eq. Cardinale rispetto ad un asse per C : $-A_s r = I_C\alpha = I_C \frac{a_C}{r}$

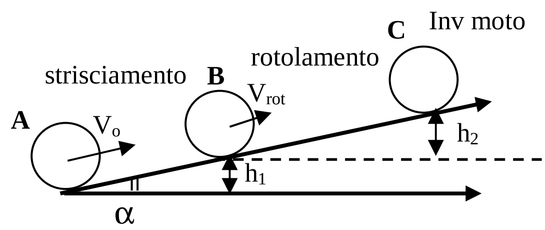
Combinando le due equazioni cardinali si ottiene la decelerazione $a_C = \frac{-g\sin\alpha}{1+I_C/Mr^2}$ = **-2.39 m/s²**

Calcolo della quota massima con approccio energetico

L'energia meccanica iniziale nel punto A è cinetica e vale $E_A = \frac{1}{2}Mv_o^2$

Quando la sfera smette di strisciare nel punto B l'energia si è ridotta a causa dell'attrito dinamico

$$E_B = \frac{1}{2}Mv_{rot}^2\left(1+\frac{I_C}{Mr^2}\right) + Mgh_1$$



La diminuzione vale $E_A - E_B = \frac{\mu_d}{tg\alpha}Mgh_1$

da cui $h_1 = \frac{v_o^2 - v_{rot}^2(1+I_C/Mr^2)}{2g(1+\mu_d/tg\alpha)} =$ **83.1 cm**

Quando la sfera comincia a rotolare da B a C l'energia meccanica si conserva

$E_B = \frac{1}{2}Mv_{rot}^2\left(1+\frac{I_C}{Mr^2}\right) + Mgh_1 \;=\; E_C = +Mg(h_1+h_2)$ da cui $h_2 = \frac{v_{rot}^2(1+I_C/Mr^2)}{2g} =$ **98.5 cm**

La quota complessiva è quindi **h_1+h_2= 1.81 m**