UNIVERSITA' DEGLI STUDI di ROMA "LA SAPIENZA"
Anno Accademico 2012 – 2013 – Ing. Aerospaziale

Esame di Elettromagnetismo (esercizi 1,3,4: 6 punti ciascuno; quesiti a,b,c: 4 punti ciascuno)

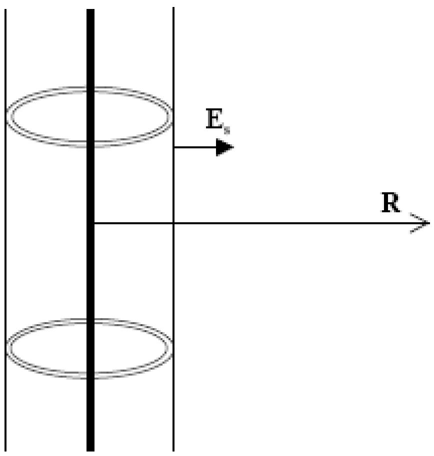
Esame di Fisica II ((esercizi 1,2,3,4: 6 punti ciascuno; quesiti a,b: 3 punti ciascuno)

Prova scritta di recupero del 6 Novembre 2013

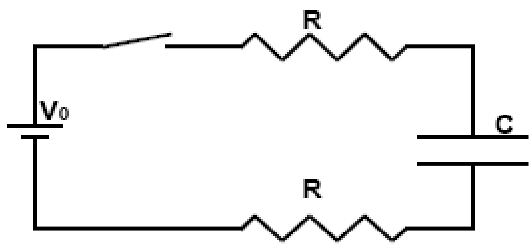
1)

Un cilindro conduttore ha diametro esterno D e lunghezza infinita. Sull'asse del cilindro è posto un filo con densità di carica lineare $\lambda=6.67*10^{-10}$C/m. Sapendo che il campo elettrico misurato sulla superficie esterna del cilindro è $E_s = 120V/m$, determinare:

1. Il diametro esterno D del cilindro e la densità di carica indotta sulla sua superficie esterna
2. La forza che agisce su una carica di prova q=10^{-4} C posta all'esterno del cilindro, ad una distanza R=88 cm dall'asse.



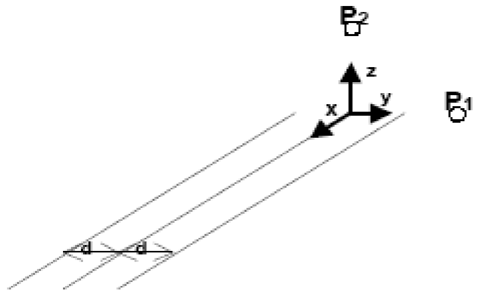
2)



Nel circuito in figura, con $V_0 = 100V, R = 5M\Omega, C = 10\mu F$, il condensatore è inizialmente scarico e l'interruttore è aperto. Determinare dopo 50 secondi dall'inizio della carica del condensatore (chiusura dell'interruttore):

1. L'energia dissipata su una delle resistenze R.
2. L'energia accumulata sul condensatore C.
3. L'energia fornita dal generatore.

3)

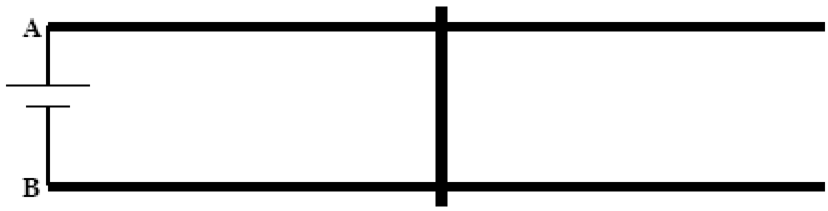


Tre conduttori rettilinei paralleli e di lunghezza infinita giacciono sullo stesso piano xy, con il conduttore centrale che coincide con l'asse x. La distanza tra i conduttori contigui è d=10 cm. Il conduttore centrale è percorso da una corrente costante i_1=1 A, nel verso delle x crescenti, mentre i due conduttori laterali sono percorsi ciascuno da una corrente i_2=5/4 A nel verso opposto. Determinare:

1. Il campo magnetico generato dai conduttori nel punto P_1 di coordinate (0,2d,0).
2. Il campo magnetico generato dai conduttori nel punto P_2 di coordinate (0,0,2d).
3. La forza per unità di lunghezza agente sul conduttore centrale.

4)

Una barra conduttrice, di massa m=100g e resistenza R=500Ω, appoggia senza attrito su due binari orizzontali di resistenza trascurabile. La distanza tra i binari è l=40cm e il sistema è immerso in un campo magnetico uniforme B=0.8T, perpendicolare ai binari ed alla barra (entrante nel foglio, vedi figura). All'istante t=0 la barra è ferma e tra i binari viene posto un generatore (V_A-V_B>0).



Se il generatore fornisce una corrente costante i_0=0.2A calcolare:

1. In che direzione si muove la sbarra
2. La velocità della sbarra al tempo t_1=15s
3. Il lavoro fatto dal generatore fino al tempo t_1

Se invece il generatore fornisce una FEM costante pari a V_0= 8V calcolare

4. La velocità limite della sbarra
5. La potenza fornita dal generatore alla velocità limite

a)Definire la forza elettromotrice, indicare come si può misurarla in un circuito e descriverne le differenze rispetto al potenziale

b)Trovare le espressioni delle induttanze per un resistore, un condensatore e un induttore

c)Dimostrare l'invalidità della legge di Ampère per correnti non stazionari e ricavare la legge di Ampère-Maxwell

SOLUZIONI

1)

La carica indotta sulla superficie di un tratto di cilindro è la stessa che c'è nella sezione di filo all'interno:

$$Q = \lambda l = \sigma \pi D l \tag{6.1}$$

quindi si può scrivere:

$$\sigma = \frac{\lambda}{\pi D} \tag{6.2}$$

Noto il campo elettrico sulla superficie si può determinare la densità di carica e quindi il diametro del cilindro:

$$E_S = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda}{\varepsilon_0 \pi D} \rightarrow D = \frac{\lambda}{\pi \varepsilon_0 E_S} = \frac{6.67 \cdot 10^{-10}}{\pi \cdot 8.85 \cdot 10^{-12} \cdot 120} = 0.2m \tag{6.3}$$

Il campo elettrico all'esterno del cilindro conduttore (fino alla superficie esterna) è uguale a quello del filo rettilineo infinito:

$$E = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0 R} \tag{6.4}$$

E pertanto la forza su una carica di prova vale:

$$F = qE = q\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R} = \frac{10^{-4} \cdot 6.67 \cdot 10^{-10}}{2 \cdot \pi \cdot 8.85 \cdot 10^{-12} \cdot 0.88} = 1.36 \cdot 10^{-3} N \tag{6.5}$$

2)

Si tratta della carica di un condensatore attraverso una resistenza totale pari a $2R$, quindi con la costante di tempo $\tau = 2RC$. La corrente durante la fase di carica vale:

$$i = \frac{V_0}{2R} e^{-\frac{t}{2RC}} \tag{11.1}$$

e la tensione ai capi del condensatore vale:

$$V_C = V_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{2RC}}\right) \tag{11.2}$$

Dopo 50 secondi di carica la tensione sul condensatore varrà quindi:

$$V_C = V_0 \left(1 - e^{-\frac{50}{2RC}}\right) = 393.5V \tag{11.3}$$

La carica totale sul condensatore è:

$$Q = CV_C = 10 \cdot 10^{-6} \cdot 393.5 = 3.93mC \tag{11.4}$$

Il lavoro fatto dal generatore per far transitare questa carica attraverso la FEM costante V_0 è:

$$W_{GEN} = V_0 Q = V_0 V_C C = 3.93J \tag{11.5}$$

L'energia accumulata sul condensatore è pari a $CV^2/2$. Nota che negli istanti intermedi non vale la relazione che vede l'energia dissipata essere esattamente uguale a quella accumulata nel condensatore:

$$\begin{aligned} W_{GEN} &= W_R + W_R + W_C \\ W_R &= \frac{W_{GEN} - W_C}{2} = \frac{3.93 - W_C}{2} = 1.58J \end{aligned} \tag{11.7}$$

3)

Il campo magnetico in P_1 ha sole componenti z, positiva quella generate dal filo centrale e negative le altre due:

$$B_z = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi(2d)} - \frac{\mu_0 i_2}{2\pi(d)} - \frac{\mu_0 i_2}{2\pi(3d)} = -\frac{7}{12}\frac{\mu_0}{\pi d} = -2.3\cdot 10^{-6}T \qquad (16.1)$$

$$B_x = B_z = 0$$

Invece in P_2 il capo generato dal filo centrale è orizzontale (in direzione –y), gli altri hanno sia componenti y che z, essendo tangenti a circonferenze centrate sui fili. Le componenti z hanno peraltro somma nulla:

$$B_y = -\frac{\mu_0 i_1}{2\pi(2d)} + \frac{2\mu_0 i_2 \cos\vartheta}{2\pi\left(\sqrt{5}d\right)} = -\frac{\mu_0 i_1}{2\pi(2d)} + \frac{2\mu_0 i_2 \frac{2}{\sqrt{5}}}{2\pi\left(\sqrt{5}d\right)} = -\frac{\mu_0}{4\pi d} + \frac{2\mu_0}{4\pi d}$$

$$B_y = \frac{\mu_0}{4\pi d} = 10^{-6}T \qquad (16.2)$$

$$B_x = 0$$

$$B_z = \frac{\mu_0 i_2 sen\vartheta}{2\pi\left(\sqrt{5}d\right)} - \frac{\mu_0 i_2 sen\vartheta}{2\pi\left(\sqrt{5}d\right)} = 0$$

La forza sul conduttore centrale non può che essere nulla data la simmetria del problema.

4)

La corrente gira in senso orario, quindi è diretta verso il basso lungo la barretta mobile. Il campo magnetico è entrante nel foglio, e quindi la forza $\vec{F} = i\vec{l}\times\vec{B}$ è diretta verso destra. Poiché il generatore mantiene la corrente costante la forza è costante, e quindi si tratta di un moto uniformemente accelerato:

$$F = ilB = m\frac{dv}{dt} \rightarrow v = \frac{ilB}{m}t = \frac{0.2\cdot 0.4\cdot 0.8}{0.1}15 = 9.6m/s \qquad (23.1)$$

Nota che per mantenere la corrente costante il generatore dovrà contrastare la FEM indotta dal movimento della sbarretta, e quindi dovrà generare una FEM crescente nel tempo.

Il lavoro fatto dal generatore sarà pari all'energia cinetica acquistata dalla sbarretta, più l'energia dissipata sulla resistenza. Essendo la corrente costante, la potenza dissipata è costante (Ri^2), si otterrà:

$$W = Ri^2 t + \frac{1}{2}mv^2 = 305J \qquad (23.2)$$

Se invece di una corrente costante il generatore fornisce una tensione costante, il moto non sarà più uniformemente accelerato poichè al crescere della velocità della sbarretta cresce la FEM indotta nel circuito. La FEM indotta è pari a:

$$FEM = -\frac{d\phi(B)}{dt} = -lB\frac{dx}{dt} = -lBv \qquad (23.3)$$

La velocità limite si avrà quando la FEM indotta raggiunge la tensione del generatore, da quel momento infatti non circola più corrente nel circuito, e quindi la sbarretta non è più soggetta a forze esterne:

$$V_0 - v_{LIM}lB = 0 \rightarrow v_{LIM} = \frac{V_0}{lB} = \frac{8}{0.4\cdot 0.8} = 25m/s \qquad (23.4)$$

Alla velocità limite non circola più corrente, quindi la potenza fornita dal generatore è:

$$P_{GEN} = V_0 i = 0 \qquad (23.5)$$